2 Nizovi i redovi kompleksnih funkcija

2.1 Nizovi i redovi kompleksnih brojeva

Definicija. Niz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ je *konvergentan* ako postoji $z \in \mathbb{C}$ takav da vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \text{ takav da } (\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon).$$

Broj z zove se *limes niza* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pišemo

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Broj $z_0 \in \mathbb{C}$ je *gomilište niza* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako se u svakoj okolini broja z_0 nalazi beskonačno mnogo članova tog niza.

Napomena.

1. Ako je z_0 gomilište niza $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onda postoji podniz $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tog niza koji konvergira prema z_0.
2. Niz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n = a_n + ib_n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira prema broju $z = a + ib$ ako i samo ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Definicija. Niz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *Cauchyjev* ako vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \text{ takav da } (\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon).$$

Napomena. Svaki konvergentan niz je Cauchyjev. U prostoru $\mathbb{C}$ vrijedi i obrat te tvrdnje.

Definicija. Red $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ kompleksnih brojeva *konvergira* ako konvergira niz parcijalnih suma $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{C}$, gdje je *n-ta parcijalna suma* po definiciji $S_n = z_1 + \ldots + z_n$, za $n \in \mathbb{N}$. Broj $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ tada zovemo *suma reda* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i pišemo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Napomena.

1. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergira, onda je $\lim z_n = 0$. To je dakle nužan uvjet za konvergenciju reda.
2. Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ u $\mathbb{C}$ konvergira ako i samo ako je pripadajući niz parcijalnih suma $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev, a to je ako i samo ako vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\Big(n > m \geqslant n_0 \Rightarrow \Big|\sum_{k=m}^{n} z_k\Big| < \varepsilon\Big).$$

3. Za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ kažemo da *konvergira apsolutno* ako konvergira red nenegativnih brojeva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan. Obrat ne vrijedi! Za red koji konvergira, ali ne konvergira apsolutno, kažemo da *konvergira uvjetno*.

Kriteriji konvergencije.

- ◇ D'Alembertov kriterij
  - ○ Ako je $\rho := \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\frac{z_{n+1}}{z_n}| < 1$, onda red konvergira apsolutno.
  - ○ Ako postoji $\rho := \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{z_{n+1}}{z_n}|$, tada red konvergira apsolutno za $\rho < 1$ i divergira za $\rho > 1$. Za $\rho = 1$ ovaj kriterij ne daje odluku.
- ◇ Cauchyjev kriterij
  - ○ Neka je $\rho := \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|z_n|}$. Tada za $\rho < 1$ red konvergira apsolutno, a za $\rho > 1$ red divergira. Za $\rho = 1$ nema odluke.
- ◇ Kriterij usporedbe
  - ○ Ako je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan red nenegativnih brojeva i ako vrijedi $|z_n| \leqslant a_n$ za sve $n \geq n_0$, onda red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergira apsolutno.

Zadatak 2.1.1. Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, gdje je $z \in \mathbb{C}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, gdje je $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n}$

Napomena. Red $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, uz $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira ako i samo ako konvergiraju redovi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. U tom slučaju za njihove sume vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Zadaća 2.1.

1. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos(in)}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$

* 2. Dokažite sljedeću tvrdnju.

   Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergira u $\mathbb{C}$ i vrijedi $|\arg z_n| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda red konvergira apsolutno.

2.2 Redovi potencija

Definicija. Red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

zove se *red potencija oko točke* z_0. Kažemo da taj red konvergira u točki $z_1 \in \mathbb{C}$ ako red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$$

konvergira u $\mathbb{C}$.

Teorem. (Cauchy-Hadamard) Neka je zadan red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ i neka je

$$r := \frac{1}{\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

pri čemu dogovorno uzimamo

$$r = 0, \quad \text{ako je } \limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty,$$
$$r = +\infty, \quad \text{ako je } \limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Tada vrijedi sljedeće.

1. Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergira apsolutno na krugu $K(z_0, r)$.
2. Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ divergira za svaki $z \in \mathbb{C}$ za koji je $|z-z_0| > r$.

Broj r zove se *radijus konvergencije*, a $K(z_0, r)$ *krug konvergencije reda* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Zadatak 2.2.1. Odredite radijus konvergencije sljedećih redova.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2-i}\right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$

Ponekad je radijus konvergencije reda lakše računati po sljedećoj formuli, ako taj limes postoji:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Zadatak 2.2.2. Odredite radijus konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

Teorem. Pretpostavimo da red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ima radijus konvergencije $r > 0$. Tada je funkcija $f\colon K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ definirana s

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

holomorfna na $K(z_0, r)$ i njena derivacija je

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Radijus konvergencije funkcije f' također je jednak r.

