

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel

Martina Stojić

ALEXANDEROV POLINOM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Šime Ungar

Zagreb, siječanj 2010.

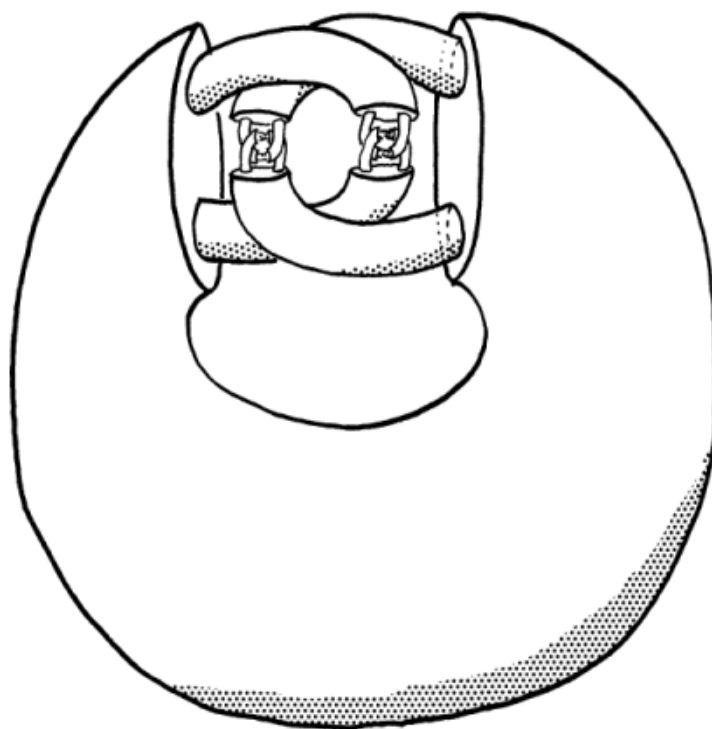
Sadržaj

1	Osnove	1
1.1	Uzao i ekvivalencije uzlova	1
1.1.1	Definicija linka i ekvivalencije linkova	2
1.1.2	Ekvivalentnost definicija ekvivalencije uzlova	3
1.1.3	Invarijante uzlova	5
1.2	Dijagram uzla i Reidemeisterovi potezi	6
1.2.1	Delta-potez i ekvivalencija linkova	6
1.2.2	Regularni položaj i dijagram uzla	6
1.2.3	Kombinatorna ekvivalencija	7
1.3	Simetrije uzlova i orijentacija	8
1.4	Povezana suma uzlova	8
1.5	Tablice uzlova	10
1.6	Spletни broj i dijagram linka	11
1.6.1	Spletни broj	11
2	Homologija komplementa linka	14
2.1	Grupa uzla	14
2.2	Puni torus i regularna okolina uzla	15
2.2.1	Meridijani i paralele	15
2.2.2	Torus smješten u prostor S^3	16
2.2.3	Regularna okolina uzla	16
2.3	Homologija komplementa uzla	17
2.3.1	Homologija vanjštine uzla	17
2.3.2	Istaknuti reper i spletни broj	19
2.4	Homologija komplementa linka	21
2.4.1	Homologija vanjštine linka	21
2.4.2	Spletни broj	22
3	Seifertove plohe	24
3.1	Klasifikacija ploha	24
3.2	Definicija i konstrukcija Seifertove plohe	25

3.2.1	Definicija Seifertove plohe	25
3.2.2	Konstrukcija Seifertove plohe	27
3.2.3	Primjeri Seifertovih ploha	28
3.3	Rod uzla	28
3.4	Seifertova ploha i spletni broj	30
3.4.1	Presječni broj	30
3.4.2	Spletni broj	32
3.4.3	Ekvivalentnost definicija spletnog broja	32
4	Beskonačno cikličko natkrivanje	34
4.1	Natkrivajući prostori	34
4.1.1	Definicija natkrivanja prostora	34
4.1.2	Svojstva podizanja preslikavanja	35
4.1.3	Natkrivanja prostora X i podgrupe od $\pi_1(X)$	36
4.1.4	Transformacije natkrivanja i regularna natkrivanja	37
4.1.5	Abelova natkrivanja i prva komutatorska podgrupa od $\pi_1(X)$	38
4.2	Ciklička natkrivanja vanštine linka	39
4.2.1	Rezanje po plohi	40
4.2.2	Konstrukcija prostorâ X_∞ i X_k	41
4.2.3	Grupa $H_1(X_\infty)$ je Λ -modul	42
4.2.4	Natkrivanje X_∞ i Λ -modul $H_1(X_\infty)$ ne ovise o F	44
4.2.5	Abelova natkrivanja vanštine linka	46
4.2.6	Generatori slobodnog Λ -modula $\bigoplus_i H_1(Y_i)$	46
5	Seifertova forma	47
5.1	Homologija ploha	47
5.2	Homologija komplementa plohe	48
5.3	Seifertova forma	51
5.3.1	Seifertova forma	51
5.3.2	Seifertova matrica	52
5.3.3	Seifertova matrica i presječni broj	52
5.3.4	Primjeri Seifertovih matrica	54
5.3.5	Neki generatori i relatori grupe $H_1(X_\infty)$	55
6	Alexanderov polinom	57
6.1	Prezentacija modula	57
6.2	Prezentacija Alexanderovog modula	58
6.2.1	Prezentacija abelove grupe $H_1(X_k)$	60
6.3	Elementarni ideali	62

6.4	Alexandrovi ideali i polinomi	65
6.4.1	Primjeri Alexanderovih polinoma uzlova	65
6.5	Svojstva Alexanderovog polinoma	68

Literatura	71
-------------------	-----------



Slika 1: Alexanderova sfera

Predgovor

Alexanderov polinom je invarijanta uzlova koju je 1923. godine otkrio J. W. Alexander, i sve do otkrića Jonesovog polinoma 1984. godine bio je jedina takva invarijanta uzlova. U svome radu *Topological Invariants of Knots and Links* 1928. godine Alexander je dao jednostavan način računanja polinoma iz dijagrama uzla, no Alexanderov polinom zapravo proistječe iz homologije beskonačnog cikličkog natkrivanja vanjštine uzla.

Mi ćemo u ovom radu razviti teoriju od osnova teorije uzlova, koristeći se metodama teorije trodimenzionalnih mnogostrukosti i algebarske topologije, da bismo na kraju definirali Alexanderov polinom. Ova tema predstavlja plodno tlo za putovanje kroz razne lijepe teme topologije: susrest ćemo se s homološkom teorijom, natkrivajućim prostorima, klasifikacijom ploha i problemom smještenja jednodimenzionalnih i dvodimenzionalnih mnogostrukosti u prostor S^3 .

U prvom poglavlju dat ćemo osnove teorije uzlova i opisati kombinatorni pristup proučavanju uzlova; uzlovi su povijesno bili proučavani kombinatorno pomoću dijagrama na samom početku razvoja teorije uzlova.

Zatim ćemo u drugom poglavlju izračunati homologiju vanjštine uzla u prostoru S^3 te spomenuti fundamentalnu grupu komplementa uzla i neke važne potpune invarijante uzlova.

Treće poglavlje daje Seifertove plohe, koje su orijentabilne plohe razapete uzlom u S^3 , i invarijantu uzlova koja potječe od roda plohe. Spletni broj uzlova, koji mjeri koliko se puta jedan uzao omata oko drugoga, u svakom od prva tri poglavlja bit će definiran sukladno s temom tog poglavlja; na kraju trećeg poglavlja sve te definicije zaokružiti ćemo u jednu.

U četvrtom poglavlju vanjstinu uzla prerezat ćemo po Seifertovoj plohi, uzeti prebrojivo mnogo kopija rezultata tog rezanja i zalijepiti ih jednu za drugom da bismo dobili beskonačno cikličko natkrivanje vanjštine uzla.

