a, v_a, t_a

Ia

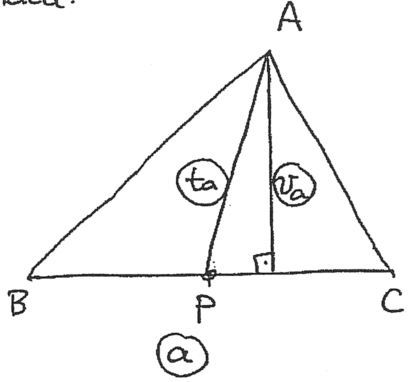
Konstruirajte trokut ABC kojemu su zadane:

a = duljina stranice $\overline{BC}$

v_a = duljina visine iz vrha A

t_a = duljina težišnice iz vrha A

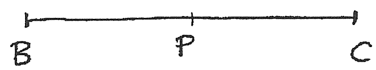
Skica:



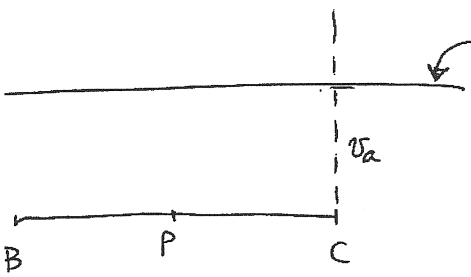
Analiza:

Možemo pro konstruirati dužinu $\overline{BC}$ (duljine je a), točka A je udaljena od polovišta te dužine za t_a i od pravca BC za v_a, pa ćemo je dobiti kao presjek kružnice i pravca.

Konstrukcija:

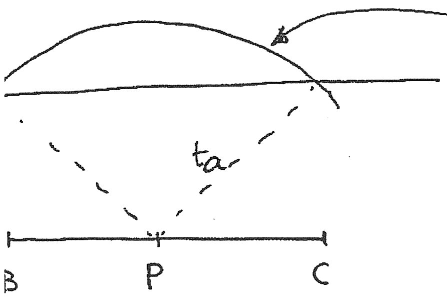


Konstr. dužinu $\overline{BC}$ duljine a, i njeno polovište P.



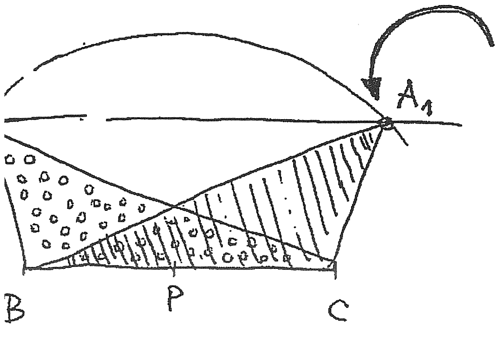
Konstruiramo pravac p na udaljenosti v_a od pravca BC.

(Znamo da se A nalazi na tom pravcu!)



Konstruiramo kružnicu k sa središtem u P radijusa t_a.

(Znamo da se A nalazi na toj kružnici!)



Presjek pravca p i kružnice k je točka A.

a, v_a, t_a I6

Dokaz: Trebamo dokazati da je

- duljina stranice $\overline{BC}$ zaista a ← jasno iz konstrukcije

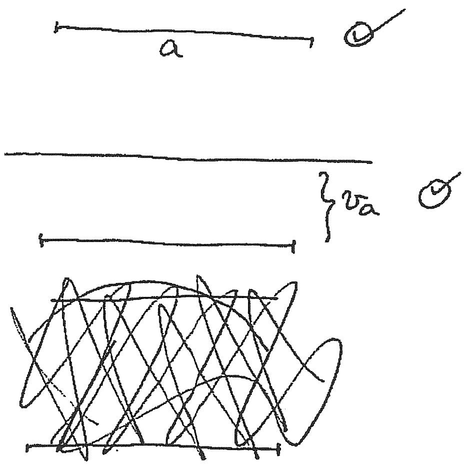
- duljina visine iz A zaista v_a ← (iz konstrukcije znamo da) točka A je udaljena od pravca BC za v_a, pa će i visina trokuta iz vrha A biti duljine v_a ✓
- $\overline{AP}$ je težišnica i duljina je t_a

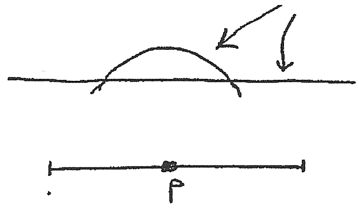
↑ treba dokazati da je P polovište
✓ jasno, tako je konstruirano

↑ treba dokazati da je $|AP| = t_a$
✓ jasno, jer je A na kružnici radijusa t_a sa središtem u P.

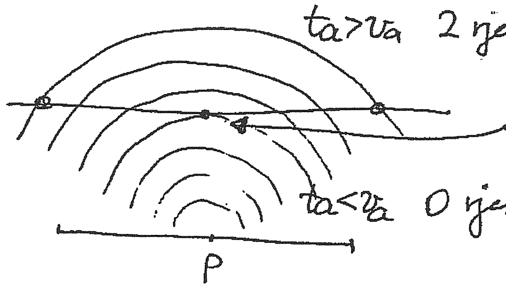
To je to!

