

Konstruktivne metode u geometriji

1. Metoda presjeka

- (P) Konstruirajte paralelogram $ABCD$ ako je zadan kut $\alpha = \sphericalangle DAB$, duljina $d = |AB| + |BC|$ te duljina v visine na \overline{AB} .
1. Konstruirajte trokut ABC kojemu je duljina stranice \overline{AB} jednaka c , duljina težišnice iz vrha C jednaka t_c i mjera kuta u vrhu C jednaka γ , $\gamma < 90^\circ$.
 2. Konstruirajte trokut ABC ako je dana duljina c stranice \overline{AB} , duljina t_c pripadne težišnice i omjer $p : q$ duljina stranica \overline{AC} i \overline{BC} , $p > q$.
 3. Konstruirajte kružnicu koja dodiruje dva dana paralelna pravca i danu kružnicu.
 4. Konstruirajte kružnicu danog radijusa r koja dira danu kružnicu k_1 i s danom kružnicom k_2 ima zajedničku tetivu dane duljine d .
 5. Dana je točka A na pravcu a i točka P izvan pravca a . Konstruirajte kružnicu koja prolazi točkom P i dira pravac a u točki A .

2. Algebarska metoda

- (P) Dane su dužine duljina a , b , c i d . Konstruirajte dužinu duljine $\sqrt{a^4 - b^4}$ i dužinu duljine $\frac{a^3 b^2}{c^2 d^2}$.
- (P) Dani su paralelni pravci a , b i c . Konstruirajte jednakostranični trokut ABC tako da je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$.
- (P) U dani kut upišite kružnicu koja prolazi danom točkom P i dira krakove kuta.
1. Dane su dvije koncentrične kružnice. Konstruirajte krug čija je površina jednaka površini prstena koji određuju te dvije kružnice.
 2. Dan je trokut. Konstruirajte kvadrat iste površine.
 3. Povucite paralelu s osnovicom trokuta koja taj trokut dijeli na dva dijela jednakih površina.
 4. Dane su dužine duljina a i b . Konstruirajte kut ϕ takav da vrijedi $\cos \phi = \frac{\sqrt{3a^2 - 2b^2}}{2a}$.
- (Z) Dane su dužine duljina a i b . Konstruirajte dužine duljina $a\sqrt{35}$, $\sqrt{a^2 + 2ab + 3b^2}$, $\frac{4}{\sqrt{3}}a$.
5. Dan je trokut ABC . Oko njegovih vrhova opišite kružnice koje se u parovima dodiruju izvana.

3. Osnna simetrija i centralna simetrija

1. Dan je pravac p i točke B i C s iste strane tog pravca. Konstruirajte točku A na pravcu p tako da polupravci AB i AC tvore jednake kutove s pravcem p .
2. Dan je pravac p i točke B i C s iste strane tog pravca. Konstruirajte točku A na pravcu p tako da je $\sphericalangle(AB, p) = 2\sphericalangle(AC, p)$.
3. Dani su pravci a , b i c koji prolaze točkom O . Konstruirajte trokut ABC tako da su mu dani pravci simetrale kutova.
4. Konstruirajte četverokut $ABCD$ kojemu dijagonala AC raspolavlja kut u vrhu A ako su mu dane duljine stranica $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$.
5. Dana je kružnica k , točka A i pravac p . Konstruirajte pravac q koji prolazi točkom A te siječe kružnicu k i pravac p u točkama B i C tako da je A polovište dužine \overline{BC} .
6. Dane su kružnice k_1 i k_2 sa zajedničkom točkom A . Kroz A konstruirajte pravac p kojemu tetive u kružnicama k_1 i k_2 imaju jednake duljine.

