1 Kompleksni brojevi i funkcije

1.1 Kompleksni brojevi

Kompleksan broj z poistovjećujemo s uređenim parom (x, y) realnih brojeva, pri čemu broj x nazivamo *realni dio*, a broj y *imaginarni dio kompleksnog broja* z.

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

Uređen par oblika $(x, 0)$ poistovjećen je s realnim brojem x, a par $(0, 1)$ nazivamo *imaginarna jedinica* i označavamo s i. Skup kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbb{C}$.

Svaki se kompleksan broj z može napisati u obliku $z = x+iy$, gdje su x i y realni brojevi. Takav prikaz je jedinstven i zove se *algebarski* (ili *standardni*) *prikaz kompleksnog broja* z.

Vrijedi

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

za $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Broj $\overline{z} := x - iy$ zovemo *(kompleksno) konjugiranim brojem* broja $z = x + iy$. Vrijedi

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2}$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{-z} = -\overline{z}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Zadatak 1.1.1. Odredite realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

(a) $\dfrac{1}{1-i}$

(b) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

(c) $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3$

Zadatak 1.1.2. Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\bar{z} = z^2$.

Modul ili *apsolutna vrijednost kompleksnog broja* $z = x + iy$ je realan nenegativan broj

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zadatak 1.1.3. Neka je $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ i $z_1 z_2 \neq -1$. Dokažite da je tada

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

realan broj.

Svaki se kompleksan broj z može prikazati u obliku

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi),$$

gdje je r modul tog kompleksnog broja. Za kut ϕ kažemo da je *argument kompleksnog broja* z. Vrijedi

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{y}{x}, \text{ za } x \neq 0,$$

gdje je $z = x + iy$. Označimo *skup argumenata kompleksnog broja* z sa

$$\operatorname{Arg} z := \{\phi \in \mathbb{R} \mid z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)\}.$$

Prikaz $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, gdje je $r = |z|$ i $\phi \in \operatorname{Arg} z$, zove se *trigonometrijski prikaz kompleksnog broja* z. Dogovorno uzimamo ovdje

$$\arg z := \phi \in \operatorname{Arg}(z) \text{ takav da je } \phi \in [0, 2\pi\rangle,$$

no može se dogovorno uzeti bilo koji poluotvoreni interval širine 2π. U svakom slučaju vrijedi

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Uvedimo oznaku

$$e^{i\phi} := \cos\phi + i\sin\phi.$$

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja z je

$$z = re^{i\phi},$$

gdje je $r = |z|$ i $\phi \in \operatorname{Arg} z$.

Zadatak 1.1.4. Prikažite u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:

(a) $\sqrt{3} + i$

(b) $1 + i^{123}$

(c) $-\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}$

(d) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, za $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Vrijedi

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

De Moivreova formula.

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$$

Potenciju kompleksnog broja $z = re^{i\phi}$ računamo po formuli

$$z^n = r^n e^{in\phi} = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

Kompleksan broj $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ ima n različitih kompleksnih n-tih korijena i oni su dani sa

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Zadatak 1.1.5. Izračunajte

$$\frac{(1+i)^{16}}{(1-i\sqrt{3})^9}.$$

Zadatak 1.1.6. Odredite sve vrijednosti korijena

(a) $\sqrt[3]{-1+i}$

(b) $\sqrt[4]{16}$

i prikažite ih u kompleksnoj ravnini.

Zadaća 1.1.

1. Prikažite sljedeće brojeve u trigonometrijskom obliku:
   (a) $-\sqrt{2}$
   (b) $-1+2i$
   (c) $\cos\alpha - i\sin\alpha$, za $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
2. Izračunajte:
   (a) $(2+2i)^7$
   (b) $\left(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$
3. Izračunajte:
   (a) $\sqrt{(1-i\sqrt{3})^7}$
   (b) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$

* 4. Neka su $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ svi n-ti korijeni jedinice. Dokažite da vrijedi

$$(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1}) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}.$$

* 5. Ako je $|a| = |b| = |c| = r$ za $a, b, c \in \mathbb{C}$, dokažite da vrijedi

$$\left| \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \right| = r.$$

* 6. Ako vrijedi $|z| = 1$, pokažite da se broj z može prikazati u obliku $\frac{t+i}{t-i}$ pri čemu je $t \in \mathbb{R}$.