Zadatak 2.2.3. Odredite područje kovergencije i sumu sljedećih redova.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

Zadaća 2.2.

1. Odredite polumjer konvergencije sljedećih redova.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(in) z^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} z^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$

2. Neka je R polumjer konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$. Odredite polumjer konvergencije redova:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{kn}$, gdje $k \in \mathbb{N}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) c_n z^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k c_n z^n$

* 3. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz pozitivnih realnih brojeva sa svojstvom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokažite da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konvergira u svim točkama $z \in \mathbb{C}$ za koje je $|z| \leq 1$ osim možda u točki $z = 1$.

2.3 Integral kompleksne funkcije

Definicija. Neka je $\gamma = \zeta + i\eta\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak put, $\gamma^* = \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{C}$ njegova slika i $f = u + iv\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. *Integral funkcije f duž puta γ* definiramo sa

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Integral

$$\int_\Gamma f(z)\, dz$$

kompleksne funkcije duž orijentirane po dijelovima glatke krivulje Γ definira se kao integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ po proizvoljnom po dijelovima glatkom putu γ koji parametrizira orijentiranu krivulju Γ.

Zadatak 2.3.1. Izračunajte integrale $\int_\Gamma |z|\,dz$ i $\int_\Sigma |z|\,dz$ po krivuljama na slici. Na slici je krivulja Γ dužina i krivulja Σ polukružnica, obje su u zatvaraču gornje poluravnine, krajnje su im točke -1 i 1 i usmjerene su od -1 prema 1.

Cauchyjeva integralna formula. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija, $\Gamma \subseteq \Omega$ pozitivno orijentirana kontura čije je unutrašnje područje sadržano u Ω i neka točka z_0 pripada tom unutrašnjem području. Tada je

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Kontura je slika jednostavno zatvorenog po dijelovima glatkog puta. Put $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ je *jednostavno zatvoren* ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$ (tj. zatvoren je) i $\gamma|_{[a,b\rangle}$ je injekcija (tj. kao krivulja nema samopresjeka).

Teorem. Neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, γ nulhomotopan u Ω jednostavno zatvoren po dijelovima gladak put te z_0 točka iz unutrašnjosti krivulje γ^*. Tada vrijedi:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz.$$

Pomoću ovog teorema možemo integrale računati preko derivacija.

Zadatak 2.3.2. Izračunajte sljedeće integrale po zadanim krivuljama u pozitivnom smjeru.

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz$

(b) $\displaystyle\int_{|z-2|=2} \frac{z}{z^4-1}\,dz$

(c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$, gdje je Γ neka kontura koja okružuje točke -1 i 1

Zadaća 2.3.

1. Izračunajte sljedeće integrale po zadanim krivuljama u pozitivnom smjeru.

   (a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{sh}\,z}{z^3}\,dz$

   (b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z\cos(\pi z)}{z^2+2z}\,dz$

   (c) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$

2. Izračunajte:

   (a) $\displaystyle\int_\Gamma e^z\,dz$, gdje je Γ parabola $y = x^2$ koja spaja točke $z_1 = 0$ i $z_2 = 1 + i$

(b) $\displaystyle\int_\Gamma e^z\,dz$, gdje je Γ dio pravca od $z_1 = 0$ do točke $z_2 = 1 + i$

(c) $\displaystyle\int_\Gamma (z^2 + z\overline{z})\,dz$, gdje je Γ luk kružnice parametriziran s $z = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$

(d) $\displaystyle\int_\Gamma z\,\sin z\,dz$, gdje je Γ dio pravca od $z_1 = 0$ do točke $z_2 = 1 + i$

2.4 Taylorov red

Taylorov teorem. Neka je funkcija f holomorfna na krugu $K(z_0, r)$. Tada za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

gdje su koeficijenti a_n, $n \geq 0$, dani formulama

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz,$$

pri čemu je Γ pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 radijusa manjeg of r.

Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ zove se *Taylorov red funkcije f u točki z_0*.

Zadatak 2.4.1. Razvijte u Taylorov red u okolini točke z_0 sljedeće funkcije.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{4 - z^2}$, $z_0 = 0$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{1 + z}$, $z_0 = i$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{(1 - z)^2}$, $z_0 = 0$

Umnožak redova. Neka je $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ i $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$. Tada je

$$f(z)g(z) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

gdje su koeficijenti

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Maclaurinov red je drugi naziv za Taylorov red u točki 0.