Peto poglavlje opisuje homologiju plohe i komplementa plohe smještene u S^3 ; iz toga će proizaći Seifertova forma i Seifertova matrica koja će nam kasnije omogućiti da opišemo prvu homološku grupu beskonačnog cikličkog prostora natkrivanja.

Šesto poglavlje bavi se homologijom prostora natkrivanja: grupa transformacija natkrivanja djelovat će na natkrivajući prostor i njegovu prvu homološku grupu, i tako od nje učiniti modul nad prstenom Laurentovih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Taj modul zove se Alexanderov modul, a Alexanderov polinom je generator njegovog prvog elementarnog ideala.

Zahvalila bih prof. dr. sc. Šimi Ungaru, voditelju ovog rada, na velikom strpljenju, korisnim savjetima i uputama, i odabiru ovako lijepe teme teorije topoloških prostora.

Martina Stojić
20. siječnja 2010.

Poglavlje 1

Osnove

U ovom poglavlju dat ćemo elementarni uvod u teoriju uzlova. Susrest ćemo se s različitim definicijama uzlova i ekvivalencije uzlova, dijagramom uzla i Reidemeisterovim potezima, invarijantama i povezanom sumom uzlova. Spletni broj, invarijanta uzlova s kojom ćemo se često susretati u ovom radu, ovdje će biti definirana pomoću dijagrama, a kasnije ćemo je definirati i proučavati metodama trodimenzionalnih mnogostrukosti i algebarske topologije. Povezana suma uzlova skupu uzlova daje strukturu monoida, i svaki uzao posjeduje jedinstvenu faktorizaciju na proste uzlove.

1.1 Uzao i ekvivalencije uzlova

Uzao (engl. knot) moguće je definirati na više načina. Jednostavno ga odrediti kao smještenje kružnice u prostor S^3 ili \mathbb{R}^3 , ili kao podskup homeomorfan kružnici, ostavlja mogućnost pojave divljih uzlova koje je izrazito teško proučavati. Zato se dodaje uvjet da je uzao gladak ili po dijelovima linearan. Općenito, te dvije teorije uzlova daju iste rezultate, uz drugačije metode.



Slika 1.1: Divlji uzao

1.1 Uzao i ekvivalencije uzlova

Ekvivalenciju uzlova također je moguće zadati na više načina: kombinatorna ekvivalencija pomoću dijagrama uzla K , ekvivalencija pomoću homeomorfizma para (S^3, K) ili čak izotopije para (S^3, K) — svaka pruža svoje metode, a daju također jednake teorije.

1.1.1 Definicija linka i ekvivalencije linkova

Definicija 1.1 Link s m komponenti je podskup prostora S^3 ili \mathbb{R}^3 , koji se sastoji od m disjunktne po dijelovima linearnih jednostavno zatvorenih krivulja. Link s jednom komponentom zove se uzao.

Po dijelovima linearna krivulja je svaka koja se sastoji od konačno mnogo ravnih segmenata, ravnih u linearnoj afinoj strukturi prostora \mathbb{R}^3 , samog ili kao podskupa prostora S^3 , ili drugačije, ravnih u nekom od simpleksa koji čine triangulaciju od S^3 . Uzlove bismo mogli definirati kao homeomorfne slike kružnice S^1 u S^3 , ali tako, bez konačnosti broja dijelova i linearnosti, ne bismo izbjegli pojavu divljih uzlova. Ovako ćemo svejedno zamišljati i crtati uzlove kao da se sastoje od velikog broja malih segmenata, toliko malih da ih golim okom ne vidimo. Po dijelovima linearna struktura primjenjivat će se na sve što ćemo koristiti, ali će se spominjati što je manje moguće. [Rourke-Sanderson, Hempel]

Definicija 1.2 Linkovi L_1 i L_2 su ekvivalentni ako postoji po dijelovima linearni homeomorfizam $h: S^3 \rightarrow S^3$ koji čuva orijentaciju prostora S^3 i prevodi L_1 u L_2 .

Ovdje po dijelovima linearan znači da nakon neke podjele simpleksâ u svakoj kopiji S^3 na manje simplekse, h preslikava simplekse u simplekse linearno (vrhove u vrhove i unutar svakog simpleksa linearno s obzirom na vrhove). Kompozicija takvih homeomorfizama je također po dijelovima linearan homeomorfizam jer su sve triangulacije od S^3 kompatibilne. Dakle, ekvivalentnost linkova je relacija ekvivalencije među linkovima. Često ćemo umjesto klase ekvivalencije linkova jednostavno govoriti link. Ako su linkovi orijentirani i komponente su označene, može se zahtijevati od homeomorfizma h da čuva i ta svojstva.

Osnovni teorem po dijelovima linearne topologije kaže da je takav h izotopan identiteti. To znači da postoji familija $\{h_t: S^3 \rightarrow S^3 \mid t \in [0, 1]\}$ takva da je $h_0 = 1$, $h_1 = h$ i preslikavanje $(x, t) \mapsto (h_t(x), t)$ je po dijelovima linearan homeomorfizam prostora $S^3 \times [0, 1]$ na samog sebe. Zbog toga možemo zamišljati da cijeli prostor S^3 neprekidno transformiramo koristeći familiju homeomorfizama h_t kroz vrijeme t , da bismo pomaknuli link L_1 u link L_2 .

1.1 Uzao i ekvivalencije uzlova

Dokaz da ekvivalencije uzlova pomoću homeomorfizma i pomoću izotopije daju iste klase uzlova dat ćemo u sljedećem odjeljku.

Teorem 1.1 *Neka je D^n n -dimenzionalna po dijelovima linearna kugla. Tada je svaki po dijelovima linearni homeomorfizam $h: D^n \rightarrow D^n$ po dijelovima linearno izotopan identiteti.*



Slika 1.2: Bachelor's unknoting

Kad bismo definirali ekvivalentnost izotopijom, ali se ograničili samo na izotopiju smještenjâ kružnica u S^3 , a ne cijelog prostora, ne bismo izbjegli mogućnost da zapetljani dio uzla postane sve manji i manji dok sva zapetljanost ne nestane u točki, a tada bi teorija uzlova bila trivijalna.

1.1.2 Ekvivalentnost definicija ekvivalencije uzlova

Dovoljno je pokazati da je svaki homeomorfizam sfere S^3 na samu sebe izotopan identiteti. Za početak, svaki homeomorfizam moguće je proširiti s ruba kugle na cijelu kuglu, i zato su svaka dva homeomorfizma kugle izotopna.

Lema 1.1 *Svaki PL homeomorfizam $\partial D^n \rightarrow \partial D^n$ moguće je proširiti do PL homeomorfizma $D^n \rightarrow D^n$.*

Dokaz. Ovo je jasno jer se homeomorfizam jednostavno može proširiti radijalno između ruba i središta kugle D^n . \square

Lema 1.2 *Svaka dva PL homeomorfizma $D^n \rightarrow D^n$ koja se podudaraju na rubu ∂D^n su PL izotopna.*

Dokaz. Ovo je posljedica prethodne leme primjenjene na kuglu $D^n \times I$. \square

Teorem 1.2 *Svaki PL homeomorfizam $D^n \rightarrow D^n$ koji čuva orijentaciju je PL izotopan identiteti.*

1.1 Uzao i ekvivalencije uzlova

Dokaz. Matematičkom indukcijom. Jasno je da tvrdnja vrijedi za homeomorfizam $D^0 \rightarrow D^0$. Lako je pokazati da, ako tvrdnja vrijedi za svaki homeomorfizam $S^n \rightarrow S^n$, tvrdnja vrijedi i za svaki homeomorfizam $D^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$. Teže je dokazati da, ako tvrdnja vrijedi za svaki homeomorfizam $D^n \rightarrow D^n$, vrijedi i za svaki homeomorfizam $S^n \rightarrow S^n$. To ćemo pokazati u sljedeće dvije leme.

