Sveučilište u Zagrebu

Upotpunjeni Hopfovi algebroidi

Doktorska prezentacija

Martina Stojić

Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

20. listopada 2017.

3. Unutarnji Hopfov algebroid i skalarno proširenje

4. Heisenbergova udvojenja filtriranih Hopfovih algebri i poopćenja

5. PRIMJERI

Heisenbergovo udvojenje $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^*\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$
Nekomutativni fazni prostor $\mathrm{U}(\mathfrak{g})\sharp\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)$
Minimalno skalarno proširenje $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{min}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$
Reducirano Heisenbergovo udvojenje $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^\circ\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$
Minimalna algebra $\mathcal{O}^{min}(G)\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ diferencijalnih operatora
Algebra $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$
Heisenbergovo udvojenje $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*\sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)$ za q korijen iz 1

Uvod

$$
\begin{tikzcd}
S(\mathfrak{g}^*)\sharp S(\mathfrak{g}) \triangleright S(\mathfrak{g}^*) \arrow[d, dashed, "\mathrm{op}"] & \\
S(\mathfrak{g}^*) \triangleleft S(\mathfrak{g})\sharp S(\mathfrak{g}^*) \arrow[r, dashed, "\otimes\, ?\, \hat{\otimes}"] & S(\mathfrak{g})\sharp S(\mathfrak{g}^*) \blacktriangleright S(\mathfrak{g}) \arrow[d, dashed, "\text{deformacija}"] \\
& U(\mathfrak{g})\sharp \hat{S}(\mathfrak{g}^*) \blacktriangleright U(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}
$$

1. Uvod
   - Weylova algebra $S(\mathfrak{g}^*)\sharp S(\mathfrak{g})$
   - Deformacija Weylove algebre
   - Problemi pri deformaciji Weylove algebre
   - Yetter-Drinfeldova modulna algebra i Hopfov algebroid
   - Ideja za rješenje – tema disertacije

Weylova algebra $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)\sharp\mathrm{S}(\mathfrak{g})$

Weylova algebra

$\cong$ $\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle / I$, gdje je I ideal generiran s $\partial_\alpha x_\beta - x_\beta \partial_\alpha - \delta_{\alpha\beta}, \ \alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}$

$\cong$ prsten $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n) \cong \{ \sum_{I=0}^{K} p_I(x)\partial_I \mid K \in \mathbb{N}_0^n, \ p_I \text{ polinomi} \}$

$\cong$ poludirektni (smash) produkt $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)\sharp\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, za $\mathfrak{g} = T_0 V \cong V$ $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \cong k[V^*] \cong k[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cong k[\partial_1, \ldots, \partial_n]$

Poludirektni produkt $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)\sharp\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ je $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ uz množenje

- $f\sharp D \cdot g\sharp E = \sum f(D_{(1)} \triangleright g)\sharp D_{(2)}E$, gdje je $D \triangleright f = Df$
- koprodukt $\Delta(D) = \sum D_{(1)} \otimes D_{(2)}$, $D \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, je definiran s $\Delta(D)(f \otimes g) = D(f \cdot g) = \sum D_{(1)}f \cdot D_{(2)}g$ (Leibnizovo pravilo)

Dualne Hopfove algebre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \cong k[V^*]$ i $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$

- produkt dualan koproduktu, jedinica kojedinici itd.

Deformacija Weylove algebre

Deformacija $\rightsquigarrow$ nekomutativne koordinate

- prvo $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{op}} \cong (\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)\sharp\mathrm{S}(\mathfrak{g}))^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{S}(\mathfrak{g})\sharp\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ (geometrijski: algebra dif. operatora koji djeluju nalijevo s $\triangleleft$)
- sada $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \cong k[\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n]$, $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \cong k[\hat{\partial}_1, \ldots, \hat{\partial}_n]$
- deformacija: $\mathfrak{g}$ nekomutativna Liejeva algebra generirana s $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ modulo ideal J generiran s $[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta] - \sum_\sigma C^\sigma_{\alpha\beta}\hat{x}_\sigma$, $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}$
- $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ se deformira kao algebra u $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ se deformira kao koalgebra u neku Hopfovu algebru dualnu $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$

Meljanac, Škoda, Stojić, *Lie algebra type noncommutative phase spaces are Hopf algebroids*, Lett. Math. Phys. 107:3, 475–503 (2017)

- $\mathrm{U}(\mathfrak{g})\sharp\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)$ Zašto je to OK? Usporedba s t-deformacijama.

Problemi pri deformaciji Weylove algebre

Problem s beskonačnom dimenzionalnošću od $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ i $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$:

- koprodukt $\Delta\colon \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \to \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ se deformira u koprodukt $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \to \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \hat{\otimes} \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$

Jedno moguće rješenje:

- koprodukt $\hat{\Delta}\colon \hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*) \to \hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*) \hat{\otimes} \hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)$ i poludirektni produkt $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \sharp \hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)$ definiran iz djelovanja $\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*) \triangleleft \mathrm{U}(\mathfrak{g})$

Problem: kombiniranje $\otimes$ i $\hat{\otimes}$

- treba nam djelovanje deformiranih dif. operatora $\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*) \blacktriangleright \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ za koje ne postoje aksiomi
- ne postoji definicija 'upotpunjenog' Hopfovog algebroida

Rješenje *ad hoc*:

- djelovanje bez aksioma... koordinate...
- nestabilna definicija 'upotpunjenog' Hopfovog algebroida...