1.2 Geometrija kompleksne ravnine

Zadatak 1.2.1. Odredite i skicirajte skup točaka z u kompleksnoj ravnini za koje vrijedi

(a) $\operatorname{Im} z^2 > 2$

(b) $-\frac{\pi}{2} < \arg(z + 1 - i) < \frac{3\pi}{4}$,

gdje smo s $\arg(z + 1 - i)$ označili onaj kut iz $\operatorname{Arg}(z + 1 - i)$ koji je unutar $\langle -\pi, \pi]$.

Zadatak 1.2.2. Koje su krivulje određene sljedećim jednadžbama?

(a) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

(b) $|z - z_0| = 6$

(c) $|z - i| + |z + i| = 4$

(d) $z\overline{z} + i(z - \overline{z}) = 2$

Zadatak 1.2.3. Neka za kompleksni broj a i realni broj β vrijedi $\beta < |a|^2$. Dokažite da tada jednadžba

$$|z|^2 - \overline{a}z - a\overline{z} + \beta = 0$$

predstavlja kružnicu. Odredite joj središte i polumjer.

Zadaća 1.2.

1. Odredite podskup kompleksne ravnine određen sljedećim (ne)jednakostima.

   (a) $|z - 1| < |z - i|$

   (b) $|z - 3| - |z + 3i| = 5$

   (c) $4 < |z - 1| + |z + 1| < 8$

2. Koje su krivulje u kompleksnoj ravnini određene sljedećim jednadžbama?

   (a) $z(t) = a + (b - a)t, \ \ t \in [0, 1], \ \ \text{gdje je } a, b \in \mathbb{R}$

   (b) $z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t, \ \ t \in [0, 1], \ \ \text{gdje je } z_0, z_1 \in \mathbb{C}$

   (c) $z(t) = Re^{it}, \ \ t \in [0, \pi], \ \ \text{gdje je } R > 0$

   (d) $z(t) = t + it^2, \ \ t \in [0, \infty\rangle$

(e) $z(t) = t + \frac{i}{t}, \ \ t \in [1, \infty\rangle$

* 3. Neka su $z_1, \ldots, z_n$ vrhovi pravilnog n-terokuta upisanog jediničnoj kružnici $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, te z bilo koja točka te kružnice. Dokažite da tada vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = 2n.$$

* 4. Neka je $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ i $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Dokažite da su tada točke z_1, z_2, z_3 vrhovi jednakostraničnog trokuta upisanog u jediničnu kružnicu.

1.3 Derivacija kompleksne funkcije

Definicija. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ je *neprekidna u točki* $z_0 \in \Omega$ ako $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ takav da

$$(\forall z \in \Omega)\left(|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon\right).$$

Vrijedi sljedeće. Funkcija f je neprekidna u točki $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ ako i samo ako je funkcija f shvaćena kao funkcija $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ neprekidna u točki (x_0, y_0).

Definicija. Za funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, kažemo da je *derivabilna u točki* $z_0 \in \Omega$, ako postoji limes

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

U tom slučaju limes označavamo s $f'(z_0)$ i zovemo derivacija funkcije f u točki z_0. Za funkciju f kažemo da je derivabilna ako je derivabilna u svim točkama svoje domene Ω.

Možemo pisati $f = u + iv$, tj. $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z \in \Omega$, gdje su $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ realne funkcije shvaćene kao funkcije jedne kompleksne ili dvije realne varijable.

