

3 Teorem o reziduumima i primjene

3.1 Reziduumi

Definicija. Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0, r)$ i neka je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

njen Laurentov red oko točke z_0 . Koeficijent a_{-1} uz $\frac{1}{z-z_0}$ tog reda zove se *reziduum funkcije f u točki z_0* i označava se s $\text{res}(f, z_0)$.

Po formuli za koeficijente Laurentovog reda imamo

$$\text{res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} f(z) dz,$$

gdje je Γ_0 bilo koja po dijelovima glatka pozitivno orijentirana kontura unutar $K(z_0, r)$ koja obuhvaća singularitet z_0 . Dakle, vrijedi

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = 2\pi i \text{res}(f, z_0),$$

pa se računanje integrala može svesti na računanje reziduuma. Ako je z_0 uklonjivi singularitet, onda je $\text{res}(f, z_0) = 0$. Ako je z_0 pol funkcije f , onda postoji i jednostavniji način računanja reziduuma (od razvijanja funkcije u Laurentov red).

I. Ako je z_0 pol prvog reda za funkciju f , onda je za $z \in K^*(z_0, r)$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \phi(z)$$

i funkcija ϕ je holomorfna na $K^*(z_0, r)$ i u z_0 ima uklonjivi singularitet,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \phi(z) = a_0.$$

Sada iz

$$a_{-1} = (z - z_0)f(z) - (z - z_0)\phi(z)$$

uzimanjem limesa kad $z \rightarrow z_0$ dobivamo

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

Ako je funkcija f oblika $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, gdje su g i h holomorfne, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ i z_0 je nultočka prvog reda funkcije h , onda je z_0 pol prvog reda funkcije f i vrijedi

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Primjer 1. Funkcija $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$ ima u točki $z_0 = 2$ pol prvog reda i vrijedi

$$\operatorname{res}(f, 2) = \frac{g(2)}{h'(2)} = \frac{4}{1} = 4,$$

gdje je $g(z) = z^2$ i $h(z) = z - 2$.

II. Općenitije, ako je z_0 pol n -tog reda funkcije f , onda je za $z \in K^*(z_0, r)$

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

pa je

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + \dots$$

što je dakle Taylorov red za funkciju $(z - z_0)^n f(z)$. Reziduum a_{-1} je koeficijent u tom redu, pa ga možemo izračunati pomoću derivacija. Funkcija g definirana s

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z)$$

holomorfna je na $K^*(z_0, r)$ i u z_0 ima uklonjiv singularitet, pa imamo formulu

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(n-1)}(z).$$

Primjer 2. Razvijmo u Laurentov red oko točke π funkciju $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^3}$. Imamo

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z - \pi)^3} = \frac{\sin((z - \pi) + \pi)}{(z - \pi)^3} = \frac{-\sin(z - \pi)}{(z - \pi)^3} = \frac{-1}{(z - \pi)^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \pi)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

dakle

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z - \pi)^{2n-2}}{(2n+1)!}.$$

Funkcija f u točki π ima dakle pol drugog reda. Sada imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f, \pi) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{d}{dz} \left((z - \pi)^2 \frac{\sin z}{(z - \pi)^3} \right) = \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin z}{z - \pi} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{(z - \pi) \cos z - \sin z}{(z - \pi)^2} \end{aligned}$$

pa je po L'Hospitalovom pravilu

$$\operatorname{res}(f, \pi) = \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{-(z - \pi) \sin z + \cos z - \cos z}{2(z - \pi)} = -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \pi} \sin z = 0.$$

Uočimo da smo reziduum mogli pročitati i direktno iz gornjeg Laurentovog reda.

Napomena. U predzadnjem koraku koristili smo L'Hospitalovo pravilo koje glasi:

Ako su funkcije f i g holomorfne u točki $a \in \mathbb{C}$ i vrijedi $f(a) = g(a) = 0$, onda je

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Dokažite L'Hospitalovo pravilo.