Yetter-Drinfeldova modulna algebra i Hopfov algebroid

Algebra formalnih diferencijalnih operatora na okolini jedinice Liejeve grupe G:

$$\mathrm{Diff}^{\omega}(G,e) \cong J^{\infty}(G,e)\sharp \mathrm{U}(\mathfrak{g}^L) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{g}^L)^*\sharp \mathrm{U}(\mathfrak{g}^L)$$

$$\mathrm{Diff}^{\omega}(G,e) \cong J^{\infty}(G,e)^{\mathrm{co}}\sharp \mathrm{U}(\mathfrak{g}^R) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{g}^R)^*\sharp \mathrm{U}(\mathfrak{g}^R)$$

Nekomutativni fazni prostor je suprotna algebra od $\mathrm{Diff}^{\omega}(G,e)$:

$$(\mathrm{U}(\mathfrak{g}^L)\sharp\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*))^{\mathrm{op}} \cong \hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{co}}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R) \cong \mathrm{Diff}^{\omega}(G,e)$$

$$\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*) \cong J^{\infty}(G,e) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{g}^L)^*$$

'Upotpunjeno' Heisenbergovo udvojenje $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^*\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$?

Teorem. (Lu)

- Ako je A konačno-dimenzionalna Hopfova algebra, onda je Heisenbergovo udvojenje $A^*\sharp A$ Hopfov algebroid nad A.

Teorem. (Brzeziński, Militaru) Skalarno proširenje.

- Ako je A nad H pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra, onda je $H\sharp A$ Hopfov algebroid nad A.

Ideja za rješenje – tema disertacije

1. Kategorija
   - nova kategorija koja sadrži vektorske prostore s filtracijama i vektorske prostore s kofiltracijama, te $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^*\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$
   - mora imati tenzorski produkt $\tilde{\otimes}$ koji se svodi na $\otimes$ kod filtracija i $\hat{\otimes}$ kod kofiltracija
   - mora imati koujednačitelje i oni moraju komutirati s tenzorskim produktom da bi postojala definicija $\tilde{\otimes}_A$
2. Definicija unutarnjeg Hopfovog algebroida
   - na temelju definicije unutarnjeg bialgebroida Gabi Böhm
3. Teorem o unutarnjem skalarnom proširenju
   - simetrična definicija, antipod antiizomorfizam, geometrija
4. Dokaz da je $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ nad $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^*$ unutarnja pleteničasto-komutativna YD-modulna algebra
5. Što se još može doznati općenitije o $A^*\sharp A$ i $H\sharp A$ za dualne beskonačno-dimenzionalne H i A?

KATEGORIJA indproVect

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{indVect}, \otimes, k) \arrow[dr, hook] & \\
(\mathrm{Vect}, \otimes, k) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & (\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k) \\
 & (\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

2. KATEGORIJA indproVect

- Zahtjevi, intuicija i strategija
- Kategorije indVect i proVect
- Dualne potkategorije Grothendieckovih kategorija
- Kategorija indproVect
- Tenzorski produkt, formalne sume i formalne baze
- Komutiranje tenzorskog produkta s koujednačiteljima

Zahtjevi, intuicija i strategija

Vektorski prostori sa strukturom i tenzorski produkti

1. A, B 'filtrirani' vektorski prostori $\Rightarrow A \otimes B = \operatorname{colim}_{n,m} A_n \otimes B_m$
   H, K 'kofiltrirani' vektorski prostori $\Rightarrow H \hat{\otimes} K = \lim_{k,l} H_k \otimes K_l$
2. Filtrirajuće komponente $A_n \hookrightarrow A$ su potprostori, dualnost $\Rightarrow$ kofiltrirajuće komponente $H \twoheadrightarrow H_k$ su kvocijenti
3. A kon-dim-filtrirani, H kon-dim-kofiltrirani $\Rightarrow A \tilde{\otimes} H = A \otimes H$
   $\Rightarrow$ pokušajmo s $A \tilde{\otimes} H = \operatorname{colim}_n \lim_k A_n \otimes H_k = \operatorname{colim}_n A_n \hat{\otimes} H$
   $\Rightarrow$ 'filtrirano-kofiltrirani' vektorski prostori $V = \operatorname{colim}_n \lim_k V_n^k$
4. Nadamo se da je to simetrična monoidalna kategorija.
5. Nadamo se da postoje koujednačitelji i da tenzorski produkt $\tilde{\otimes}$ komutira s njima.

Nazivi kategorija: indVect, proVect i indproVect.

Zahtjevi, intuicija i strategija

Morfizmi koji poštuju strukturu

6. Množenje $A \otimes A \to A$, komnoženje $H \to H \hat{\otimes} H$ i djelovanje $\blacktriangleright : H \otimes A \to A$ su morfizmi u toj kategoriji.
7. Aksiom djelovanja:
$$(H \hat{\otimes} H) \otimes A \to H \otimes A \to A \text{ i } H \hat{\otimes} (H \otimes A) \to H \otimes A \to A$$
$$\text{postaju } H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} A \to H \tilde{\otimes} A \to A.$$
8. Kod 'djelovanja' kofiltrirane algebre H na filtrirani prostor A,
$$\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha \hat{\partial}_1^{\alpha_1} \hat{\partial}_2^{\alpha_2} \cdots \hat{\partial}_n^{\alpha_n} \right) \blacktriangleright \hat{x}_1^{\beta_1} \hat{x}_2^{\beta_2} \cdots \hat{x}_n^{\beta_n}$$
rezultat je uvijek konačna suma
$$\bar{\sum}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha \left(\hat{\partial}_1^{\alpha_1} \hat{\partial}_2^{\alpha_2} \cdots \hat{\partial}_n^{\alpha_n} \blacktriangleright \hat{x}_1^{\beta_1} \hat{x}_2^{\beta_2} \cdots \hat{x}_n^{\beta_n} \right)$$
iako na element djeluje beskonačna suma član po član. $\Rightarrow$ Beskonačnost je kontrolirana međudjelovanjem filtracija i kofiltracija. Formalizacija: morfizmi u indproVect.

Objekti kategorija indVect i proVect

Definicija. Funktor $\boldsymbol{V}\colon I \to \mathcal{V}$ je $\aleph_0$-*filtracija* ako je I mala usmjerena kategorija kofinalnosti najviše $\aleph_0$ i vezni morfizmi su monomorfizmi.