Lema 1.3 *Pretpostavimo da je svaki PL homeomorfizam $S^n \rightarrow S^n$ koji čuva orijentaciju PL izotopan identiteti. Tada je i svaki PL homeomorfizam $D^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$ koji čuva orijentaciju PL izotopan identiteti.*

Dokaz. Neka je $f: D^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$ dani automorfizam kugle koji čuva orijentaciju. Promotrimo prostor $D^{n+1} \times I$ i homeomorfizam

$$h: D^{n+1} \times I \rightarrow D^{n+1} \times I,$$

takav da (i) h na $D^{n+1} \times \{0\}$ djeluje kao f , a na $D^{n+1} \times \{1\}$ kao identiteta, i (ii) h na cijevi $\partial D^{n+1} \times I$ djeluje kao izotopija između restrikcija homeomorfizma f i identitete na ∂D^{n+1} . Time je h definiran na rubu kugle $D^{n+1} \times I$, po prethodnoj lemi moguće ga je proširiti na cijeli $D^{n+1} \times I$, čime dobivamo traženu izotopiju identitete i homeomorfizma f . \square

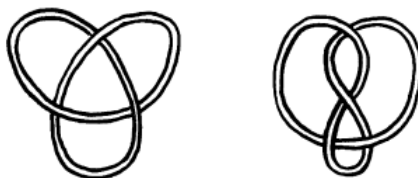
Lema 1.4 *Pretpostavimo da je svaki PL homeomorfizam $D^n \rightarrow D^n$ koji čuva orijentaciju PL izotopan identiteti. Tada je i svaki PL homeomorfizam $S^n \rightarrow S^n$ koji čuva orijentaciju PL izotopan identiteti.*

Dokaz. Ako postoji $D^n \subset S^n$ takav da je homeomorfizam na njemu identiteta, tada je on identiteta i na rubu ∂D^n , a budući da je zatvorenje od $S^n - D^n$ također D^n s istim rubom, moguće je homeomorfizam na tom ostatku izotopijom dovesti do identitete. Općenito, komplement kugle u S^3 ne mora biti kugla, primjer je poznata Alexanderova sfera; no ako je n -kugla u n -sferi po dijelovima linearna, njen rub je nužno lokalno plosnat pa vrijedi poopćeni Schönfliesov teorem. Ako ne postoji takav $D^n \subset S^n$, onda treba pokazati da postoji homeomorfizam izotopan početnom koji je identiteta na nekom $D^n \subset S^n$.

To je malo zapetljanije i sastoji se u tome da svaku točku u nutрини simpleksa linearnom izotopijom možemo dovesti u bilo koju drugu točku tog simpleksa tako da izvan simpleksa sve točke ostanu na mjestu. To vrijedi i za dva simpleksa koji dijele $(n - 1)$ -stranu. Zato svaku točku u S^n možemo dovesti u bilo koju drugu jer postoji niz simpleksa koji povezuju te dvije točke i koji se sijeku u $(n - 1)$ -stranama. Kada to učinimo s jednom točkom, dalje napravimo isto s drugom točkom koju smo odabrali u simplicijalnoj okolini prve, tako da nakon premještanja zajedno čine 1-simpleks koji ostaje fiksiran, i dalje sve dok ne stvorimo n -simpleks koji ostaje fiksiran. Precizan dokaz može se naći u [Burde-Zieschang, str. 6]. \square

1.1.3 Invarijante uzlova

Osnovni problem teorije uzlova je za dana dva uzla moći reći da li su ekvivalentni ili nisu. Obično se svakom uzlu pridruži neka vrijednost koja ne ovisi o reprezentantu njegove klase; takvo pridruživanje zove se *invarijanta uzlova*. Ako se vrijednosti invarijante za dva uzla razlikuju, jasno je da ti uzlovi nisu ekvivalentni. No ako se vrijednosti podudaraju, ne možemo znati jesu li uzlovi ekvivalentni ili nisu. Jedino u slučaju kad bismo pronašli *potpunu invarijantu uzlova*, tj. takvu da potpuno razlikuje uzlove, i uz to pronašli izvediv način računanja te invarijante, mogli bismo raspoznati uzlove. No, čak i kad ne postoji izvediv način računanja, potpune invarijante je zanimljivo proučavati jer time proučavamo sam skup uzlova.



Slika 1.3: Uzlovi trolist i osmica

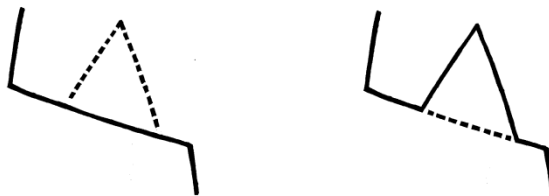
Kroz povijest se postavilo mnogo pitanja o invarijantama; jedno od njih je da li je uopće moguće pronaći takvu invarijantu ili je to izvan dosega izračunljivosti. Srećom (zapravo iskustvom, trudom i pameću), 1961. godine W. Haken je dokazao da to jest moguće, ali njegov algoritam stoji samo kao dokaz egzistencije jer je u stvarnosti neprimjenjiv. Dokaz se odnosi na izračunljivost usporedbe kompaktnih trodimenzionalnih mnogostrukosti, komplementa okolina uzlova.

Ako su dva linka ekvivalentna, njihovi su komplementi u S^3 homeomorfne 3-mnogostrukosti. Zato je moguće pokušati razlikovati linkove tako da se njihovim komplementima pridruži neka topološka invarijanta. Ta invarijanta može biti fundamentalna grupa ili grupa homologije, prostor natkrivanja, i sve što se može iz njih izvesti. Dokazano je da su dva uzla s homeomorfim orijentiranim komplementima nužno ekvivalentna pa je orijentirani komplement uzla potpuna invarijanta uzlova — teorija uzlova uže je vezana s teorijom trodimenzionalnih mnogostrukosti no što se čini na prvi pogled [Gordon-Luecke]. To ne vrijedi za linkove s više komponenti. Postoje i zanimljiviji rezultati, recimo, svaka 3-mnogostrukost može se dobiti Dehnovom kirurgijom na zatvorenju komplementa okoline uzla.

1.2 Dijagram uzla i Reidemeisterovi potezi

K. Reidemeister je 1926. godine dao elementarni uvod u teoriju uzlova stavljajući naglasak na kombinatorni aspekt problema, koji je također osnovno gledište njegove knjige *Knotentheorie*, prve monografije o teoriji uzlova, napisane 1932. godine. On je uveo ekvivalenciju linkova konačnim brojem transformacija koje ćemo sada opisati.

Najjednostavnija transformacija linka L unutar njegove klase ekvivalencije jest naći neki trokut u \mathbb{R}^3 koji siječe L u jednoj svojoj stranici, i zamijeniti tu stranicu u linku drugim dvjema stranicama trokuta. Taj potez zove se *delta-potez*, ili Δ -potez (engl. Δ -move) [Reidemeister].



Slika 1.4: Δ -potez

1.2.1 Delta-potez i ekvivalencija linkova

Može se pokazati da su dva linka ekvivalentna ako i samo ako su povezani konačnim brojem takvih transformacija i njihovih inverza. Ovaj rezultat nećemo dokazivati, jer dokaz bi previše zadirao u tehnike PL topologije. U radu ćemo ga koristiti samo da prikažemo kako se na dijagramima može zadati invarijanta uzlova.

Ekvivalenciju linkova mogli bismo zadati na tri različita i ekvivalentna načina: ekvivalencija postojanjem homeomorfizma koji čuva orijentaciju, ekvivalencija postojanjem izotopije homeomorfizama i ekvivalencija konačnim brojem delta-poteza [Burde-Zieschang].