Zadatak 3.1.1. Izračunajte reziduume funkcija u njihovim singularitetima:

(a) $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^2}$

(b) $f(z) = \frac{1}{z^n - 1}$

(c) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1 - z}$

3.2 Teorem o reziduumima

Teorem. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je f funkcija koja je holomorfna svugdje na Ω osim u točkama z_1, \dots, z_n u kojima ima izolirane singularitete i neka je Γ jednostavno zatvoren u $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ nulhomotopan po dijelovima gladak put koji obuhvaća te singularitete. Tada vrijedi

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f, z_k),$$

pri čemu za integral uzimamo da je po pozitivno orijentiranoj krivulji Γ .

Zadatak 3.2.1. Izračunajte integrale:

(a) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{1 + z^4}, \Gamma = S(1, 1)$

(b) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+1)}, \Gamma = S(-1+i, 2)$

Definicija. Za funkciju $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da ima izoliran singularitet u točki ∞ ako postoji $\rho > 0$ takav da je vijenac $V(0, \rho, \infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \rho\}$ sadržan u Ω i funkcija f je holomorfna na tom vijencu.

Definicija. Ako je ∞ izoliran singularitet funkcije f , onda reziduum funkcije f u točki ∞ definiramo formulom

$$\text{res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz,$$

gdje je $R > 0$ radijus takav da kružnica $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ obuhvaća sve singularitete funkcije f u kompleksnoj ravnini \mathbb{C} .

Ako je f holomorfna na vijencu $V(0, \rho, \infty)$, onda je na tom vijencu možemo razviti u Laurentov red

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| > \rho,$$

pa zbog

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz$$

vrijedi

$$\operatorname{res}(f, \infty) = -a_{-1}.$$

Ako je f analitička funkcija svugdje na \mathbb{C} osim u konačno mnogo točaka $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ u kojima ima izolirane singularitete, onda je zbroj svih reziduuma funkcije f jednak nuli,

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}(f, z_k) + \operatorname{res}(f, \infty) = 0.$$

Kako se računa $\operatorname{res}(f, \infty)$? Ako je f holomorfna na $V(0, \rho, \infty)$, onda je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| > \rho,$$

pa je za $|z| < \frac{1}{\rho}$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \dots + a_{-2} z^2 + a_{-1} z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

i onda

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \dots + a_{-2} + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z^3} + \frac{a_2}{z^4} + \dots$$

dakle vrijedi

$$a_{-1} = \operatorname{res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Slijedi

$$\operatorname{res}(f, \infty) = -\operatorname{res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Označimo

$$f_1(z) := f\left(\frac{1}{z}\right).$$

U posebnom slučaju kad f_1 ima uklonjiv singularitet u 0 (tada kažemo da je f_1 analitička u 0), možemo $\operatorname{res}(f, \infty)$ izračunati jednostavnije. Tada možemo proširiti domenu funkcije f_1 tako da bude definirana u 0, $f_1(0) := \lim_{z \rightarrow 0} f_1(z)$. Imamo

$$f_1(z) = a_0 + a_{-1}z + a_{-2}z^2 + \dots$$

pa je

$$f_1'(z) = a_{-1} + 2a_{-2}z + \dots$$

iz čega slijedi

$$a_{-1} = f_1'(0),$$

to jest

$$\operatorname{res}(f, \infty) = -f_1'(0).$$

Također, ako označimo s $f(\infty) := f_1(0)$, možemo pisati

$$f_1'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f_1(z) - f_1(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} (f(\frac{1}{z}) - f(\infty)) = \lim_{w \rightarrow \infty} w(f(w) - f(\infty)),$$

dakle,

$$\text{res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)).$$

Pri tome $z \rightarrow \infty$ označava $|z| \rightarrow \infty$ to jest $\frac{1}{z} \rightarrow 0$.