Definicija. Funktor $\boldsymbol{V}\colon I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ je $\aleph_0$-*kofiltracija* ako je I mala usmjerena kategorija kofinalnosti najviše $\aleph_0$ i vezni morfizmi su epimorfizmi.

- prirodna poopćenja standardnih pojmova filtracije i padajuće filtracije (ekvivalentno kofiltracije)
- objekti kategorija $\mathrm{Ind}^{s}_{\aleph_0}\mathcal{V}$ odnosno $\mathrm{Pro}^{s}_{\aleph_0}\mathcal{V}$
- Zašto $\aleph_0$? Zašto monomorfizmi i epimorfizmi?

Definicija. *Filtrirani* (odnosno *kofiltrirani*) *vektorski prostor* je vektorski prostor V zajedno s $\aleph_0$-filtracijom (odnosno $\aleph_0$-kofiltracijom) $\boldsymbol{V}$ u Vect takvom da je $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ (odnosno $V \cong \lim \boldsymbol{V}$) u Vect.

Morfizmi kategorija indVect i proVect

Definicija. *Morfizam filtriranih vektorskih prostora* iz $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ u $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ je svako linearno preslikavanje $f\colon V \to W$ takvo da je

$$(\forall i \in I)(\exists j \in J)(\exists f_{ji}\colon V_i \to W_j)(f \circ \iota_i^V = \iota_j^W \circ f_{ji}).$$

Definicija. *Morfizam kofiltriranih vektorskih prostora* iz $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ u $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ je svako linearno preslikavanje $f\colon V \to W$ takvo da je

$$(\forall j \in J)(\exists i \in I)(\exists f_{ji}\colon V_i \to W_j)(f_{ji} \circ \pi_i^V = \pi_j^W \circ f).$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ V_i \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_{ji}"] & W_j \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & W \arrow[d, two heads] \\ V_i \arrow[r, "f_{ji}"] & W_j \end{tikzcd}$$

Dualne potkategorije Grothendieckovih kategorija

Teoremi.

- Kategorija $\mathrm{indVect}$ ekvivalentna je kategoriji strogih ind-objekata kofinalnosti najviše $\aleph_0$ u kategoriji Vect,

$$\mathrm{indVect} \cong \mathrm{Ind}^{s}_{\aleph_0}\mathrm{Vect}.$$

- Kategorija $\mathrm{proVect}$ ekvivalentna je kategoriji strogih pro-objekata kofinalnosti najviše $\aleph_0$ u kategoriji Vect,

$$\mathrm{proVect} \cong \mathrm{Pro}^{s}_{\aleph_0}\mathrm{Vect}.$$

- Kategorije $\mathrm{indVect}$ i $\mathrm{proVect}$ su dualne.

$\leftsquigarrow$ Teoremi ne vrijede ako:
  - nisu injekcije $A_n \hookrightarrow A$ kod filtracija i surjekcije $H \twoheadrightarrow H_k$ kod kofiltracija.
  - nije kofinalnost najviše $\aleph_0$. Možda vrijede bez tog ograničenja ako umjesto Vect uzmemo $\mathrm{VectFin}$.

Kategorija indproVect

Definicija. *Filtrirano-kofiltrirani vektorski prostor* je vektorski prostor V zajedno s $\aleph_0$-filtracijom $\boldsymbol{V}$ u $\mathrm{proVect}$ takvom da je $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ u Vect.

$\leftsquigarrow$ Dobra je: Propozicija. mono u $\mathrm{proVect} \Rightarrow$ injekcija u Vect.

Definicija. *Morfizam filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora* je svako linearno preslikavanje $f\colon V \to W$ takvo da

$$(\forall i \in I)(\exists j \in J)(\exists f_{ji}\colon V_i \to W_j \text{ u } \mathrm{proVect})(f \circ \iota_i^V = \iota_j^W \circ f_{ji}).$$

Teorem. (Potkategorija Grothendieckove kategorije.)

▸ Kategorija $\mathrm{indproVect}$ ekvivalentna je kategoriji strogih ind-pro-objekata kofinalnosti najviše $\aleph_0$ u kategoriji Vect,

$$\mathrm{indproVect} \cong \mathrm{Ind}^{s}_{\aleph_0}\mathrm{Pro}^{s}_{\aleph_0}\mathrm{Vect}.$$

$\leftsquigarrow$ Poslije dublji razlozi toga: Teorem. $\mathrm{proVect}$ ima kolimese i Teorem. Filtrirani kolimes u $\mathrm{proVect}$ je kolimes u Vect.

Tenzorski produkt, formalne sume i formalne baze

Tenzorski produkt je lako definirati podižući ga

- u $\mathrm{indVect}$ s filtracija: $V \otimes W = \operatorname{colim} \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$
- u $\mathrm{proVect}$ s kofiltracija: $V \hat{\otimes} W = \lim \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$
- u $\mathrm{indproVect}$ s filtracija kofiltracija: $V \tilde{\otimes} W = \operatorname{colim} \boldsymbol{V} \hat{\otimes} \boldsymbol{W}$.

Prednosti nad ind-pro-objektima: konkretne kategorije.

♪ Formalne sume u $\mathrm{proVect}$. ♫ Formalne baze u $\mathrm{proVect}$.

Propozicije.

- Kategorije $(\mathrm{indVectFin}, \otimes, k)$ i $(\mathrm{proVectFin}, \hat{\otimes}, k)$ su dualne.
- Morfizmi u $\mathrm{proVect}$ = oni koji distribuiraju po formalnim sumama.
- Ako je $\{D_\alpha\}_\alpha$ filtrirana baza od V u $\mathrm{indVectFin} \rightsquigarrow$ dualni funkcionali $\{e_\alpha\}_\alpha$ čine formalnu bazu od V^* u $\mathrm{proVectFin}$.