Zadatak 2.4.2. Razvijte u Maclaurinov red funkciju f zadanu sa $f(z) = e^z \sin z$.

Zadatak 2.4.3. Razvijte u Maclaurinov red:

(a) $\dfrac{1}{1 + z + z^2 + z^3}$

(b) $\dfrac{z}{(z^2 + 1)(z^2 - 4)}$

(c) $\ln(z^2 - 3z + 2)$

Napomena. U dijelu (a) prethodnog zadatka funkcija $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2+z^3}$ je holomorfna na $K(0,1)$ i na tom krugu se podudara s funkcijom $g(z) = \frac{1-z}{1-z^4}$ pa se i njen Taylorov red na tom krugu podudara s Taylorovim redom funkcije g. Vrijedi

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2.$$

No, ne vrijedi općenito $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$. Naprimjer, za $z_1 = z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ imamo

$$\ln(z_1) = \ln(z_2) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right) = \ln 1 + i\frac{3\pi}{4} = i\frac{3\pi}{4},$$
$$\ln(z_1 z_2) = \ln(-i) = \ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i\frac{\pi}{2} \neq i\frac{3\pi}{2} = \ln(z_1) + \ln(z_2).$$

U dijelu (c) taj problem možemo izbjeći tako da promatramo samo one $z \in \mathbb{C}$ za koje je $|z| < 1$. Naime, za njih je $1-z \in K(1,1)$ i $2-z \in K(2,1)$ pa je $\arg(1-z) + \arg(2-z) \in \langle -\pi, \pi \rangle$ i onda vrijedi

$$\begin{aligned}
\ln((1-z)(2-z)) &= \ln(|1-z| \cdot |2-z|) + i\arg((1-z)(2-z)) \\
&= \ln|1-z| + \ln|2-z| + i\arg(1-z) + i\arg(2-z) \\
&= \ln(1-z) + \ln(2-z)
\end{aligned}$$

Zbog toga je Taylorov red funkcije $f(z) = \ln(z^2 - 3z + 2)$ upravo onaj red koji smo dobili.

U dijelu (b) funkcija je holomorfna na $K(0,1)$ i nije definirana u točkama i i $-i$ pa je radijus konvergencije pridruženog Taylorovog reda jednak 1.

Zadatak 2.4.4. Razvijte u Maclaurinov red funkciju f zadanu sa $f(z) = \sqrt{z+i}$. Pritom za vrijednost funkcije uzmite glavnu vrijednost drugog korijena,

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{2} + i \sin\frac{\arg z}{2}\right).$$

Zadaća 2.4.

1. Razvijte u Maclaurinov red sljedeće funkcije.

   (a) $f(z) = \dfrac{z-2}{z^2 - z - 6}$

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$

   (c) $f(z) = \sin^2 z$

   (d) $f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z$

2. Razvijte u Taylorov red oko točke z_0 sljedeće funkcije.

   (a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{4}$

   (b) $f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, $z_0 = 1$

   (c) $f(z) = \mathrm{arc\,tg}\, z$, $z_0 = 0$

   (d) $f(z) = \ln 3 - z$, $z_0 = -1$

2.5 Laurentov red

Teorem. (Laurent) Neka je funkcija f holomorfna na kružnom vijencu

$$V(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

Tada za svaki $z \in V(z_0, r, R)$ vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

gdje su koeficijenti a_n, $n \in \mathbb{Z}$, dani sa

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

pri čemu je Γ_0 pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 proizvoljnog radijusa ρ za koji je $r < \rho < R$. Taj red zove se *Laurentov red funkcije f oko točke z_0*.

Suma Laurentovog reda jednaka je zbroju suma redova

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{i} \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

pri čemu je (po definiciji) suma reda $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n$ jednaka $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=-1}^{-n} a_k (z - z_0)^k$.

Napomena.

(i) Laurentov teorem vrijedi i u slučaju kad umjesto kružnog vijenca $V(z_0, r, R)$ imamo probušeni krug

$$K^*(z_0, R) := K(z_0, R) \setminus \{z_0\},$$

na koji možemo gledati kao na degenerirani vijenac s unutarnjim radijusom $r = 0$.

(ii) Red tog oblika sa svojstvom da je njegova suma za svaki $z \in V(z_0, r, R)$ jednaka $f(z)$ je jedinstven: ako za svaki $z \in V(z_0, r, R)$ vrijedi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

onda je $a_n = b_n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Ako je funkcija f holomorfna na krugu $K(z_0, r)$, onda u Laurentovom razvoju te funkcije oko točke z_0 nema negativnih potencija. To je direktna posljedica tvrdnje pod (ii).