4. Translacija i rotacija, klizna simetrija

1. Dane su kružnice k_1 i k_2 , pravac p i dužina duljine a . Konstruirajte pravac paralelan s p tako za sjecišta A i B tog pravca s kružnicama k_1 i k_2 vrijedi $|AB| = a$.
2. Na različitim stranama rijeke (s paralelnim obalama) nalaze se mjesta A i B . Gdje treba sagraditi most preko rijeke (okomito na obale) tako da put od naselja A do naselja B bude najkraći?
3. Dane su kružnice k_1 i k_2 te pravac p . Konstruirajte pravac paralelan s p tako da su tetive kružnica k_1 i k_2 određene tim pravcem jednakih duljina.
4. Dani su paralelni pravci a , b i c . Konstruirajte jednakostranični trokut ABC tako da je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$.
5. Zadane su točke S , K i L . Konstruirajte kvadrat kojemu je S središte, a pravci na kojima mu leže dvije susjedne stranice prolaze točkama K i L .
6. Dan je pravac p , točke A i B s iste strane toga pravca i dužina duljine a . Na pravcu p konstruirajte točke C i D tako da je $|CD| = a$ i da je zbroj duljina $|AC| + |CD| + |DB|$ najmanji mogući.

5. Homotetija

1. U dani trokut ABC upišite trokut DEF tako da je $D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{CA}$, $F \in \overline{AB}$ i da su stranice \overline{EF} , \overline{FD} i \overline{DE} redom paralelne danim pravcima d , e i f .
2. Konstruirajte kružnicu koja prolazi danom točkom A i dira dva dana pravca b i c .
3. U zadani trokut ABC upišite kvadrat kojemu dva susjedna vrha leže na stranici BC , a po jedan vrh na stranicama \overline{AB} i \overline{AC} .
4. Konstruirajte trokut kojemu su dani kutovi i opseg.
5. Konstruirajte trokut kojemu su zadane duljine visina.

6. Inverzija i Apolonijev problem

1. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku. Konstruirajte njihovu potencijalu.
2. Dana je $k(O, r)$ i točka A . Konstruirajte inverznu točku A' točki A s obzirom na kružnicu k .
3. Dan je centar O i par točaka A i A' pridruženih inverzijom i . Konstruirajte sliku dane točke B po toj inverziji.
 - o Slike pravaca i kružnica. Inverzna slika kvadrata upisanog kružnici inverzije.
4. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku. Nađite inverziju koja ih preslikava u dvije koncentrične kružnice.
5. Konstruirajte skup dirališta dviju kružnica koje se diraju pri čemu svaka od tih dviju kružnica dira dane kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku.
6. Konstruirajte kružnicu k koja prolazi danom točkom O , dira danu kružnicu k_1 i ortogonalna je na danu kružnicu k_2 .
 - o Apolonijev problem i problemi srodni Apolonijevom.

7. Projektivna preslikavanja

1. Konstruirajte sliku i prasluku beskonačno dalekog pravca pri perspektivnoj kolineaciji (O, o) . (Slika i prasluka točke je unutar rješenja.)
2. Perspektivna kolineacija određena je s dva para pridruženih točaka, $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, te parom pridruženih pravaca $c \mapsto c'$. Konstruirajte centar i os.
3. Dani su pravci a, b, c sa zajedničkom točkom O i točke K, L, M . Konstruirajte trokut ABC tako da je $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ i pravci BC, CA i AB prolaze redom točkama K, L i M .
4. Dana je perspektivna afinost s osi o i parom pridruženih točaka $T \mapsto T'$. Konstruirajte par okomitih pravaca a, b točkom T koji se preslikavaju u par okomitih pravaca.
5. Pravilnom osmerokutu $ABCDEFGH$ konstruirajte perspektivno afinu sliku ako je pravac AC os afinosti, a točki F je pridružena točka H .

8. Krivulje drugog stupnja

1. Dana je elipsa s fokusima F, F' i velikom osi $2a$ i točka T . Konstruirajte tangente elipse točkom T .
2. Dana je elipsa s fokusima F, F' i velikom osi $2a$ i pravac p . Konstruirajte tangente elipse paralelne s pravcem p .
3. Konstruirajte tangente hiperbole s fokusima F, F' i velikom osi $2a$ iz središta O te hiperbole. Konstruirajte dirališta tih tangenata.
4. Dana je parabola s fokusom F i ravnalicom d i točka T . Konstruirajte tangente parabole točkom T .
5. Dana je parabola s fokusom F i ravnalicom d i pravac p . Konstruirajte tangentu parabole paralelnu s pravcem p .

Krivulje drugog stupnja kao perspektivno kolinearne slike kružnice.

Hiperbola i parabola kao perspektivno kolinearne slike kružnice.