Primjeri. $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^* \sharp \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, Heisenbergova udvojenja Hopfovih algebri filtriranih konačno-dimezionalnim komponentama, ...

Komutiranje tenzorskog produkta s koujednačiteljima

Propozicija 1. (Koujednačitelj u $\mathrm{proVect}$.)

- Kategorija $\mathrm{proVect}$ ima koujednačitelje. Koujednačitelji u $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ komutiraju s tenzorskim produktom.

Propozicija 2. (Potpuni potprostori i kvocijenti u $\mathrm{proVect}$.)

- Potprostor je potpun ako i samo ako sadrži vrijednosti svih formalnih suma. Kvocijent po potpunom potprostoru je objekt u $\mathrm{proVect}$ i kvocijentno preslikavanje je morfizam u $\mathrm{proVect}$.

Propozicija 3. (Koprodukt u $\mathrm{proVect}$.)

- Kategorija $\mathrm{proVect}$ ima koprodukte. Opis koprodukta u $\mathrm{proVect}$.

Skica dokaza. Postojanje: koristi ekvivalenciju s kategorijom kofiltracija $\mathrm{Pro}^{s}_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$. Opis: koristi pojam formalnih suma i propozicije o vezi upotpunjenja (i potpunosti) vektorskog prostora s formalnim sumama, te gornji opis kofiltracije.

Teorem 4. (Filtrirani kolimes u $\mathrm{proVect}$.)
- Kategorija $\mathrm{proVect}$ ima kolimese. Opis filtriranog kolimesa u $\mathrm{proVect}$.

Skica dokaza. Složen dokaz. ...

Teorem 5. (Postojanje koujednačitelja u $\mathrm{indproVect}$.)
- U kategoriji $\mathrm{indproVect}$ postoje koujednačitelji.

Skica dokaza. Koristi: postojanje kolimesa u $\mathrm{proVect}$, kvocijentna preslikavanja po potpunim potprostorima u $\mathrm{proVect}$, potpunost jezgri preslikavanja u $\mathrm{proVect}$, ...

Teorem 6. (Komutiranje koujednačitelja s $\tilde{\otimes}$ u $\mathrm{indproVect}$.)
- Koujednačitelji u $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$ komutiraju s tenzorskim produktom.

Skica dokaza. Složen dokaz. ... Koristi: pojam i svojstva formalnih suma, opis filtriranog kolimesa u $\mathrm{proVect}$, ...

Ovo omogućuje definiciju tenzorskog produkta nad bazom.

Unutarnji Hopfov algebroid i skalarno proširenje

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \times_M \mathcal{G} \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, leftarrow, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, leftarrow, shift right=2] \arrow[r, shift right=4] & \mathcal{G} \arrow[loop above] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] & M \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{G} \times_M \mathcal{G}) \cong \mathrm{Fun}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathrm{Fun}(M)} \mathrm{Fun}(\mathcal{G}) = \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H} \arrow[r, leftarrow, shift left=4] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, leftarrow, shift right=4] & \mathcal{H} \arrow[loop above] \arrow[r, leftarrow, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, leftarrow, shift right=2] & A \end{tikzcd}$$

3. Unutarnji Hopfov algebroid i skalarno proširenje
   - Hopfovi algebroidi, motivacija i definicija
   - Unutarnji bialgebroid Gabrielle Böhm
   - Definicija unutarnjeg Hopfovog algebroida
   - Skalarna proširenja Lu, Brzezińskog i Militaru
   - Teorem o unutarnjem skalarnom proširenju

Hopfovi algebroidi, motivacija i definicija

Funkcije na grupi G = (komutativna) Hopfova algebra H, funkcije na grupoidu $\mathcal{G}$ = (komutativni) Hopfov algebroid $\mathcal{H}$.

Općenite Hopfove algebre i Hopfovi algebroidi = funkcije na prostorima s nekomutativnim koordinatama (sa strukturom 'grupe' ili 'grupoida') = kvantna grupa, kvantni grupoid.

Kompleksnije je:

- Koprodukt $\Delta\colon H \to H \otimes H$ postaje koprodukt $\Delta\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}$. Ako A nije komutativna, $\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}$ nije algebra – problem s definicijom multiplikativnosti koprodukta... Takeuchijev produkt.
- Jedinica $\eta\colon k \to H$ postaje lijeva jedinica $\alpha\colon A \to \mathcal{H}$ i desna jedinica $\beta\colon A \to \mathcal{H}$.
- Puno su kompleksniji aksiomi: lijevi bialgebroid, desni bialgebroid i antipod. Lu, Day & Street, ... , Gabi Böhm.

Unutarnji bialgebroid Gabrielle Böhm

Moderna definicija Hopfovog algebroida: Gabriella Böhm, Handbook of Algebra.

bialgebra H nad k	(lijevi) bialgebroid $\mathcal{H}$ nad A
$\mu\colon H\otimes H\to H$	$\mu\colon \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\to\mathcal{H}$
$\eta\colon k\to H$	$\alpha\colon A\to\mathcal{H},\ \beta\colon A^{\mathrm{op}}\to\mathcal{H}$
$\Delta\colon H\to H\otimes H$	$\Delta\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}\otimes_A\mathcal{H}$
$\epsilon\colon H\to k$	$\epsilon\colon\mathcal{H}\to A$
Hopfova algebra nad k	Hopfov algebroid $\mathcal{H}$ nad A
$(H,\mu,\eta,\Delta,\epsilon)$	$\mathcal{H}_L=(\mathcal{H},\mu,\alpha_L,\beta_L,\Delta_L,\epsilon_L)$
zajedno s	$\mathcal{H}_R=(\mathcal{H},\mu,\alpha_R,\beta_R,\Delta_R,\epsilon_R)$
$S\colon H^{\mathrm{op}}\to H$	$\mathcal{S}\colon\mathcal{H}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{H}$

U simetričnoj monoidalnoj kategoriji s koujednačiteljima koji komutiraju s monoidalnim produktom Gabriella Böhm definira unutarnji bialgebroid. Komplikacija: Takeuchijev produkt – zamijenjen je s djelovanjima ρ i λ. Nema elemenata – dijagrami.