Zadatak 2.5.1. Razvijte u Laurentov red funkciju $f(z) = \dfrac{1}{1 - z}$ na području

(a) $K(0, 1)$

(b) $\mathbb{C} \setminus \overline{K(0, 1)}$

Zadatak 2.5.2. Razvijte u Laurentov red funkciju $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ oko točke $z_0 = 0$ na području

(a) $K(0,1)$

(b) $V(0,1,2)$

(c) $\mathbb{C} \setminus \overline{K(0,2)}$

Napomena. Da smo tražili razvoj funkcije f u Laurentov red na $V(0,a,b)$ gdje je $1 \leq a < b \leq 2$, dobili bismo red kao u (b) zbog $V(0,a,b) \subseteq V(0,1,2)$ i jedinstvenosti Laurentovog reda. Da smo tražili razvoj na $\mathbb{C} \setminus \overline{K(0,c)}$ gdje je $c > 2$, dobili bismo Laurentov red kao u (c), a da smo tražili razvoj na $K(0,d)$ gdje je $d < 1$, Laurentov red kao u (a).

U prethodnom zadatku smo vidjeli da ista funkcija može imati dva različita Laurentova reda na disjunktnim područjima.

Zadatak 2.5.3. Razvijte funkciju $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ u Laurentov red oko točke z_0 u području D, ako je

(a) $z_0 = -1$, $\frac{3}{2} \in D$

(b) $z_0 = 1$, $\frac{3}{2} \in D$

Zadatak 2.5.4. Razvijte u Laurentov red funkciju $f(z) = \dfrac{z+i}{z^2}$ oko točke i u području D koje sadrži točku $-i$.

Zadatak 2.5.5. Razvijte u Laurentov red u okolini točke 0 funkciju f zadanu sa

(a) $f(z) = z^2 e^{\frac{i}{z}}$

(b) $f(z) = z^2 \sin\left(\pi \dfrac{z+1}{z}\right)$

Zadatak 2.5.6. Odredite koje se od sljedećih funkcija daju razviti u Laurentov red u okolini točke 0.

(a) $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$

Zadatak 2.5.7. Razvijte sljedeće funkcije u Laurentov red u okolini zadane točke i odredite područje konvergencije dobivenog reda.

(a) $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{z-1}$ oko 1

(b) $f(z) = \sin z \cdot \sin \dfrac{1}{z}$ oko 0

(c) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ oko 0

Zadaća 2.5.

1. Razvijte u Laurentov red funkciju $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ oko točke z_0 u zadanom području D, ako je

   (a) $z_0 = 1$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-1| < 2\}$

   (b) $z_0 = 2$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-2| < 3\}$

   (c) $z_0 = 1 + i$, $0 \in D$

2. Razvijte u Laurentov red funkciju f oko točke z_0 u zadanom području D, ako je

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$, $-\frac{3}{2} \in D$

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$, $z_0 = 0$, $3 \in D$

2.6 Singulariteti

Definicija. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija. Kažemo da je točka

$$z_0 \in \operatorname{Int} \overline{\Omega} = \overline{\Omega} \setminus \partial\overline{\Omega}$$

singularitet funkcije f, ili da funkcija f *ima u točki* z_0 *singularitet*, ako funkcija f uopće nije definirana u toj točki ili nije holomorfna u toj točki. Za singularitet z_0 funkcije f kažemo da je *izoliran* ako je f holomorfna na nekom probušenom krugu $K^*(z_0, R)$ oko točke z_0.

Primjer.

(i) Funkcija $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ima u točki 1 singularitet i to izoliran jer je funkcija holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(ii) Točka 0 je singularitet funkcije $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ jer funkcija f nije definirana u točki 0, ali taj singularitet nije izoliran. Naime, za svaki $k \in \mathbb{Z}$ je $\sin \frac{1}{\frac{1}{k\pi}} = 0$, tj. u svim točkama oblika $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, funkcija nije definirana. Budući da je 0 gomilište tog skupa singulariteta $\left\{\frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, svaki krug oko 0 sadrži neki singularitet različit od 0, pa prema tome 0 nije izoliran singularitet.

Ovisno o tome kakav je limes funkcije f u izoliranom singularitetu z_0, odnosno kakav je oblik Laurentovog reda funkcije f u okolini točke z_0, izolirani singularitet z_0 pripada jednoj od sljedeće tri skupine.