1.2.2 Regularni položaj i dijagram uzla

Koristeći takve (proizvoljno male) Δ -poteze, link L možemo lako pomaknuti u položaj regularan s obzirom na standardnu projekciju $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ovdje regularnost položaja znači: (i) da se projekcijom svaki segment linka L preslikava u segment u \mathbb{R}^2 , zatim (ii) da se projekcije svaka dva segmenta

1.2 Dijagram uzla i Reidemeisterovi potezi

sijeku u najviše jednoj točki, koja za disjunktne segmente nije rubna točka, i (iii) da nijedna točka projekcije ne pripada projekcijama tri segmenta.

Slika regularne projekcije linka L u \mathbb{R}^2 , zajedno s informacijama o relativnim visinama dvije praslike svake presječne točke, zove se *dijagram linka L* . Relativnu visinu ćemo u dijagramu označavati malim prekidom u projekciji onog segmenta koji je ispod drugog u okolini presječne točke, a presječnu točku zvat ćemo *prijelazom* (engl. crossing). Jasno je da su dva linka koji posjeduju isti dijagram nužno ekvivalentna.

1.2.3 Kombinatorna ekvivalencija

Dva ekvivalentna linka povezana su konačnim brojem transformacija kao što je u prethodnom odjeljku spomenuto. Te transformacije mogu se odabrati tako da se pripadajući trokuti projiciraju regularno na \mathbb{R}^2 . Tada su njihove projekcije također trokuti pa možemo promatrati kako izotopija linka utječe na dijagram linka. Nakon podjele na dovoljno male transformacije, možemo pretpostaviti da projicirani trokut siječe dijagram linka na nekoliko jednostavnih načina.



Slika 1.5: Reidemeisterovi potezi

Svaka dva dijagrama ekvivalentnih linkova povezana su konačnim slijedom Reidemeisterovih poteza i homeomorfizama ravnine koji čuvaju orijentaciju (i informaciju o karakteristikama prijelaza). Postoje tri osnovna tipa Reidemeisterovih poteza, prikazani su na slici. Svaki potez mijenja malu okolinu prijelaza tako da zamijeni jednu konfiguraciju dijelova linka drugom; potez tipa I stvara ili uklanja petlju u dijagramu, potezi II i III čuvaju parnost broja prijelaza.

Važnost Reidemeisterovog otkrića povijesno je velika jer su na početku uzlovi bili proučavani većinom preko dijagrama — ono je omogućilo da provjera je li pridruživanje invarijantno obzirom na Reidemeisterove poteze dokaže ili opovrgne da je to pridruživanje invarijanta uzlova.

1.3 Simetrije uzlova i orijentacija

Već smo spomenuli da linkovi mogu biti orijentirani; za prostore S^3 i \mathbb{R}^3 uvijek ćemo pretpostavljati da su orijentirani. Link s n komponenti možemo orijentirati na 2^n načina i ta orijentacija može biti na dijagramu označena pomoću strelica.

Ako je K orijentirani uzao, definiramo *obrnuti uzao* od K (engl. reverse), uz oznaku rK , kao uzao koji je jednak uzlu K kao skupu, ali ima suprotnu orijentaciju. Mogli bismo definirati i obrnuti link, no moramo biti oprezni, jedini način da to dosljedno učinimo je da kažemo da je obrnuti link od L jednak linku L kao skupu, ali da je *svaka* komponenta od rL suprotno orijentirana od pripadajuće komponente od L .



Slika 1.6: Uzao 9_{32}

Ako je L link u S^3 i $\rho: S^3 \rightarrow S^3$ po dijelovima linearan homeomorfizam koji obrće orijentaciju prostora S^3 , onda za link $\rho(L)$ kažemo da je *zrcalni link* linka L (engl. obverse, reflection). Klasa ekvivalencije zrcalnog linka ne ovisi o odabiru homeomorfizma ρ , zato možemo jednoznačno zadati zrcalni link od L i $\rho(L)$ ćemo označiti s \bar{L} . Ako S^3 podrazumijevamo kao $\mathbb{R}^3 \cup \infty$ možemo recimo uzeti za ρ preslikavanje $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$. Iz tog preslikavanja je vidljivo da je dijagram linka \bar{L} jednak dijagramu linka L uz sve prijelaze izmijenjene.

Za neke uzlove će K i \bar{K} biti ekvivalentni, za neke neće. Jednako vrijedi i za uzlove K i rK . Postoje orijentirani uzlovi za koje su K , rK , \bar{K} i $r\bar{K}$ četiri različita uzla. Najjednostavniji takav uzao je uzao 9_{32} prikazan na slici.

1.4 Povezana suma uzlova

Definicija 1.3 Za uzao kažemo da je trivijalan (engl. unknot) ako je rub po dijelovima linearnog diska D^2 smještenog u S^3 .

Svaki takav uzao možemo prevesti u rub 2-simpleksa (trokuta) smještenog u S^3 delta potezima po triangulaciji diska, što znači da trivijalni uzao po-

1.4 Povezana suma uzlova

sjeduje dijagram bez prijelaza. Uzao koji posjeduje dijagram bez prijelaza je jasno trivijalan.

Dva uzla J i K možemo dodati jedan drugome i formirati *povezanu sumu* (engl. connected sum) uzlova J i K , u oznaci $J + K$. Intuitivno, povezano zbrajanje uzlova sastoji se u vezanju jednog i zatim drugog uzla na užu i spajanjem krajeva užeta. Precizno, uzmimo da su uzlovi J i K unutar dvije disjunktne kopije sfere S^3 , zatim uklonimo iz svake sfere S^3 (malu) kuglu B^3 čiji je presjek s uzlom K odnosno J nezapetljan luk (tj. par kugla-luk $(B^3, B^3 \cap K)$ je po dijelovima linearno homeomorfan kugli s istaknutim dijametrom, $(D^2, *) \times I$), i zatim poistovjetimo nastale rubne sfere i njihove presjeke s uzlovima tako da se orijentacije slažu.