Definicija unutarnjeg Hopfovog algebroida

Razraditi Gabinu definiciju unutarnjeg lijevog bialgebroida i desnog bialgebroida, pomoću djelovanja ρ i λ.

$$(H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \overset{\rho}{\dashrightarrow} (H \otimes_L H)$$

$$\begin{tikzcd}
H \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\pi"] \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & H \otimes (H \otimes_L H) \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\
(H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\rho"] & (H \otimes_L H)
\end{tikzcd}$$

Definicija. Unutarnji Hopfov algebroid $(\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, \mathcal{S})$ u simetričnoj monoidalnoj kategoriji s koujednačiteljima koji komutiraju s monoidalnim produktom.

Sljedeća svojstva koprodukata Δ_L i Δ_R su potrebna za dobru definiranost.

Propozicija. Δ_L je morfizam R-bimodula ${}_R\mathcal{H}_R$. Analogno za Δ_R.

Skalarna proširenja Lu, Brzezińskog i Militaru

Teorem. (Lu) Kvantni transformacijski grupoid.

- Ako je A pleteničasto-komutativna modulna algebra nad Drinfeldovim udvojenjem $\mathcal{D}(H)$ konačno-dimenzionalne Hopfove algebre H, onda je $H\sharp A$ Hopfov algebroid nad A.

O dokazu. Luina definicija Hopfovog algebroida. Konačna dimenzionalnost. Koristi kanonske elemente: $\{a_s\}$ baza za A, $\{x_s\}$ dualna baza za A^*, $\beta(a) = \sum_t x_t S^{-1}(x_s) \otimes a_s a a_t$.

Teorem. (Brzeziński, Militaru) Skalarno proširenje.

- Ako je A pleteničasto-komutativna YD-modulna algebra nad Hopfovom algebrom H, onda je $H\sharp A$ Hopfov algebroid nad A.

O dokazu. Luina definicija Hopfovog algebroida. Propust u dokazu: nije dokazano da je antipod antihomomorfizam. Nije jasno da li se dokaz može popraviti ako antipod $S\colon A^{op} \to A$ nije bijektivan.

Teorem o unutarnjem skalarnom proširenju

Teorem. (Unutarnje skalarno proširenje u indproVect.)

- Ako je A pleteničasto-komutativna YD-modulna algebra nad Hopfovom algebrom H s bijektivnim antipodom, onda je $H\sharp A$ Hopfov algebroid nad A.

Skica dokaza. Geometrija: za $\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R)^* = J^\infty(G,e)^{\mathrm{co}} =: H$ je

$$H\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{g}^L)\sharp H \cong \mathrm{Diff}^\omega(G,e).$$

- $\mathcal{H}_L = L\sharp H$ je lijepi lijevi bialgebroid nad L, $\mathrm{U}(\mathfrak{g}^L)\sharp H$, $\mathcal{H}_R = H\sharp R$ je lijepi desni bialgebroid nad R, $H\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R)$,
- izomorfizam algebri $\Phi\colon \mathcal{H}_L \to \mathcal{H}_R$, formula je određena iz geometrijskog primjera,
- antipod $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ je antihomomorfizam (nadopuna dokaza od B-M: teško, koristeći izomorfizam Φ: lagano).

Apstraktna Sweedlerova notacija. Dokaz zapravo vrijedi za općenite monoidalne kategorije s potrebnim svojstvima.

HEISENBERGOVA UDVOJENJA FILTRIRANIH HOPFOVIH ALGEBRI I POOPĆENJA

Proučavamo sparivanja $A \tilde{\otimes} H \to k$ koja su nedegenerirana u varijabli u H, dakle po kojima je $H \hookrightarrow A^*$. Pitanje je:

Kada je A nad H pleteničasto-komutativna YD-modulna algebra u $\mathrm{indproVect}$, pa onda i $H \sharp A$ Hopfov algebroid nad A?

Je li $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ nad $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^*$ pleteničasto-komutativna YD-modulna algebra u $\mathrm{indproVect}$?

4. HEISENBERGOVA UDVOJENJA FILTRIRANIH HOPFOVIH ALGEBRI I POOPĆENJA

- Kanonski elementi i reprezentacije
- Teorem o Yetter-Drinfeldovoj modulnoj algebri
- Teorem s kanonskim elementima za A iz $\mathrm{indVectFin}$
- Teorem s anihilatorima za A iz $\mathrm{indVect}$ i H iz $\mathrm{proVect}$

Kanonski elementi i reprezentacije

♪ Djelovanje $H\tilde{\otimes}A$ na A (zdesna).

$$\mathcal{S}_1 : H\tilde{\otimes}A \to \mathrm{Hom}(A,A)$$

$$\mathcal{S}_1(\textstyle\sum_\lambda h_\lambda \otimes a_\lambda) : b \mapsto \sum_\lambda \langle b, h_\lambda\rangle a_\lambda$$

Kanonski element $\mathcal{K}$ takav da $\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{K} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(A,A)}$.

$$\mathcal{K} : \mathrm{Hom}(A,A) \to A^* \hat{\otimes} A$$

$$\mathcal{K}(\phi) = \textstyle\sum_\alpha e_\alpha \sharp \phi(x_\alpha)$$

♫ Djelovanje $H\sharp A$ na A (zdesna).

$$\mathcal{T}_1 : H\tilde{\otimes}A \to \mathrm{Hom}(A,A)$$

$$\mathcal{T}_1(\textstyle\sum_\lambda h_\lambda \otimes a_\lambda) : b \mapsto \sum_\lambda (b \blacktriangleleft h_\lambda) a_\lambda$$

Kanonski element $\mathcal{L}$ takav da je $\hat{\mathcal{T}}_1 \circ \mathcal{L} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(A,A)}$.

$$\mathcal{L} : \mathrm{Hom}(A,A) \to A^* \hat{\otimes} A$$

$$\mathcal{L}(\phi) = \textstyle\sum_{\alpha,\beta} e_\beta S^{-1}(e_\alpha) \sharp x_\alpha \phi(x_\beta)$$

Za $\mathcal{L}(\phi)$ Hopfova algebra A mora imati bijektivan antipod S.