1. Uklonjivi singulariteti. Izolirani singularitet z_0 je *uklonjiv singularitet* ako postoji limes $\lim\limits_{z\mapsto z_0} f(z)$ u $\mathbb{C}$. U tom slučaju, ako dodamo u domenu funkcije f točku z_0 i definiramo

$$f(z_0) := \lim_{z\mapsto z_0} f(z),$$

točka z_0 prestaje biti singularitet, tj. tako proširena funkcija f holomorfna je u z_0. Točka z_0 je uklonjiv singularitet ako i samo ako Laurentov red funkcije f oko točke z_0 nema negativnih potencija.

Primjer. Funkcija $f(z) = \frac{1-\cos 2z}{z^2}$ je holomorfna svuda osim u točki 0, gdje nije definirana. Vrijedi

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ z \in \mathbb{C},$$

pa imamo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}z^{2n}}{(2n)!}\right) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}z^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}z^{2n-2} = 2 - \frac{2}{3}z^2 + \dots \end{aligned}$$

Dakle, 0 je uklonjivi singularitet funkcije f i definiramo li $f(0) := 2$, uklonili smo ga. Funkcija

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1-\cos 2z}{z^2}, & z \neq 0 \\ 2, & z = 0 \end{cases}$$

je holomorfna na $\mathbb{C}$.

Do toga smo mogli doći i na sljedeći način.

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos 2z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2 z}{z^2} = 2\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 = 2.$$

2. Polovi. Za izolirani singularitet z_0 funkcije f kažemo da je *pol* ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 imamo barem jedan i ukupno konačno mnogo članova s negativnim potencijama. To je ekvivalentno tvrdnji

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty.$$

Red pola je red najveće potencije od $\frac{1}{z-z_0}$ koja se u tom Laurentovom razvoju pojavljuje s koeficijentom različitim od 0.

Primjer.

(i) Funkcija $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ ima u točki $z_0 = 0$ pol drugog reda jer je

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}z^2 + \dots$$

(ii) Funkcija $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ima u točki $z_0 = 0$ izolirani singularitet. Kako je $\lim\limits_{z\to 0}\left|\frac{1}{\sin z}\right| = \infty$, točka 0 je pol funkcije f. Kojeg je reda taj pol? Vrijedi sljedeće:

> Ako je z_0 pol funkcije f reda m, onda je z_0 uklonjiv singularitet funkcije $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ i nije uklonjiv singularitet funkcije $z \mapsto (z - z_0)^{m-1} f(z)$.

Dakle, tražimo najmanji $m \in \mathbb{N}$ takav da je 0 uklonjiv singularitet funkcije $z \mapsto z^m \frac{1}{\sin z}$. Kako je

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots,$$

to je

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$$

iz čega slijedi

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = 1,$$

pa stoga funkcija $z \mapsto \frac{z}{\sin z}$ ima u 0 uklonjiv singularitet. Dakle, funkcija $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ima u 0 pol reda 1.

3. Bitni singulariteti. Za izolirani singularitet z_0 kažemo da je *bitan singularitet* ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama, a to vrijedi ako i samo ako: ne postoji limes $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ u $\mathbb{C}$ i $|f(z)|$ ne teži beskonačnosti kad $z \to z_0$.

Primjer.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

Točka $z_0 = 0$ je bitan singularitet funkcije $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Zadatak 2.6.1. Odredite singularitete i ispitajte njihov karakter za funkcije

(a) $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$

(b) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}} - 1}{z - 1}$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$

Zadatak 2.6.2. Odredite singularitete i ispitajte njihov karakter za funkcije

(a) $f(z) = \dfrac{z-2}{z(z^2+9)^3}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{2+e^{-z}}$

(c) $f(z) = \dfrac{1-e^z}{2+e^z}$

Zadatak 2.6.3. Neka je z_0 pol (odnosno bitan singularitet) funkcije f i neka je funkcija g holomorfna u z_0 te $g(z_0) \neq 0$. Dokažite da je tada z_0 pol (odnosno bitan singularitet) funkcije $z \mapsto f(z)g(z)$.

Zadatak 2.6.4. Odredite singularitete i njihov karakter za funkcije

(a) $f(z) = z^2 \operatorname{ctg} z$

(b) $f(z) = \sin(e^{\frac{1}{z}})$

(c) $f(z) = e^{z-\frac{1}{z}}$

Dodatni zadaci 2.

1. Dokažite da ne postoji cijela funkcija f takva da je

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{ z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) = 0 \right\} = \mathbb{R}.$$