Slika 1.7: Povezana suma uzlova

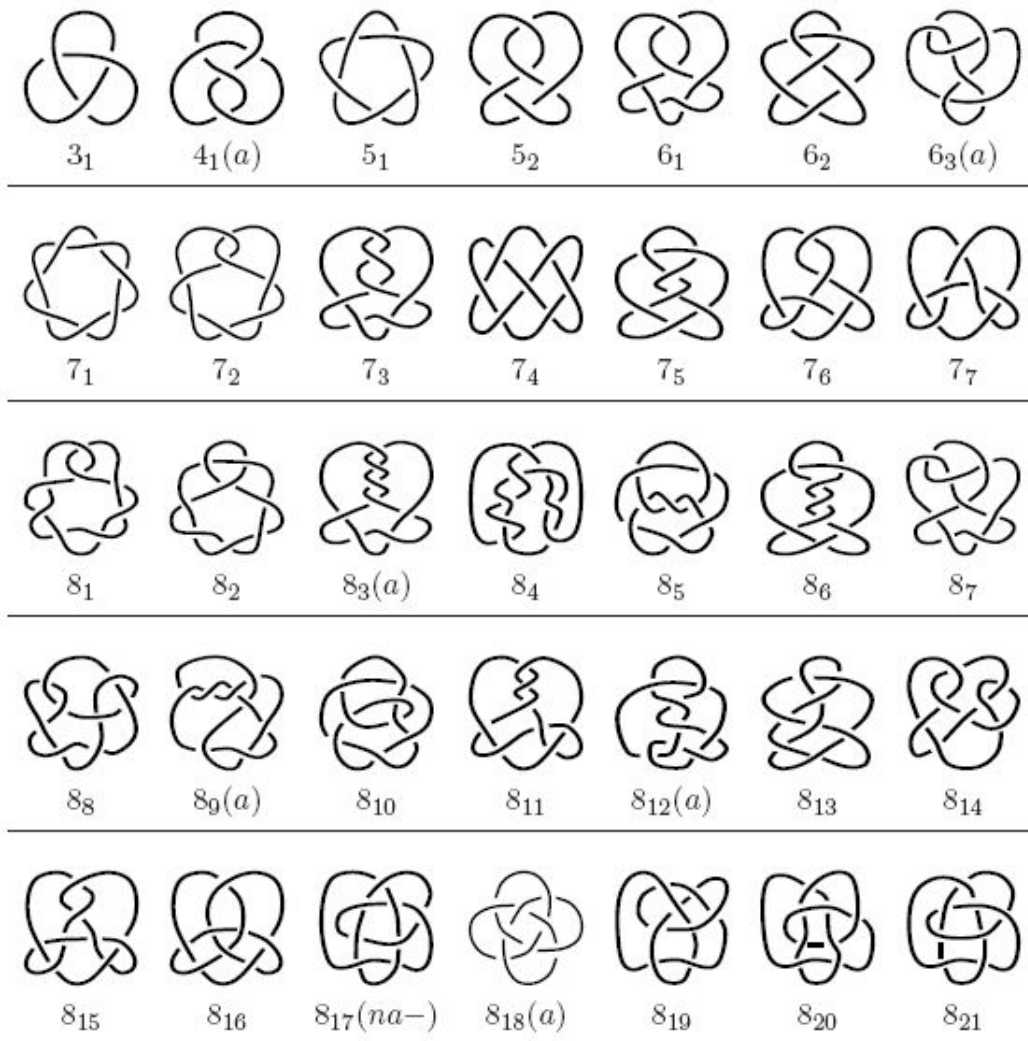
Osnovni rezultati PL topologije kažu da je kugla koja siječe uzao u nezapetljanom luku bitno jedinstvena pa je povezana suma orijentiranih uzlova (do na ekvivalenciju) dobro definirana. Trivijalni uzao je neutralni element za ovo zbrajanje, što skup uzlova čini monoidom. Niti jedan uzao nema inverz što nažalost nećemo dokazivati, a dokazuje se metodama teorije 3-dimenzionalnih mnogostrukosti koristeći aditivnost roda uzla — invarijante koju ćemo susresti kasnije. Lijep dokaz može se pronaći u [Lickorish, str. 17].

Definicija 1.4 *Kažemo da je uzao K prost (engl. prime) ako nije trivijalan i ako iz $K = J + L$ slijedi da je uzao J ili L trivijalan.*

Čini se da bi bilo bolje takav uzao nazvati ireducibilnim, ali ovaj naziv opravdan je poviješću i time da se svaki uzao na jedinstven način može prikazati kao suma prostih uzlova. Teorem o faktorizaciji uzlova također nažalost nećemo dokazivati. Lijep dokaz može se naći u [Lickorish, str. 19]. Dakle, netrivialni uzao K je prost ako nije suma dva netrivialna uzla, tj. ako ne postoji sfera S^2 smještena u prostor S^3 takva da (i) S^2 siječe K transverzalno u dvije točke, i (ii) zatvorenja dviju komponenti od $S^3 - S^2$ su netrivialni kugla-luk parovi.

1.5 Tablice uzlova

Jednostavne uzlove možemo zadati crtanjem dijagrama. Najmanji broj prijelaza potrebnih za dijagram uzla K zove se *prijelazni broj* $c(K)$ uzla K (engl. crossing number). Na slici se nalazi tablica svih prostih uzlova čiji prijelazni broj je najviše 8; uključujući i trivijalni uzao, postoji 36 takvih do na zrcaljenje i orijentaciju.



Slika 1.8: Tablica uzlova

Tradicionalno, trivijalni uzao i zrcalni uzlovi nisu prikazani, i orijentacija uzlova nije uzeta u obzir. Tako svaki uzao u tablici predstavlja moguće još tri

1.6 Spletni broj i dijagram linka

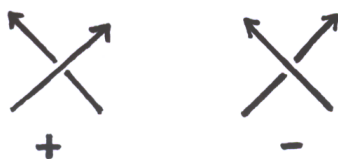
orijentirana uzla u S^3 , dobivena zrcaljenjem, obrtanjem orijentacije i kompozicijom te dvije operacije. Notacija 8_5 jednostavno znači da je to dogovorno peti uzao među uzlovima s prijelaznim brojem jednakim broju 8. Početak tablice slijedi notaciju koju su odabrali u devetnaestom stoljeću P. G. Tait i C. N. Little kad su ručno stvarali ono što je Tait smatrao mogućom tablicom elemenata. Naime, Tait je, zamijetivši otpornost kolutova dima u prostoru, smatrao da su atomi možda slični vrtlozi etera i da bi svojstva različitih atoma mogla biti objašnjena njihovom različitom zapetljanošću u prostoru [Nash].

1.6 Spletni broj i dijagram linka

Dijagrami uzlova vrlo su korisni u proučavanju uzlova, osobito uz Reidemeisterove poteze. K tome, dijagrami su pogodni za računanje vrijednosti invarijanti. Ipak, definicija invarijanti pomoću dijagrama često skriva pravu topološku strukturu u pozadini tog pridruživanja — topologiju smještenjâ kružnica u prostor S^3 . Takve su recimo invarijante Jonesov polinom i Kauffmanova zagrada. Drugim riječima, ponekad je pomoću dijagrama lako dokazati da neko pridruživanje jest invarijanta, a da uopće nije topološki jasno zašto to jest tako.

1.6.1 Spletni broj

Spletni broj (engl. linking number) koji mjeri koliko puta se jedna orijentirana jednostavno zatvorena krivulja omata oko druge, s kojim ćemo se često susretati u ovom radu, može se definirati i pomoću dijagrama linka.



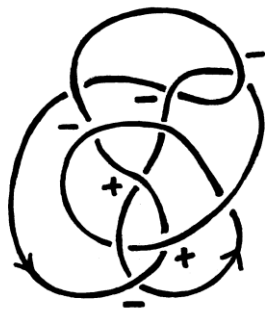
Slika 1.9: Pozitivan i negativan prijelaz

Prijelaz u dijagramu orijentiranog linka zovemo *pozitivnim* odnosno *negativnim prijelazom* ako jedan segment uzla (engl. strand) prelazi drugi segment po pravilu desne ruke odnosno lijeve ruke. Ova definicija zapravo ovisi o orijentaciji prostora, naš prostor S^3 dogovorno je orijentiran po pravilu desne ruke, tj. ima desnu bazu. Pozitivnom odnosno negativnom prijelazu

1.6 Spletni broj i dijagram linka

dodjeljujemo predznak $+1$ odnosno -1 . Zamijetimo da, ako uzlu obrnemo orijentaciju, predznaci prijelaza se ne mijenjaju. Jednako vrijedi i za linkove ako obrnemo orijentaciju svih komponenti.

Definicija 1.5 *Neka je L orijentirani link s dvije komponente J i K . Spletni broj $lk_0(J, K)$ je polovica sume predznaka prijelazâ u dijagramu linka gdje jedna komponenta prelazi preko druge komponente.*



Slika 1.10: Spletni broj iz dijagrama

Koristeći Reidemeisterov teorem lako je provjeriti da je spletni broj dobro definiran. Ako su dva linka ekvivalentna, postoji konačan niz Reidemeisterovih poteza koji prevodi dijagram jednog linka u dijagram drugog. Reidemeisterovi potezi II i III ne mijenjaju vrijednost spletnog broja, a potez I stvara ili uklanja prijelaz koji ne utječe na spletni broj. Spletni broj je dakle invarijanta dvikomponentnih linkova. Jasno je da je spletni broj simetričan:

$$lk_0(J, K) = lk_0(K, J).$$

Pridruživanje lk_0 možemo gledati kao pridruživanje $lk_0(J, K)$ paru disjunktivnih uzlova J i K , i kao pridruživanje $lk_0(L)$ linku $L = J \cup K$. Ovisno o tome možemo ga proširiti na sljedeće načine.