Teorem o Yetter-Drinfeldovoj modulnoj algebri

Teorem 1. (O Yetter-Drinfeldovoj modulnoj algebri.)

▸ Neka su A i H u Hopfovom sparivanju u indproVect koje je nedegenerirano u varijabli u H. Neka je $\mathcal{T}_2$ injekcija,

$$\mathcal{T}_2\colon H\tilde{\otimes}H\tilde{\otimes}A\to\mathrm{Hom}(A\tilde{\otimes}A,A)$$

$$\mathcal{T}_2(\textstyle\sum_\lambda h_\lambda\otimes h'_\lambda\otimes a_\lambda)\colon b\otimes b'\mapsto\sum_\lambda(b\blacktriangleleft h_\lambda)(b'\blacktriangleleft h'_\lambda)a_\lambda$$

Tada je A nad H pleteničasto-komutativna YD-modulna algebra uz sparivanjem definirano djelovanje ako i samo ako postoji $\rho\colon A\to H\tilde{\otimes}A$ takav da je $x\blacktriangleleft\rho(a)=ax$.

Skica dokaza. Tada je $\mathcal{T}_1$ također injekcija. Djelovanjem lijeve i desne strane jednakosti aksioma na proizvoljan element od $A\tilde{\otimes}A$ odnosno A dokazujemo tu jednakost. Za dokaz da je ρ kodjelovanje koristimo $\mathcal{T}_2$, a za dokaz YD uvjeta i da je A algebra koristimo $\mathcal{T}_1$. Npr. YD uvjet je u $H\tilde{\otimes}A$,

$$\sum h_{(2)}(a\blacktriangleleft h_{(1)})_{[-1]}\otimes(a\blacktriangleleft h_{(1)})_{[0]}=\sum a_{[-1]}h_{(1)}\otimes(a_{[0]}\blacktriangleleft h_{(2)}).$$

Teorem s kanonskim elementima za A iz indVectFin

$$\mathcal{K}(\phi) = \sum_\alpha e_\alpha \otimes \phi(x_\alpha)$$
$$\mathcal{L}(\phi) = \sum_{\alpha,\beta} e_\beta S^{-1}(e_\alpha) \otimes x_\alpha \phi(x_\beta)$$

Za $\phi_a \colon x \mapsto ax$ znamo $x \hat{\blacktriangleleft} \mathcal{L}(\phi_a) = ax$. Ozn. $\mathrm{Lu}(a) := \mathcal{L}(\phi_a)$.

Da li je $\mathcal{T}_2$ injekcija i kada je $\mathrm{Lu}(A) \subseteq A^* \sharp A$?

Teorem 2. (Heisenbergovo udvojenje od A iz indVectFin.)

- Neka je A iz indVectFin s bijektivnim antipodom. Tada je A nad A^* pleteničasto-komutativna YD-modulna algebra uz sparivanjem definirano djelovanje ako i samo ako su adjungirane orbite od A konačno-dimenzionalne.

Skica dokaza. Znamo $\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{K} = \mathrm{id}$ i $\hat{\mathcal{T}}_1 \circ \mathcal{L} = \mathrm{id}$. **Propozicije.**

- $\mathcal{S}_0$ injekcija $\Rightarrow \mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ su injekcije. Slično su $\hat{\mathcal{S}}_1$ i $\hat{\mathcal{S}}_2$ injekcije.
- $\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{L} \colon \phi_a \mapsto \mathrm{ad}_{S^{-1}(a)}$ za $\phi_a \colon x \mapsto ax$. Slijedi da je $\hat{\mathcal{S}}_1$ bijekcija.

$\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ su bijekcije pa su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ injekcije. Iz ad uvjet s orbitama.

Teorem s kanonskim elementima za A iz indVectFin

Teorem 3. (Za A iz indVectFin i H iz proVect.)
- Neka je A iz indVectFin s bijektivnim antipodom i H iz proVect u Hopfovom sparivanju u indproVect koje je nedegenerirano u varijabli u H. Tada je A nad H pleteničasto-komutativna YD-modulna algebra (uz sparivanjem inducirano djelovanje) ako i samo ako je $\mathrm{Lu}(A) \subseteq H\sharp A$.

Primjena. Ako je $\mathrm{Lu}(A) \subseteq A^*\sharp A$, postoji najmanja Hopfova podalgebra $A^{min} \subseteq A^*$ koja sadrži sve potrebne funkcionale takve da je $\mathrm{Lu}(A) \subseteq A^{min}\sharp A$. Tada teorem vrijedi za sve H za koje je $A^{min} \subseteq H$.

- Za $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ smo eksplicitno odredili tu minimalnu podalgebru. Primjeri $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{min}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^\circ\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^*\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.
- Za $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ nismo eksplicitno, ali možda je moguće uz bolje znanje o q-binomnim koeficijentima. $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*\sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Teorem s anihilatorima za A iz $\mathrm{indVect}$ i H iz $\mathrm{proVect}$

Teorem 4. (Za A iz $\mathrm{indVect}$ i H iz $\mathrm{proVect}$.)

- Neka su A iz $\mathrm{indVect}$ i H iz $\mathrm{proVect}$ u Hopfovom sparivanju u $\mathrm{indproVect}$ koje je nedegenerirano u varijabli u H. Neka Δ_A ima svojstvo $\Delta_A(a) - a \otimes 1 \in A_{n-1} \otimes A$ za $a \in A_n$ i $A_0 \cong k$. Tada je A nad H pleteničasto-komutativna YD-modulna algebra (uz sparivanjem inducirano djelovanje) ako i samo ako postoji $\rho \colon A \to H\sharp A$ takav da je $x \blacktriangleleft \rho(a) = ax$.