Primjer 1. $f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0 + z_0)^n - z_0^n}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \tfrac{1}{z - z_0}\left((z - z_0)^n + \tbinom{n}{1}(z - z_0)^{n-1} z_0 + \ldots + \tbinom{n}{n-1}(z - z_0) z_0^{n-1} + z_0^n - z_0^n\right) \\
&= \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^{n-1} + \tbinom{n}{1}(z - z_0)^{n-2} z_0 + \ldots + \tbinom{n}{n-2}(z - z_0) z_0^{n-2} + \tbinom{n}{n-1} z_0^{n-1}\right) \\
&= \lim_{z \to z_0} \tbinom{n}{n-1} z_0^{n-1} = n z_0^{n-1}
\end{aligned}$$

Dakle, limes postoji za svaki $z_0 \in \mathbb{C}$, tj. funkcija f je derivabilna i pišemo

$$f'(z_0) = n z_0^{n-1}.$$

Napomena. Diferencijabilnost funkcija $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ u točki $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ne povlači derivabilnost funkcije $f = u + iv\colon \Omega \to \mathbb{C}$ u točki $z_0 = x_0 + iy_0$.

Primjer 2. $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Zapišimo prvo $z - z_0$ u trigonometrijskom obliku, $z - z_0 = |z - z_0|(\cos\phi + i\sin\phi)$. Zatim računamo

$$\begin{aligned}\frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \frac{|z - z_0|(\cos\phi - i\sin\phi)}{|z - z_0|(\cos\phi + i\sin\phi)} = \frac{\cos\phi - i\sin\phi}{\cos\phi + i\sin\phi}\cdot\frac{\cos\phi - i\sin\phi}{\cos\phi - i\sin\phi}\\ &= \frac{(\cos\phi - i\sin\phi)^2}{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = (\cos(-\phi) + i\sin(-\phi))^2\\ &= \cos(-2\phi) + i\sin(-2\phi) = \cos 2\phi - i\sin 2\phi\end{aligned}$$

Ne postoji $\lim\limits_{z\to z_0}(\cos 2\phi - i\sin 2\phi)$, $\phi \in \operatorname{Arg}(z - z_0)$. Dakle, konjugiranje $z \mapsto \overline{z}$ nije derivabilna funkcija iako su joj i realni i imaginarni dio kao realne funkcije realnih varijabli diferencijabilne funkcije:

$$u(x, y) = x$$

$$v(x, y) = -y$$

Što funkcije u i v moraju zadovoljavati da bi $f = u + iv$ bila derivabilna funkcija?

Teorem. (Cauchy-Riemannov teorem) Kompleksna funkcija $f = u + iv\colon \Omega \to \mathbb{C}$ je derivabilna u točki $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ ako i samo ako su funkcije u i v diferencijabilne u (x_0, y_0) i zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete:

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0),$$

$$\partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0).$$

Ako je funkcija f derivabilna u $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ onda je

$$f'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0).$$

Slično,

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \partial_x u(x_0, y_0) - i\partial_y u(x_0, y_0)\\ f'(z_0) &= \partial_y v(x_0, y_0) - i\partial_y u(x_0, y_0)\\ f'(z_0) &= \partial_y v(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Korolar. Ako je funkcija $f = u + iv\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna, a realne funkcije u i v su diferencijabilne klase C^2, onda su u i v harmoničke funkcije, tj. obje zadovoljavaju Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Za funkciju $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$ imamo $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$, pa je

$$\partial_x u(x, y) = 1, \quad \partial_y v(x, y) = -1,$$

iz čega proizlazi da f nije derivabilna niti u jednoj točki $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Zadatak 1.3.1. U kojim točkama su sljedeće funkcije derivabilne?

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

(b) $f(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$

(c) $f(z) = |z|^2$

Napomena. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Ako su funkcije $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilne, onda su i funkcije $f + g$, $f \cdot g$ te $\frac{f}{g}$ (na otvorenom skupu gdje je $g \neq 0$) derivabilne.

Zadatak 1.3.2. Koje su od sljedećih funkcija harmonijske?