Zadatak 3.2.2. Izračunajte reziduum u točki ∞ za funkcije

(a) $f(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^3 - 2z + 1}$

(b) $f(z) = z \sin \frac{1}{z+1}$

(c) $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$.

Zadatak 3.2.3. Izračunajte integral

$$\int_{\Gamma} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz, \quad \Gamma = S(0, 2).$$

Zadatak 3.2.4. Izračunajte integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^4 - 1)^3(z - 3)}.$$

Zadaća 3.2.

1. Izračunajte integrale

(a) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(z-1)^n}{z^n - 1} dz$, gdje je Γ kružnica oko 0 radijusa $r > 1$ i $n \in \mathbb{N}$

(b) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8 + 1)^2}$

(c) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)}$.

Sve krivulje su pozitivno orijentirane.

2. Odredite reziduum u točki ∞ za funkcije

(a) $f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}$ (uočite da je ova funkcija parna funkcija)

(b) $f(z) = z \cos^2 \frac{\pi}{z}$

(c) $f(z) = \frac{\cos z}{(z^4 - 1)^2}$

(d) $f(z) = \frac{1}{z^4(z+1)}$.

3.3 Rouchéov teorem

Teorem. (Rouché) Neka su f i g holomorfne funkcije na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $\Gamma \subseteq \Omega$ kontura čije je unutrašnje područje sadržano u Ω . Ako za svaki $z \in \Gamma$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, onda Γ obuhvaća jednak broj nultočaka funkcija f i $f + g$, pri čemu svaku nultočku treba ubrojiti onoliko puta kolika je njena kratnost.

Zadatak 3.3.1. Nađite broj nultočaka polinoma

$$p(z) = z^8 - 6z^6 - z^3 + 2$$

unutar kruga $K(0, 1)$.

Zadatak 3.3.2. Odredite broj rješenja jednadžbe

$$z^4 = \sin z$$

u području $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \pi\}$.

Zadatak 3.3.3. Odredite broj nultočaka polinoma $p(z) = z^5 + 5z - 1$

(a) unutar $K(0, 1)$

(b) u vijencu $V(0, 1, 2)$.

Zadatak 3.3.4. Odredite broj nultočaka polinoma $p(z) = z^4 - z^2 + 1$ u desnoj poluravnini.

Zadaća 3.3.

1. Odredite broj nultočaka polinoma u zadanom području.

(a) $4z^4 - 29z^2 + 25$, $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$

(b) $z^4 - z^3 - 4z + 1$, $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$

2. Odredite broj rješenja zadane jednadžbe u zadanom području.

(a) $z^2 - \cos z = 0$, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$

(b) $e^z - 4z^n + 1 = 0$, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

* 3. Pomoću Rouchéovog teorema dokažite Osnovni teorem algebre:

Polinom stupnja n s koeficijentima u \mathbb{C} ima točno n nultočaka u \mathbb{C} računajući njihove kratnosti.

3.4 Računanje integrala funkcija realne varijable pomoću reziduuma

Pretpostavimo da je funkcija f definirana na čitavoj realnoj osi te da se može analitički proširiti na otvorenu okolinu zatvarača gornje poluravnine do funkcije $z \mapsto f(z)$ tako da to proširenje ima najviše konačno mnogo singulariteta z_1, \dots, z_n u gornjoj poluravnini $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. Promatrajmo glavnu vrijednost integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Odaberimo R dovoljno velik tako da polukružnica C_R obuhvati sve singularitete funkcije f u gornjoj poluravnini. Vrijedi

$$\int_{[-R, R]} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f, z_k).$$

Po definiciji je

$$\int_{[-R, R]} f(z) dz = \int_{-R}^R f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{-R}^R f(t) dt,$$

pri čemu je γ parametrizacija $\gamma(t) = t$, $t \in [-R, R]$. Zanima nas pod kojim uvjetima vrijedi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

jer u tom slučaju imamo jednostavno

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f, z_k).$$

Jordanova lema. Neka je funkcija f holomorfnu u gornjoj poluravnini osim možda u točkama z_1, \dots, z_n koje se ne nalaze na realnoj osi i neka se može proširiti do neprekidne funkcije na zatvaraču gornje poluravnine osim u najviše konačno mnogo točaka. Označimo

$$M(R) := \max_{z \in C_R} |f(z)|.$$

Tada vrijedi sljedeće.