Skica dokaza. Treba dokazati da je $\mathcal{T}_2$ injekcija bez kanonskih elemenata. Za $t \in H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} A_n$, $t \neq 0$, neka je (k, l) minimalan takav da postoji $d \in A_k \hat{\otimes} A_l$ za koji je $\mathcal{S}_2(t)(d) \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
A_k \hat{\otimes} A_l \hat{\otimes} H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} A_n \arrow[rr, "(\mathcal{T}_2)"] \arrow[d, dashed, two heads] & & A_m \arrow[d, equal] \\
A_k \hat{\otimes} A_l \hat{\otimes} H/\operatorname{Anih}(A_k) \hat{\otimes} H/\operatorname{Anih}(A_l) \hat{\otimes} A_n \arrow[rr, "(\mathcal{T}_2 \sim \mathcal{S}_2)"] & & A_m
\end{tikzcd}$$

Primjeri

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{min}\sharp \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & \mathrm{U}(\mathfrak{g})^\circ\sharp \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & \mathrm{U}(\mathfrak{g})^*\sharp \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \\
\mathcal{O}^{min}(G)\sharp \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[u, two heads] & \mathrm{U}(\mathfrak{g})\sharp\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*) \arrow[ur, dashed, leftrightarrow] & U_q(\mathfrak{sl}_2)^*\sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)
\end{tikzcd}$$

5. Primjeri

- Heisenbergovo udvojenje $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^*\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$
- Nekomutativni fazni prostor $\mathrm{U}(\mathfrak{g})\sharp\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)$
- Minimalno skalarno proširenje $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{min}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$
- Reducirano Heisenbergovo udvojenje $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^\circ\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$
- Minimalna algebra $\mathcal{O}^{min}(G)\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ diferencijalnih operatora
- Algebra $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$
- Heisenbergovo udvojenje $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*\sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)$ za q korijen iz 1

Heisenbergovo udvojenje $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^*\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$

Propozicija. Adjungirane orbite su konačno-dimenzionalne.

Sada po Teoremu 2 & Teoremu o skalarnom proširenju: $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^*\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ je Hopfov algebroid nad $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ u $\mathrm{indproVect}$.

To je algebra formalnih diferencijalnih operatora na okolini jedinice Liejeve grupe G:

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R)^*\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R) \cong J^\infty(G,e)^{\mathrm{co}}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R) \cong \mathrm{Diff}^\omega(G,e)$$

$$H\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{g}^L)\sharp H \cong \mathrm{Diff}^\omega(G,e)$$

Neka je $X_1,\ldots,X_n$ baza od $\mathfrak{g}^L$, te neka su $Y_1,\ldots,Y_n$ u $\mathfrak{g}^R$ takvi da je $(Y_\alpha)_e = (X_\alpha)_e$. Tada je $L = \mathrm{U}(\mathfrak{g}^L)$, $R = \mathrm{U}(\mathfrak{g}^R)$ i imamo

$$\begin{aligned} \alpha_L(X_\alpha) &= X_\alpha & \alpha_R(Y_\alpha) &= Y_\alpha \\ \beta_L(X_\alpha) &= Y_\alpha + \textstyle\sum_\beta C^\beta_{\alpha\beta} & \beta_R(Y_\alpha) &= X_\alpha = \textstyle\sum_\beta \mathcal{O}^\beta_\alpha \sharp Y_\beta \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}(X_\alpha) = Y_\alpha, \;\; \mathcal{S}(f) = Sf$$

Nekomutativni fazni prostor $\mathrm{U}(\mathfrak{g})\sharp\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)$

To je algebra suprotna algebri $\mathrm{Diff}^\omega(G,e)$:

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}^L)\sharp\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*) \cong (\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{co}}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R))^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Diff}^\omega(G,e)^{\mathrm{op}}$$

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}^L)\sharp\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*) \cong \hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R)$$

Neka je $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n$ baza od $\mathfrak{g}^L$, te neka su $\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_n$ u $\mathfrak{g}^R$ takvi da je $(\hat{y}_\alpha)_e = (\hat{x}_\alpha)_e$. To su nekomutativne koordinate, a

$$\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*) \cong k[[\hat{\partial}_1,\ldots,\hat{\partial}_n]]$$

ima koprodukt dualan produktu na $\mathrm{U}(\mathfrak{g}^L) = L$. Uz $\mathrm{U}(\mathfrak{g}^R) = R$,

$$\begin{aligned}
\alpha_L(\hat{x}_\alpha) &= \hat{x}_\alpha & \alpha_R(\hat{y}_\alpha) &= \hat{y}_\alpha \\
\beta_L(\hat{x}_\alpha) = \hat{y}_\alpha &= \textstyle\sum_\beta \hat{x}_\beta\sharp\mathcal{O}^\beta_\alpha & \beta_R(\hat{y}_\alpha) &= \hat{x}_\alpha - \textstyle\sum_\beta C^\beta_{\alpha\beta} \\
\mathcal{S}(\hat{y}_\alpha) &= \hat{x}_\alpha & \mathcal{S}(\hat{\partial}_\alpha) &= -\hat{\partial}_\alpha \\
\hat{\partial}_\alpha \blacktriangleright \hat{x}_\beta = \delta_{\alpha\beta},\ \ \hat{y}_\alpha \blacktriangleright \hat{x}_\beta &= \hat{x}_\beta\hat{x}_\alpha & \hat{\partial}_{\alpha_1\cdots\alpha_s} &= \hat{\partial}_{\alpha_1}\cdots\hat{\partial}_{\alpha_s} + def.
\end{aligned}$$

Matrica $\mathcal{O} = \exp\mathcal{C}$, gdje je $\mathcal{C}^\alpha_\beta = \sum_\sigma C^\alpha_{\beta\sigma}\hat{\partial}^\sigma$.