Za orijentirani link s više od dvije komponente možemo definirati *ukupni spletni broj* kao sumu spletnih brojeva svake kombinacije dvije različite komponente linka L . Tako možemo proširiti invarijantu na skup svih orijentiranih linkova,

$$lk_0(L) = \sum_{i < j} lk_0(K_i, K_j).$$

Za disjunktne orijentirane linkove L i M možemo definirati spletni broj kao sumu spletnih brojeva među njihovim komponentama,

$$lk_0(L, M) = \sum_{i, j} lk_0(L_i, M_j).$$

1.6 Spletni broj i dijagram linka

Nismo označili ovaj dijagramatski spletni broj bez razloga s lk_0 . Definicija spletnog broja pomoću dijagrama vrlo je upotrebljiva, no spletni broj je zapravo usko povezan s prvom grupom homologije komplementa uzla. Zato ćemo, sve dok ne dokažemo ekvivalenciju različitih definicija, dijagramatski spletni broj označavati s lk_0 , a onaj koji slijedi s lk . Sada dakle napuštamo ovu definiciju, ekvivalentnost te definicije i onih koje slijede (a bit će ih ukupno tri) dokazat ćemo kad ćemo se baviti Seifertovim plohama.

Poglavlje 2

Homologija komplementa linka

Istraživanje komplementa uzla bilo je od velike važnosti još od početaka teorije uzlova. H. Tietze je 1908. godine prvi dokazao da netrivialni uzlovi postoje tako što je izračunao fundamentalnu grupu komplementa trolista. On je postavio hipotezu da su dva uzla ekvivalentna ako i samo ako su homeomorfnih komplementata. C. M. Gordon i J. Luecke su 1988. godine dokazali da je ta hipoteza točna. Homologija komplementa uzla nije se pokazala plodnom za razlikovanje uzlova, no fundamentalna grupa jest; u ovom poglavlju razvit ćemo neke homološke metode koje će nam kasnije poslužiti da proučimo fundamentalnu grupu komplementa uzla.

2.1 Grupa uzla

Fundamentalna grupa komplementa uzla, *grupa uzla*, vrlo je bitna invarijanta uzlova — od ranih početaka korištena je u proučavanju uzlova. W. Wirtinger je 1905. godine dao jednostavnu metodu koja iz dijagrama uzla iznosi prezentaciju grupe uzla, *Wirtingerovu prezentaciju*. M. W. Dehn je 1910. godine definirao grupu uzla, i koristeći implicitno periferni sistem, o kojem ćemo govoriti kasnije, 1914. godine dokazao da lijevi i desni trolist nisu ekvivalentni.

R. Fox je 1952. godine uveo pojam perifernog sistema i pokazao da periferni sistem može razlikovati neke uzlove koje sama grupa uzlova ne može. Dehnova lema i Teorem o petlji i sferi (engl. Dehn Lemma, Loop and Sphere Theorem), koje je dokazao C. D. Papakyriakopoulos 1957. godine, omogućili su da F. Waldhausen 1968. godine pokaže da periferni sustav određuje komplement uzla i zato je potpuna invarijanta uzlova. Rezultati vezani uz Wirtingerovu prezentaciju i periferni sistem mogu se naći u [Burde-Zieschang, str. 32].

2.2 Puni torus i regularna okolina uzla

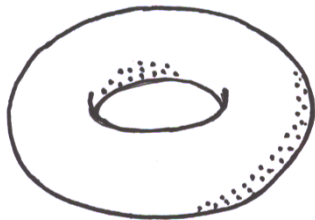
Zatvorena okolina kružnice smještene u S^3 je pun torus. Mi ćemo često umjesto komplementa uzla proučavati komplement njegove otvorene okoline — prednost je u tome što je komplement otvorene okoline, za razliku od komplementa uzla, kompaktna mnogostrukost.

2.2.1 Meridijani i paralele

Na rubu punog torusa N postoje dvije bitne krivulje, *meridijan* μ i *paralela* λ , koje se sijeku u jednoj točki i čije klase generiraju prvu homološku grupu torusa ∂N ,

$$H_1(\partial N) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

U torusu $S^1 \times S^1$ kao zasebnom prostoru, te dvije krivulje su općenito zamjenjive, no u rubu punog torusa bitno se razlikuju. Svaki automorfizam punog torusa N (koji čuva orijentaciju) nužno prevodi klasu $[\mu] \in H_1(\partial N)$ u istu klasu, za razliku od klase $[\lambda]$ koju može prevesti u bilo koju klasu $[\lambda] + k[\mu]$. Takav homeomorfizam možemo zamisliti tako da u mislima pre-režemo puni torus po disku razapetom meridijanom, zakrenemo ga (engl. twist) oko njegove osi k puta, i opet zalijepimo. Zato je na rubu punog torusa, do na homolognost i orijentaciju, meridijan μ moguće jednoznačno zadati, a paralelu λ nije.



Slika 2.1: Puni torus

Bitna krivulja u ∂N koja razapinje disk u punom torusu N zove se *meridijan punog torusa* N , a sve bitne krivulje λ u ∂N takve da je, uz neku orijentaciju, $[\lambda] = 1$ u $H_1(N) \cong \mathbb{Z}$ *paralele punog torusa* N .

Birajući generatore slobodne abelove grupe $H_1(\partial N)$, klasa $[\mu]$ ističe se kao jedini nedjeljivi element grupe $H_1(\partial N)$ koji je trivijalan u $H_1(N)$:

$$[\mu] = 0 \in H_1(N) \quad \text{i} \quad [\mu] \text{ je nedjeljiva u } H_1(\partial N),$$

2.2 Puni torus i regularna okolina uzla

dok su sve klase $[\lambda] + k[\mu]$ u $H_1(\partial N)$ automorfizmima punog torusa N međusobno zamjenjive, i imaju sljedeća svojstva:

$$[\lambda] + k[\mu] = 1 \in H_1(N) \quad \text{i} \quad [\lambda] + k[\mu] \text{ je nedjeljiva u } H_1(\partial N).$$

2.2.2 Torus smješten u prostor S^3

Smjestimo sada puni torus N *standardno* u S^3 . Zatvorenje njegovog komplementa $S^3 - N$ također je pun torus standardno smješten u S^3 , nazovimo ga X . Prostor S^3 sada je unija dva puna torusa N i X čiji presjek je torus $X \cap N = \partial X = \partial N$. Meridijan punog torusa X jedna je od paralela punog torusa N , zato je sada moguće i među paralelama punog torusa N jedinstveno (do na homolognost i orijentaciju u $H_1(\partial N)$) odabrati jednu. Odaberimo paralelu punog torusa N koja je meridijan punog torusa X , tu krivulju zvat ćemo *paralela punog torusa N* standardno smještenog u S^3 .



Slika 2.2: Torus smješten u prostor S^3

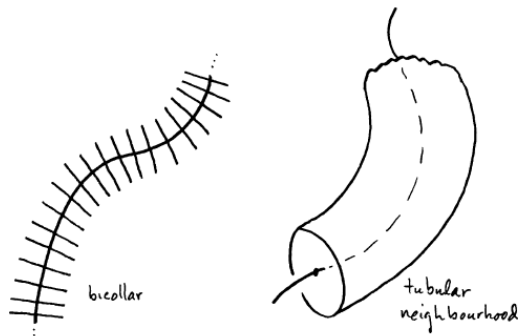
Ako puni torus N nije standardno smješten u S^3 , zatvorenje njegovog komplementa ne mora biti pun torus. No, ipak, sustav (μ, λ) meridijana i paralele može se do na orijentaciju i homolognost u ∂N jedinstveno zadati, što ćemo uskoro pokazati.