(a) Ako je $\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot M(R) = 0$, onda je $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$.

(b) Ako je $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$, onda je $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$ za $\alpha > 0$.

Zadatak 3.4.1. Izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Integrali tipa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx$, $\alpha > 0$. Po definiciji je

$$e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x.$$

Definiramo

$$F(z) = f(z)e^{i\alpha z}.$$

Funkcija F je holomorfna gdje je funkcija f holomorfna. Vrijedi

$$\int_{[-R,R]} F(z) dz + \int_{C_R} F(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res}(F, z_k).$$

Ako za $M(R) = \max_{z \in C_R} |f(z)|$ vrijedi $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$, onda je po Jordanovoj lemi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz = 0,$$

pa je

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R,R]} F(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res}(F, z_k).$$

Sada zbog

$$\int_{[-R,R]} F(z) dz = \int_{-R}^R f(t)e^{i\alpha t} dt = \int_{-R}^R f(t) \cos \alpha t dt + i \int_{-R}^R f(t) \sin \alpha t dt$$

imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \text{Re} \left(2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res}(F, z_k) \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx = \text{Im} \left(2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res}(F, z_k) \right)$$

Zadatak 3.4.2. Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx, \quad b > 0.$$

Zadatak 3.4.3. Izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx.$$

Zaobilaženje singulariteta na realnoj osi. Ako funkcija f ima konačno mnogo singulariteta na realnoj osi i oni su polovi prvog reda, možemo ih zaobići. Uzimamo konturu Γ koja se sastoji od polukružnice C_R , dijelova realne osi unutar intervala $[-R, R]$ i polukružnica γ_{r,z_j} koje zaobilaze singularitete na realnoj osi.

Ako je $z_0 \in \mathbb{R}$ pol prvog reda funkcije f , onda je

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \phi(z)$$

i funkcija ϕ je holomorfnu u z_0 . Dakle,

$$\int_{\gamma_{r,z_0}} f(z) dz = a_{-1} \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_{r,z_0}} \phi(z) dz.$$

Vrijedi

$$\left| \int_{\gamma_{r,z_0}} \phi(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_{r,z_0}} |\phi(z)| \cdot \left| \int_{\gamma_{r,z_0}} dz \right| = \max_{z \in \gamma_{r,z_0}} |\phi(z)| \cdot \pi r \rightarrow 0 \text{ kad } r \rightarrow 0.$$

Uz to,

$$\int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\pi}^0 \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = -i\pi,$$

jer je γ_{r,z_0} negativno orijentirana, uz parametrizaciju $t \mapsto re^{it} + z_0$, za t u segmentu $[0, \pi]$, od π prema 0. Slijedi da je tada

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{r,z_0}} f(z) dz = -a_{-1}i\pi = -i\pi \operatorname{res}(f, z_0).$$

Ako je

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

onda iz

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}(f, z_k) = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{[-R,R] \setminus U} f(z) dz + \sum_{\operatorname{Im} z_k = 0} \int_{\gamma_{r,z_k}} f(z) dz,$$

gdje je

$$U = \bigcup_{\operatorname{Im} z_k = 0} \langle z_k - r, z_k + r \rangle,$$

imamo da je limes kad $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}(f, z_k) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k = 0} \operatorname{res}(f, z_k).$$

Zadatak 3.4.4. Izračunajte sljedeće integrale.