Primjeri $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{min}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ i $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\circ}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$

Propozicija. Najmanja Hopfova podalgebra $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{min} \subseteq \mathrm{U}(\mathfrak{g})^*$ takva da je $\mathrm{Lu}(\mathrm{U}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{min}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ generirana je s $\bar{\mathcal{U}}^{\alpha}_{\beta}, \mathcal{U}^{\alpha}_{\beta}$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$ i vrijedi:

$$\textstyle\sum_\sigma \mathcal{U}^{\alpha}_{\sigma}\bar{\mathcal{U}}^{\sigma}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} = \sum_\sigma \bar{\mathcal{U}}^{\alpha}_{\sigma}\mathcal{U}^{\sigma}_{\beta}$$

$$\Delta(\mathcal{U}^{\alpha}_{\beta}) = \textstyle\sum_\sigma \mathcal{U}^{\alpha}_{\sigma} \otimes \mathcal{U}^{\sigma}_{\beta}, \quad \Delta(\bar{\mathcal{U}}^{\alpha}_{\beta}) = \sum_k \bar{\mathcal{U}}^{\sigma}_{\beta} \otimes \bar{\mathcal{U}}^{\alpha}_{\sigma}$$

$$\epsilon(\mathcal{U}^{\alpha}_{\beta}) = \delta^{\alpha}_{\beta} = \epsilon(\bar{\mathcal{U}}^{\alpha}_{\beta})$$

$$S(\mathcal{U}^{\alpha}_{\beta}) = \bar{\mathcal{U}}^{\alpha}_{\beta}, \quad S(\bar{\mathcal{U}}^{\alpha}_{\beta}) = \mathcal{U}^{\alpha}_{\beta}$$

$$\langle X_\gamma, \mathcal{U}^{\alpha}_{\beta}\rangle = C^{\alpha}_{\gamma\beta}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma,\tau} C^{\alpha}_{\sigma\tau}\mathcal{U}^{\sigma}_{\beta}\mathcal{U}^{\tau}_{\gamma} = \sum_\rho \mathcal{U}^{\alpha}_{\rho} C^{\rho}_{\beta\gamma}, \quad \sum_{\sigma,\tau} C^{\alpha}_{\sigma\tau}\bar{\mathcal{U}}^{\sigma}_{\beta}\bar{\mathcal{U}}^{\tau}_{\gamma} = \sum_\rho \bar{\mathcal{U}}^{\alpha}_{\rho} C^{\rho}_{\beta\gamma}$$

Generatori su dobiveni računajući $\mathrm{Lu}(X_1), \dots, \mathrm{Lu}(X_n)$:

$$\mathrm{Lu}(X_\alpha) = \textstyle\sum_\beta \bar{\mathcal{U}}^{\beta}_{\alpha}\sharp X_\beta \quad \dots \quad \bar{\mathcal{U}} = \exp\tilde{\mathcal{C}}_n \cdots \exp\tilde{\mathcal{C}}_1, \ (\tilde{\mathcal{C}}_\sigma)^{\alpha}_{\beta} = C^{\alpha}_{\beta\sigma} e_{X_\sigma}.$$

Slijedi: $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{min}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\circ}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{*}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ su HA.

Algebre $\mathcal{O}^{min}(G)\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$

Sve formule za komponente matrica $\mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}}$ vrijede za komponente matrica $\mathcal{O} = \mathrm{Ad}$, $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}^{-1}$.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] \arrow[dr, dashed] & GL(\mathfrak{g}) \\
& \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(G) & \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g})) \arrow[l, "-\circ\mathrm{Ad}"'] \arrow[d, two heads] \\
& \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}
$$

Propozicija. Algebre $\mathcal{O}^{min}(G)\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ su Hopfovi algebroidi nad $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Skica dokaza. Potpuno algebarski iz generatora i relacija.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{U}(\mathfrak{g})^*\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}) & \mathcal{O}(G)\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[l, dashed] & \\
\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{min}\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[u, hook] & \mathcal{O}^{min}(G)\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[l, two heads] \arrow[u, hook, dashed] & \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[l, two heads] \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}
$$

$$\mathrm{Lu}(X_\alpha) = \sum_\beta \bar{\mathcal{O}}^\beta_\alpha \sharp X_\beta$$

Primjer $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*\sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)$ za q korijen iz jedinice

Propozicija. Adjungirane orbite su konačno-dimenzionalne.

Skica dokaza. Izračuna se

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}'_K(E^nF^mK^r) &= q^{-2n+2m}E^nF^mK^r \\
\mathrm{ad}'_E(E^nF^mK^r) &= q^{-2-2n+2m}(q^{2r}-1)E^{n+1}F^mK^{r-1}+ \\
&\quad +\frac{q^{-1-2n+2m+2r}}{(q-q^{-1})^2}(q^{-2m}-1)E^nF^{m-1}K^r+ \\
&\quad +\frac{q^{-1-2n+2m+2r}}{(q-q^{-1})^2}(q^{2m}-1)E^nF^{m-1}K^{r-2} \\
\mathrm{ad}'_E(E^nK^r) &= q^{-2-2n}(q^{2r}-1)E^{n+1}K^{r-1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Kombinatorikom s eksponentima koristeći $q^d=1$ dobije se da je $\mathrm{ad}'_{E^NF^MK^R}(E^nF^mK^r)=0$ čim je $M>(n+1)e$ ili $N>me+(n+1)e^2$, gdje je e najmanji takav da je $q^{2e}=1$.

Napomena. Ako q nije korijen iz jedinice, tvrdnja ne vrijedi. Možda tvrdnja vrijedi općenitije za $U_q(\mathfrak{sl}_n)$.

Hvala!