2.2.3 Regularna okolina uzla

Uzao K je kružnica po dijelovima linearno smještena u S^3 dakle potkompleks od S^3 . Njegova *regularna okolina* N je simplicijalna okolina od K u drugoj izvedenoj (engl. derived) subdiviziji kompleksa S^3 , ona je jedinstvena do na po dijelovima linearnu izotopiju kompleksa S^3 . Štoviše, za svake dvije regularne okoline potkompleksa K , može se postići i da izotopija koja prevodi jednu okolinu u drugu ostavlja na miru potkompleks K i S^3 izvan neke okoline od

2.3 Homologija komplementa uzla

K . Regularna okolina uzla je zatvorena trodimenzionalna podmnogostrukost kompleksa S^3 , ona je pun torus, i uzao je njen deformacijski retrakt. Klasična literatura o PL topologiji i regularnim okolinama je [Rourke - Sanderson].



Slika 2.3: Regularna okolina uzla

2.3 Homologija komplementa uzla

Neka je K uzao u S^3 s regularnom okolinom, punim torusom N . Vanjština X uzla K je zatvorenje od $S^3 - N$, ona je kompaktna povezana 3-mnogostrukost čiji rub ∂X je torus. Vanjština X jednakog je homotopskog tipa kao komplement $S^3 - K$ uzla, i vrijedi $X \cap N = \partial X = \partial N$ i $X \cup N = S^3$.

2.3.1 Homologija vanjštine uzla

Teorem 2.1 *Neka je K orijentirani uzao u (orijentiranoj) S^3 , N njegova regularna okolina i neka je X njegova vanjština, zatvorenje od $S^3 - N$. Tada je grupa $H_1(X)$ prirodno izomorfna grupi \mathbb{Z} i generirana je klasom jednostavno zatvorene krivulje μ u ∂N , takve da razapinje disk D u N koji siječe K u tačno jednoj točki, i to s pozitivnom orijentacijom. K tome, druga i treća homološka grupa vanjštine uzla su $H_2(X) \cong 0$ i $H_3(X) \cong 0$.*

Dokaz. Koristit ćemo Mayer-Vietorisov dugi egzakti niz koji daje odnos homologija dvaju prostora s homologijama njihove unije i presjeka. Budući da smo pretpostavili da su svi linkovi kružnice po dijelovima linearno smještene u S^3 , pretpostavit ćemo da su X i N potkompleksi neke triangulacije od S^3 i koristiti simplicijalnu homologiju. Slijedi Mayer-Vietorisov niz za vanjštinu X i okolinu N , dva puna torusa koji imaju zajednički rub, torus $X \cap N$.

2.3 Homologija komplementa uzla

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \cdots & \longrightarrow & H_3(X) \oplus H_3(N) & \longrightarrow & H_3(S^3) \\
 \longrightarrow & H_2(X \cap N) & \longrightarrow & H_2(X) \oplus H_2(N) & \longrightarrow & H_2(S^3) & \\
 \longrightarrow & H_1(X \cap N) & \longrightarrow & H_1(X) \oplus H_1(N) & \longrightarrow & H_1(S^3) & \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Grupe $H_3(X)$ i $H_3(N)$ su trivijalne jer se svaka kompaktna povezana triangulirana 3-mnogostrukost s nepraznim rubom sklapa na neki svoj 2-dimenzionalni potkompleks i zato ima trivijalnu 3-dimenzionalnu homologiju. Homologije torusa, punog torusa i 3-sfere su poznate, pa dobivamo sljedeći dugi egzaktni niz u kojem je samo homologija vanjštine X nepoznata:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\
 \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_2(X) & \longrightarrow & 0 & \\
 \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_1(X) \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Grupe $H_3(S^3)$ i $H_2(X \cap N)$ obje su kopije grupe \mathbb{Z} , no da bismo nešto zaključili o grupi $H_2(X)$ moramo znati kakvo je to preslikavanje $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ među njima:

$$0 \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{H_3(S^3)} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{H_2(X \cap N)} \longrightarrow \underset{0}{H_2(X) \oplus H_2(N)} \longrightarrow 0.$$

Sjetimo se da dugi egzaktni Mayer-Vietorisov niz homologija proizlazi iz kratkog egzaktnog niza pripadajućih lančanih kompleksa. Prvo preslikavanje u nizu je $\alpha: x \mapsto (x, -x)$, a drugo $\beta: (x, y) \mapsto x + y$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_3(X \cap N) & \longrightarrow & C_3(X) \oplus C_3(N) & \longrightarrow & C_3(S^3) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_2(X \cap N) & \longrightarrow & C_2(X) \oplus C_2(N) & \longrightarrow & C_2(S^3) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Ciklus $z \in C_3(S^3)$ čija klasa je generator od $H_3(S^3)$ suma je svih 3-simpleksa prostora S^3 , koherentno orijentiranih: $\partial z = 0$. Ciklus z može se prikazati kao $z = x + y$, gdje je $x \in C_3(X)$ suma svih 3-simpleksa u X , i $y \in C_3(N)$ suma svih 3-simpleksa u N . Slijedi da je $\partial(x + y) = 0$ i $\beta(x, y) = z$.

Rub od (x, y) je $(\partial x, \partial y) \in C_2(X) \oplus C_2(N)$; ∂x je suma svih 2-simpleksa u X , i ∂y suma svih 2-simpleksa u N . Vrijedi jednakost $\partial x = -\partial y$ i oba ruba su jednaka sumi svih 2-simpleksa u $X \cap N$, koherentno orijentiranih. Dakle, $(\partial x, \partial y)$ jednak je $(\partial x, -\partial x)$, i to je slika po homomorfizmu α ciklusa $\partial x = -\partial y$, a to je upravo ciklus čija je klasa generator grupe $H_2(X \cap N)$.

Generator grupe $H_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ preslikava se dakle u generator grupe $H_2(X \cap N) \cong \mathbb{Z}$ pa slijedi da je preslikavanje $H_3(S^3) \rightarrow H_2(X \cap N)$ izomorfizam grupa cijelih brojeva. Zbog toga iz gornjeg egzaktnog niza homoloških grupa zaključujemo da je $H_2(X) = 0$.

Pogledajmo sada drugi egzaktni niz koji slijedi iz Mayer-Vietorisovog niza. Zbog egzaktnosti srednje preslikavanje je izomorfizam pa je $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$ iz

2.3 Homologija komplementa uzla

$$0 \longrightarrow H_1(X \cap N) \longrightarrow H_1(X) \oplus H_1(N) \longrightarrow 0.$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \qquad \qquad \mathbb{Z}$$

Pokazali smo da je prva homološka grupa $H_1(X)$ vanjštine uzla izomorfna grupi \mathbb{Z} , preostaje još pokazati da je taj izomorfizam prirodan. Neka je μ krivulja u ∂N kao u iskazu teorema. Krivulja μ je dakle jednostavno zatvorena krivulja u ∂N koja razapinje disk u N koji siječe uzao K u jednoj točki s pozitivnom orijentacijom. Dokazat ćemo da je krivulja s tim svojstvima do na homolognost jedinstvena u $H_1(X)$ i da je klasa $[\mu]$ generator grupe $H_1(X)$.

Neka su $\hat{\mu}$ i $\hat{\lambda}$ redom neki meridijan i paralela punog torusa N . Njihove homološke klase, $[\hat{\mu}]$ i $[\hat{\lambda}]$, generatori su grupe $H_1(X \cap N) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Meridijan $\hat{\mu}$ je bitna krivulja u ∂N koja razapinje disk u N — ona je do na orijentaciju i homolognost u ∂N jedinstvena i vrijedi $[\hat{\mu}] = 0$ u $H_1(N)$.