(a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx, \quad a, b > 0$

Zadatak 3.4.5. Izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2(x^2 + b^2)} dx, \quad a, b > 0.$$

Integrali oblika $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$, $0 < \alpha < 1$, **za** f **racionalnu funkciju bez singulariteta u** $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Pretpostavimo dodatno da postoje $R > 0$, M i $m \geq 1$ tako da je

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x|^m} \text{ za sve } x \in \mathbb{R} \text{ takve da je } |x| \geq R.$$

Definiramo

$$F(z) = \frac{f(z)}{|z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}},$$

gdje $\arg z$ uzimamo iz intervala $(0, 2\pi)$. To je jedna grana višeznačne funkcije $z \mapsto \frac{f(z)}{z^\alpha}$. Ta je funkcija holomorfnna svugdje na području

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < 2\pi\} = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

osim u konačno mnogo točaka. Uočimo da se F ne može definirati da bude neprekidna u točkama $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ pozitivnog dijela realne osi i nuli.

Za put integracije $\Gamma_{R,r,\epsilon}$ uzimamo da se sastoji od ovih dijelova:

- C_R – pozitivno orijentiran luk kružnice $z = Re^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, koja obuhvaća sve singularitete z_1, \dots, z_n
- c_r – negativno orijentiran luk kružnice $z = re^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, dovoljno malog polumjera da ne obuhvaća niti jedan singularitet
- L_1 – dužina paralelna s realnom osi u gornjoj poluravnini na udaljenosti $\frac{\epsilon}{2}$, od točke manje kružnice do točke veće kružnice
- L_2 – dužina paralelna s realnom osi u donjoj poluravnini na udaljenosti $\frac{\epsilon}{2}$, od točke veće kružnice do točke manje kružnice

Promatrat ćemo limes integrala po toj krivulji kad $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$. Vrijedi sljedeće.

- ◊ Kad $z \rightarrow x \in [r, R]$ uz $\text{Im } z > 0$, njegov argument $\arg z \rightarrow 0$, pa

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z} \rightarrow |z|^\alpha.$$

- ◊ Kad $z \rightarrow x \in [r, R]$ uz $\text{Im } z < 0$, njegov argument $\arg z \rightarrow 2\pi$, pa

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z} \rightarrow |z|^\alpha e^{i\alpha 2\pi}.$$

Kada pustimo $\epsilon \rightarrow 0$, dobivamo dakle

$$\int_r^R \frac{f(x)}{x^\alpha} dx + \int_{C_R} F(z) dz + \int_R^r \frac{f(x)}{x^\alpha e^{2\alpha i\pi}} dx + \int_{c_r} F(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \text{res}(F, z_k).$$

Ovdje nismo mogli odmah uzeti krivulju koja sadrži segmente $[r, R]$ realne osi jer ona ne bi bila sadržana u D , a D je maksimalno područje na kojem F može biti definirana da bude neprekidna. Sada imamo

$$\left| \int_{C_R} F(z) dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{(Re^{it})^\alpha} iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^m} \frac{1}{R^\alpha} R dt = \frac{2M\pi}{R^{m+\alpha-1}} \rightarrow 0$$

kad $R \rightarrow \infty$. Također,

$$\left| \int_{c_r} F(z) dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^\alpha} ire^{it} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{K}{r^\alpha} r dt = Kr^{1-\alpha} 2\pi \rightarrow 0$$

kad $r \rightarrow 0$, pri čemu je K neka konstanta kojom je modul funkcije f ograničen na nekoj okolini točke 0, a ona postoji jer je f holomorfna u 0. Iz toga dobivamo, kada pustimo $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$,

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx + \frac{1}{e^{2\pi i \alpha}} \int_\infty^0 \frac{f(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \text{res}(F, z_k)$$

iz čega slijedi formula

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \sum_{z_k \in D} \text{res}(F, z_k),$$

za granu funkcije pod integralom $F(z) = \frac{f(z)}{|z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}}$, $\arg z \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadatak 3.4.6. Izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$