(a) $u(x, y) = x^2 + y$

(b) $u(x, y) = -2e^x \cos y$

(c) $u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y - y^2$

(d) $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$

Zadatak 1.3.3. Odredite funkciju v tako da kompleksna funkcija $f = u + iv$ kojoj je realni dio

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$$

bude derivabilna, ako takva postoji.

Općenito vrijedi sljedeće. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje (tj. otvoren i povezan skup). Ako je zadan realni dio u derivabilne funkcije $f = u + iv$, onda se njen imaginarni dio v može dobiti formulom

$$v(x, y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\, \mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y)\, \mathrm{d}y + C.$$

Obratno, ako je zadan imaginarni dio v, realni dio u može se dobiti formulom

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\, \mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y)\, \mathrm{d}y + C.$$

Ovdje je $(x_0, y_0) \in \Omega$ i $C \in \mathbb{R}$ je neka konstanta.

Zadaća 1.3.

1. Odredite u kojim su točkama sljedeće funkcije derivabilne.

   (a) $f(z) = z^2\,\overline{z}$

   (b) $f(z) = z^2(z+1)$

   (c) $f(z) = |z|\,\overline{z}$

   (d) $f(z) = \overline{z}\,\mathrm{Im}\,z$

   (e) $f(x+iy) = x^2y^2$

   (f) $f(x+iy) = x^2 + iy^2$

2. Može li funkcija $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ biti realni dio neke derivabilne kompleksne funkcije? Ako može, odredite tu funkciju.

3. Može li funkcija $v(x,y) = e^x \sin y + y^2$ biti imaginarni dio neke derivabilne kompleksne funkcije? Ako može, odredite tu funkciju.

4. Odredite derivabilnu funkciju f kojoj je imaginarni dio $v(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + x$ ako takva postoji.

* 5. Neka je u harmonijska funkcija.

   (a) Je li tada nužno u^2 harmonijska funkcija? Dokažite da jest ili opovrgnite protuprimjerom.

   (b) Za koje funkcije ψ je $\psi \circ u$ harmonijska funkcija?

1.4 Elementarne funkcije

S jednom od elementarnih funkcija već smo se susreli, to je n-TA POTENCIJA. Funkcija $f\colon z \mapsto z^n$ za $n \in \mathbb{N}$ derivabilna je na $\mathbb{C}$ i njezina derivacija je $f'\colon z \mapsto nz^{n-1}$.

EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA definirana je formulom

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy.$$

Vrijedi sljedeće.

- ◇ Ako je $z \in \mathbb{R}$, onda se vrijednost funkcije $z \mapsto e^z$ podudara s vrijednosti realne funkcije $x \mapsto e^x$ realne varijable x.

- ◇ Ako je $z \in i\mathbb{R}$, onda je $e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y \in S^1$.

- ◇ Funkcija $z \mapsto e^z$ je periodična, s periodom $2\pi i$. Zaista, vrijedi

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

◇ Vrijedi $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ za $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Zaista, uz $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$\begin{aligned}
e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}((\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)) \\
&= e^{x_1+x_2} \left(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\right) \\
&= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\
&= e^{z_1+z_2}
\end{aligned}$$

Zadatak 1.4.1. Dokažite da je eksponencijalna funkcija derivabilna.

Zadatak 1.4.2. Riješite jednadžbe:

(a) $e^z + i = 0$

(b) $e^{ix} = \cos \pi x, \ \ x \in \mathbb{R}$

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Dakle, imamo

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \qquad (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