- (P) Zadana je perspektivna kolineacija κ s centrom O , osi o i parom pridruženih točaka $T \mapsto T'$. Odaberite neku kružnicu k tako da je $\kappa(k) = k'$ hiperbola te konstruirajte asimptote i jednu točku te hiperbole.
- (P) Zadane su asimptote OU' i OV' (U i V su u beskonačnosti), točka T hiperbole k' i pravac p' . Konstruirajte sjecište hiperbole k' i pravca p' .

Elipsa kao perspektivno afina slika kružnice.

- (P) Zadana je dužina \overline{AB} i pravac t' koji ju ne siječe. Konstruirajte elipsu kojoj je \overline{AB} jedna os, a t' tangenta. Odredite diralište tangente.
- (P) Dane su osi $\overline{A'B'}$ i $\overline{C'D'}$ elipse k' te pravac p' koji ju siječe. Konstruirajte sjecište pravca p' i elipse k' .
- (P) Zadan je par konjugiranih promjera $\overline{M'N'}$, $\overline{P'Q'}$ elipse. Konstruirajte osi te elipse.

9. Pascalov i Brianchonov teorem

1. Dane su točke A, B, C, D, E od kojih nikoje tri nisu kolinearne i pravac t točkom A . Konstruirajte drugo sjecište pravca t s krivuljom drugog stupnja koja prolazi kroz tih pet točaka.
2. Dane su točke A, B, C, D, E od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Konstruirajte tangentu t u točki A krivulje drugog stupnja određene s tih pet točaka.
3. Dani su pravci a, b, c, d, e od kojih nikoja tri nemaju zajedničku točku i točka T na pravcu a . Konstruirajte tangentu f iz točke T na krivulju drugog stupnja koja dira tih pet pravaca.
4. Dani su pravci a, b, c, d, e od kojih nikoja tri nemaju zajedničku točku. Konstruirajte diralište T pravca a s krivuljom drugog stupnja određenom tangentama a, b, c, d, e .
5. Dani su pravci a, c, d od kojih nijedna dva nisu međusobno paralelna. Konstruirajte diralište pravca a s hiperbolom kojoj su c i d asimptote, a a tangenta.

10. Konstrukcije ograničenim sredstvima

1. Dan je trokut i jedna njegova srednjica. Konstruirajte druge dvije srednjice koristeći samo ravnalo.
2. Dana je kružnica i njen promjer, te točka T . Konstruirajte okomicu iz točke T na promjer kružnice koristeći samo ravnalo.
3. Dane su točke A i B . Koristeći samo šestar konstruirajte točku P kolinearnu s danim točkama takvu da je $|AP| = 4|AB|$ i B se nalazi između A i P .
4. Dane su točke A i B . Koristeći samo šestar konstruirajte polovište dužine \overline{AB} .
5. Koristeći ravnalo konačne duljine l i šestar maksimalnog otvora r konstruirajte dužinu \overline{AB} ako su dane točke A i B udaljene za manje od $2r$ i više od l .
6. Dane su točke A i B udaljene barem d . Dvobridnim ravnalom širine d konstruirajte točku C tako da je B polovište dužine \overline{AC} .
7. Dana je dužina \overline{AB} , njeno polovište P te točka T koja nije na pravcu AB . Konstruirajte paralelu s pravcem AB točkom T koristeći samo ravnalo.
8. Dana su dva paralelna pravca i točke A i B na jednom od njih. Konstruirajte polovište dužine \overline{AB} koristeći samo ravnalo.
9. Dana su dva paralelna pravca i točka T izvan njih. Konstruirajte pravac točkom T paralelan zadanim pravcima koristeći samo ravnalo.
10. Dane su točke A i B . Dvobridnim ravnalom konstruirajte polovište dužine \overline{AB} .
11. Dane su točke A i B i dva pravca paralelna s AB . Konstruirajte točku C tako da je B polovište od \overline{AC} koristeći samo ravnalo.
12. Dani su točka T i pravac p . Konstruirajte paralelu s p točkom T koristeći dvobridno ravnalo.
13. Konstruirajte kvadrat koristeći samo dvobridno ravnalo.
14. Dan je kut $\sphericalangle aOb$ i točka A na kraku a . Dvobridnim ravnalom konstruirajte točku B na kraku b tako da je $OB = OA$.