Diskusija:





siječu li se kružnica i pravac? kada?



$t_a > v_a$ 2 rješenja (sukladna) 2

$t_a = v_a$ 1 rješenje 1 (jednakokr. trokut)

$t_a < v_a$ 0 rješenja 0

Dakle, $t_a < v_a$ nema rješenja

$t_a = v_a$ jedno rješenje (jednakokračan trokut)

$t_a > v_a$ dva rješenja (dva sukladna trokuta)

α, b, t_a

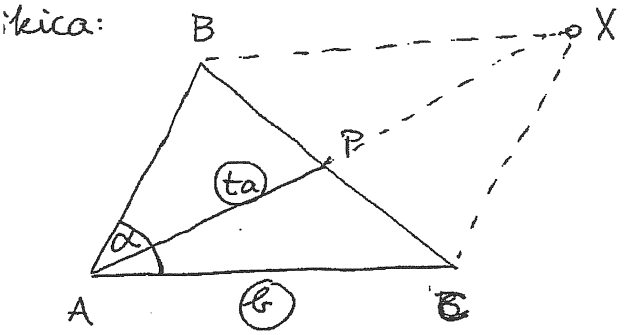
α mjera kuta u vrhu A

b duljina stranice $\overline{AC}$

t_a duljina težišnice iz vrha A

IIa

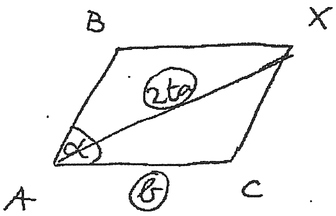
Skica:



Analiza:

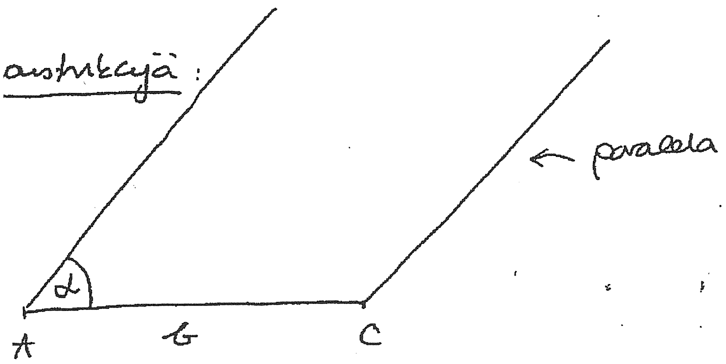
Ako produžimo težišnicu preko točke P za duljinu ta, dobit ćemo četverokut ACXB čije se dijagonale raspolavljaju!

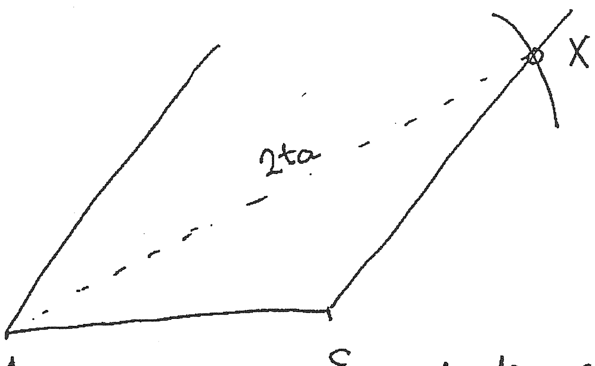
dijagonale se raspolavljaju $\Longrightarrow$ paralelogram



lako konstruirati!

Konstrukcija:

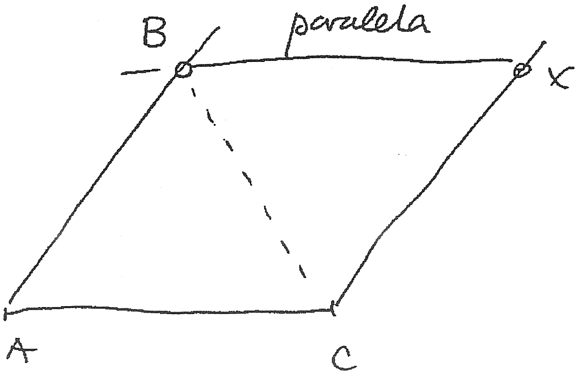


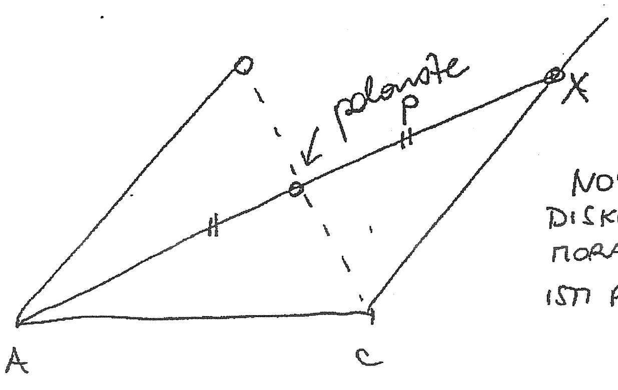


Dokaz će se razlikovati ako su konstrukcije drugačije!