HIPERBOLIČKE FUNKCIJE

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

Logaritamska funkcija. Kod realnih funkcija realne varijable logaritamska funkcija je inverzna eksponencijalnoj funkciji. Kompleksna eksponencijalna funkcija je periodična, pa nije bijekcija. Međutim, eksponencijalna funkcija je injektivna na svakoj horizontalnoj pruzi bez ruba koja je širine 2π, pa restrikcija eksponencijalne funkcije na svaku takvu prugu ima svoju inverznu funkciju. Za $z \in \mathbb{C}$ definiramo

$$\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}.$$

Za $w = u + iv$ iz $e^w = z$ slijedi $|e^w| = e^u = |z|$, to jest

$$u = \ln |z|.$$

Nadalje,

$$\arg e^w = \arg(e^u(\cos v + i \sin v)) = v = \arg z.$$

Za $z \neq 0$ vrijedi

$$\operatorname{Ln}\ z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \{\ln |z| + i(\arg\ z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Za $k \in \mathbb{Z}$ stavimo

$$\ln_k z := \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi).$$

Ta se funkcija naziva *k-ta grana logaritamske funkcije.* Posebno, za $k = 0$ dobivamo *glavnu vrijednost logaritamske funkcije* i označavamo je sa

$$\ln z := \ln |z| + i \arg z.$$

Vrijedi

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln z + i\, 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Glavna grana logaritamske funkcije preslikava skup

$$\mathbb{C}_\pi := \mathbb{C} \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$$

na prugu $\{(x, y) : -\pi < y < \pi\}$, ako se dogovorimo da uzimamo $\arg z \in \langle -\pi, \pi]$. Proučimo funkciju

$$\arg\colon \mathbb{C}_\pi \to \langle -\pi, \pi\rangle.$$

Označimo $z = x + iy$, $\arg z = \phi$. Vrijedi

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x} \text{ za } x \neq 0,$$

$$\operatorname{ctg} \phi = \frac{x}{y} \text{ za } y \neq 0.$$

Znamo koje su kodomene pripadnih arkus funkcija,

$$\operatorname{arc\,tg}\colon \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle, \qquad \operatorname{arc\,ctg}\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \pi\rangle.$$

Dakle,

za $\phi \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, to jest $x > 0$, je $\phi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, za $\phi \in \langle 0, \pi\rangle$, to jest $y > 0$, je $\phi = \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y}$,

a za $\phi \in \langle -\pi, 0\rangle$, to jest $y < 0$, je $\phi = \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y} - \pi$.

Možemo zbog toga definirati

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, & x > 0 \text{ (desna poluravnina)} \\ \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y}, & y > 0 \text{ (gornja poluravnina)} \\ \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y} - \pi, & y < 0 \text{ (donja poluravnina)} \end{cases}$$

Na desnoj poluravnini vrijedi

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

pa je

$$\partial_x u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \partial_y v(x,y), \qquad \partial_y u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} = -\partial_x v(x,y),$$

to jest zadovoljeni su Cauchy-Riemannovi uvjeti. Vrijedi

$$(\ln z)' = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

Slično se pokaže da je funkcija derivabilna na gornjoj i na donjoj poluravnini, dakle derivabilna je na cijelom $\mathbb{C}_\pi$.

Za svaki kut $\phi \in \mathbb{R}$ postoji pripadna kompleksna logaritamska funkcija s otvorenog skupa

$$\mathbb{C}_\phi = \mathbb{C}_{\phi+2\pi} = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\phi} \mid r \in \mathbb{R},\ r \geq 0\}$$

na otvoren skup

$$\begin{aligned} U_\phi^{\phi+2\pi} &= \{x+iy \mid x,y \in \mathbb{R},\ \phi < y < \phi + 2\pi\} \\ &= \{re^{i\psi} \mid r \in \mathbb{R},\ r > 0,\ \phi < \psi < \phi + 2\pi\} \end{aligned}$$

i ona je zadana sa

$$\ln_\phi z = \ln|z| + i \arg_\phi z,\ z \in \mathbb{C}_\phi,$$

gdje je s $\arg_\phi z$ za $z \in \mathbb{C}_\phi$ označen jedinstveni kut iz $\langle \phi, \phi + 2\pi\rangle$ takav da je $z = |z|e^{i \arg_\phi z}$.

Zadatak 1.4.3. Riješite jednadžbe:

(a) $\ln(i - z) = 1$

(b) $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$

(c) $\sin z + \cos z = 2$

(d) $|\operatorname{tg} z| = 1$

Zadatak 1.4.4. Funkcijom $f(z) = e^z$ preslikajte sljedeće skupove:

(a) $\left\{x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x < +\infty,\ 0 < y < \frac{\pi}{2}\right\}$

(b) $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\infty < x < 0,\ 0 < y < 2\pi\}$

Zadatak 1.4.5. Funkcijom $f(z) = \ln z$ preslikajte skup

$$G = \left\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Opća potencija. Neka je $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Opća potencija* $z \mapsto z^a$ definira se formulom

$$z^a := e^{a \operatorname{Ln} z},$$

a *opća eksponencijalna funkcija* $z \mapsto a^z$ formulom

$$a^z := e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Uočimo da su z^a i a^z po ovoj definiciji skupovi, a njihove glavne vrijednosti su redom vrijednosti $e^{a \ln z}$ i $e^{z \ln a}$.

Zadatak 1.4.6. Izračunajte:

(a) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$

(b) $(-1)^{\sqrt{2}}$

Arkus (ciklometrijske) funkcije. Za $z \in \mathbb{C}$ definiramo

$$\operatorname{Arc}\sin z := \{w \in \mathbb{C} \mid \sin w = z\} \qquad \operatorname{Arc}\cos z := \{w \in \mathbb{C} \mid \cos w = z\}$$
$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{tg} w = z\} \qquad \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} z := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ctg} w = z\}$$

Vrijedi sljedeće,

$$w \in \operatorname{Arc}\sin z \ \Leftrightarrow\ z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \ \Leftrightarrow\ e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (e^{iw} - iz)^2 + z^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}.$$

U ovoj formuli $\sqrt{1-z^2}$ označava dvije vrijednosti drugog korijena, zbog toga ne pišemo predznake $\pm$. Pri računanju korijena treba uzeti u obzir obje njegove vrijednosti. Dakle, vrijedi

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Slično se dobije

$$\operatorname{Arc}\cos z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$
$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$
$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}$$

Zadatak 1.4.7. Izračunajte:

(a) $\operatorname{Arc}\cos i$

(b) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{i}{3}$

Zadaća 1.4.

1. Izračunajte

   (a) $i^{\sin i}$

   (b) $(4-3i)^{1+i}$

   (c) $\operatorname{Ln}(3-2i)$

   (d) $\cos(2+i)$

2. Riješite jednadžbe:

   (a) $\operatorname{ch} z - i = 0$

   (b) $4\cos z + 5 = 0$

   (c) $\ln(z+i) = 0$

   (d) $\cos z = \operatorname{ch} z$

3. Funkcijom $f(z) = e^z$ preslikajte skup
$$G = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi\}.$$

4. Odredite i skicirajte domenu funkcije $f(z) = \ln(z^2 + 2z)$.

* 5. Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju:

   Neka je $z, w, \frac{z}{w} \in \mathbb{C}_\pi$. Tada je $\ln(\frac{z}{w}) = \ln z - \ln w$.

Dodatni zadaci 1.

1. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija. Dokažite sljedeće tvrdnje.

   (a) Ako je slika od f sadržana u $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, onda je f konstantna funkcija.

   (b) Ako je funkcija $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ definirana s $g(z) = f(\bar{z})$, $z \in \Omega$ derivabilna na Ω, onda je f konstantna funkcija.

   (c) Ako je $z \mapsto |f(z)|$ konstantna funkcija, onda je f konstantna funkcija.

2. Dokažite ili opovrgnite:

   (a) Ako je funkcija f definirana na disku $K(0,1)$ takva da je funkcija $f^2 = f \cdot f$ derivabilna na $K(0,1)$, onda je i funkcija f derivabilna na $K(0,1)$.

   (b) Ako je funkcija f kao funkcija dvije realne varijable klase C^1 na $K(0,1)$ i ako je funkcija f^2 derivabilna na $K(0,1)$, onda je i funkcija f derivabilna na $K(0,1)$.