Ponekad je dokaz teže provesti za jednu nego što je za drugu, ponekad je diskusiju kompliciranije provesti.

odavde imamo dva načina:





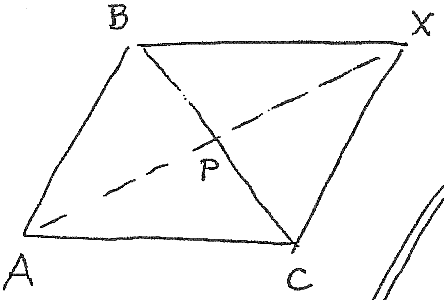
NO!
DISKUSIJA
MORA IMATI
ISTI REZULTAT

Dokaz: Trebamo dokazati

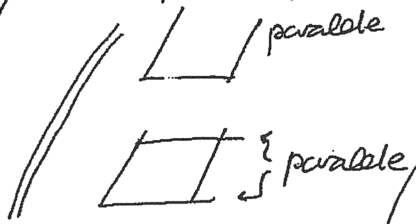
- mjera kuta u vrhu A je zadana α ✓
- duljina stranice $\overline{AC}$ je zadana b ✓
- duljina težišnice iz vrha A je zadana t_a

↑

iz konstrukcije znamo:



ACXB paralelogram



Dijagonale paralelograma se raspolavljaju!

⇓

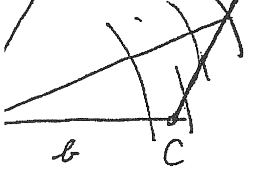
iz konstrukcije $|AX| = 2t_a$

$\overline{AP}$ je duljine $\frac{1}{2} \cdot 2t_a = t_a$ ✓

P je polovište od $\overline{BC}$ jer je P sjecište dijagonala i $\overline{BC}$ je dijagonala.

Rasprava:

Pitanje je jedino da li kružnica sa središtem u A siječe polupravac iz C

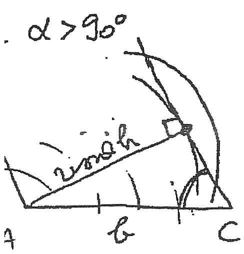


$2t_a \leq b$ NEMA RJ.

$2t_a > b$ JEDNO RJEŠENJE

za $\alpha \leq 90°$!

$\alpha > 90°$



$2t_a < h$ NEMA

$2t_a = h$ 1 rješenje

$h < 2t_a < b$ 2 rješenja

$2t_a \geq b$ 1 rješenje

$h = \sin\alpha \cdot b$

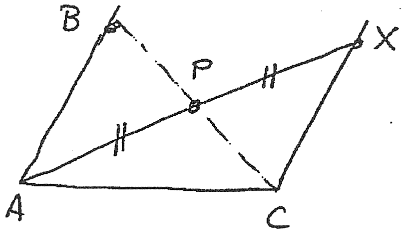
α, b, t_a II b

Dokaz: Trebamo dokazati

- α ✓
- $|AC| = \beta$ ✓
- $|AP| = t_a$ & P polovište od $\overline{BC}$

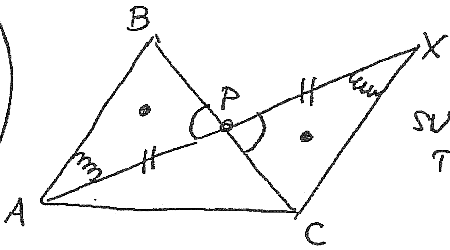
↑

znamo:



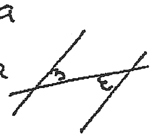
- jasno je da je $|AP| = t_a$ jer je P polovište dužine $\overline{AX}$ (iz konstrukcije) i dužina $\overline{AX}$ je duljine $2t_a$ (iz konstr.)

- kako dokazati da je P polovište od $\overline{BC}$?



SUKLADNOST TROKUTA!

∢ jer je AX transverzala dva paralelna pravca



∢ vršni kutovi

— jer je P polovište $\overline{AX}$

po teoremu KSK ta dva trokuta su sukladna

⟹ sve stranice su sukladne pa je i $|BP| = |PC|$ tj. P je polovište od $\overline{BC}$.

Dalje, rasprava je:

za $\alpha \leq 90°$

$2t_a \leq b$ (0)

$2t_a > b$ (1)

za $\alpha > 90°$

$2t_a < b\sin\alpha$ (0)

$2t_a = b\sin\alpha$ (1)

$b\sin\alpha < 2t_a < b$ (2)

$2t_a \geq b$ (1)