Preslikavanje α_* u prethodnom egzaktnom nizu je izomorfizam pa su slike generatorâ grupe $H_1(X \cap N)$ generatori grupe $H_1(X) \oplus H_1(N)$. Izomorfizam α_* djeluje ovako:

$$[\hat{\mu}] \mapsto ([\hat{\mu}], 0) \quad \text{i} \quad [\hat{\lambda}] \mapsto ([\hat{\lambda}], [-\hat{\lambda}]).$$

Iz toga odmah slijedi da $[\hat{\lambda}]$ generira $H_1(N)$ i $[\hat{\mu}]$ generira $H_1(X)$. Krivulja μ razapinje disk u N koji siječe K u točno jednoj točki pa je nužno bitna u ∂N . Zato mora vrijediti da je $[\mu] = \pm[\hat{\mu}]$ u grupi $H_1(\partial N)$. Krivulja μ je zbog toga jedinstvena do na homolognost u $H_1(X)$, i klasa $[\mu]$ generira $H_1(X)$. \square

Neka je X vanjšina uzla K , i neka su $\hat{\lambda}$ i μ orijentirane jednostavno zatvorene krivulje u ∂X kao u prethodnom teoremu. Klasa $[\hat{\lambda}]$ u $H_1(X)$ jednaka je $k[\mu]$ za neki cijeli broj k . Odaberimo umjesto paralele $\hat{\lambda}$ paralelu λ takvu da je $[\lambda] = [\hat{\lambda} - k\mu]$. Takva paralela λ jedinstvena je do na orijentaciju i homolognost u ∂N , i vrijedi da je $[\lambda] = 0$ u $H_1(X)$. Sada još preostaje odabrati orijentaciju od $\pm[\lambda]$ — odaberimo onu paralelu λ takvu da je homologna s K u N i time je i generator za $H_1(N)$ prirodno jedinstveno određen.

2.3.2 Istaknuti reper i spletni broj

Rub okoline uzla u S^3 dakle posjeduje dvije krivulje, μ i λ , koje predstavljaju generatore grupa $H_1(X)$ i $H_1(N)$ redom, i čine te grupe prirodno izomorfnim grupi \mathbb{Z} .

Definicija 2.1 *Neka je K orijentirani uzao u (orijentiranoj) S^3 s regularnom okolinom punim torusom N . Meridijan μ uzla K je bitna jednostavno*

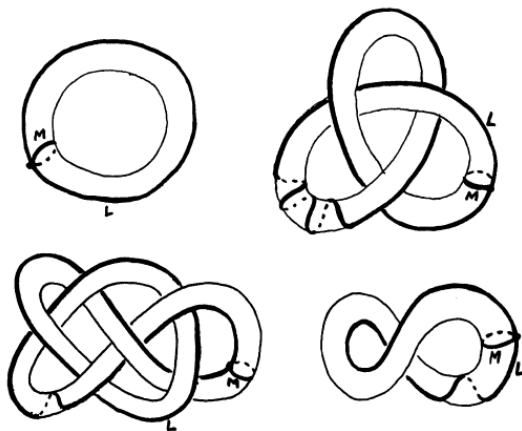
2.3 Homologija komplementa uzla

zatvorena krivulja u ∂N koja razapinje disk u N . Paralela λ uzla K je jednostavno zatvorena krivulja u ∂N takva da je homologna s K u okolini N i nul-homologna u vanjštini X uzla K .

Homologne krivulje u torusu nužno su i homotopne jer $H_1(\partial N)$ je abelova grupa pa je $H_1(\partial N)$ prirodno izomorfna s $\pi_1(\partial N)$. Ako su K i L jednostavno zatvorene i disjunktne, homologne krivulje u rubu torusa nužno su i izotopne. Meridijan i paralela uzla zato su jedinstvene do na izotopiju prostora S^3 i time je prethodna definicija opravdana.

Meridijan i paralela uzla čine istaknuti sustav krivulja na ∂N u S^3 — par (μ, λ) zato zovemo *istaknutim reperom uzla* K . Općenito, fundamentalna grupa komplementa uzla nije dovoljna da bi razlikovala uzlove, ali ako se njoj doda i informacija o homotopskoj klasi meridijana i paralele uzla, dobije se potpuna invarijanta uzlova. Ta trojka $(\pi_1(S^3 - K), [\mu], [\lambda])$ naziva se *periferni sistem uzla* (engl. peripheral system); elementi $[\mu]$ i $[\lambda]$ grupe $\pi_1(S^3 - K)$ određeni su do na konjugaciju. To je potpuna invarijanta uzlova. [Burde-Zieschang, str. 40]

Orijentiranoj jednostavno zatvorenoj krivulji J u komplementu uzla K na prirodan način pridružen je broj $k \in \mathbb{Z}$ za koji je $[J] = k[\mu]$ u $H_1(S^3 - K)$.



Slika 2.4: Istaknuti reper uzla

Definicija 2.2 Neka su J i K disjunktne orijentirane jednostavno zatvorene krivulje u S^3 . Spletni broj $\text{lk}(J, K)$ krivulja J i K jednak je onom broju $k \in \mathbb{Z}$ za koji vrijedi $[J] = k[\mu] \in H_1(S^3 - K)$, gdje je $[\mu]$ prirodan generator grupe $H_1(S^3 - K) \cong \mathbb{Z}$.

2.4 Homologija komplementa linka

Možemo to kraće pisati i ovako:

$$\text{lk}(J, K) = [J] \text{ u } H_1(S^3 - K).$$

Propozicija 2.1 *Neka je K orijentirani uzao u S^3 i X njegova vanjština. Neka je μ meridijan uzla K . Ako je C orijentirana jednostavno zatvorena krivulja u X , njena homološka klasa $[C]$ u $H_1(X)$ jednaka je*

$$[C] = \text{lk}(C, K)[\mu] \in H_1(S^3 - K). \quad \square$$

2.4 Homologija komplementa linka

Na sličan način možemo izračunati grupe homologije komplementa linka u prostoru S^3 . Regularna okolina N orijentiranog linka L s n komponenti je disjunktna unija n punih torusa. Vanjština X linka L je zatvorenje od $S^3 - N$. Rub $\partial X = \partial N = X \cap N$ je disjunktna unija n torusa.

2.4.1 Homologija vanjštine linka

Vanjština X linka L jednakog je homotopskog tipa kao komplement $S^3 - L$ linka L , inkluzija $X \hookrightarrow S^3 - L$ je homotopska ekvivalencija pa su homologije vanjštine X i komplementa $S^3 - L$ prirodno izomorfne.

Teorem 2.2 *Neka je L orijentirani link s n komponenti u S^3 , N njegova regularna okolina, i neka je X njegova vanjština, zatvorenje od $S^3 - N$. Tada je prva homološka grupa $H_1(X)$ vanjštine X prirodno izomorfna direktnoj sumi $\bigoplus_n \mathbb{Z}$ i generirana je homološkim klasama meridianâ μ_1, \dots, μ_n individualnih komponenti linka L . Druga i treća homološka grupa vanjštine X redom su jednake $H_2(X) = \bigoplus_{n-1} \mathbb{Z}$ i $H_3(X) = 0$.*

Dokaz. Neka su N_1, \dots, N_n redom regularne okoline individualnih komponenti L_1, \dots, L_n linka L . Regularna okolina N sastoji se od n disjunktnih punih torusa smještenih u S^3 . Njen rub $\partial N = \partial X$ disjunktna je unija torusâ,

$$X \cap N = \bigcup_i \partial N_i.$$

Jednako kao u dokazu prethodnog teorema zaključujemo da su $H_3(X)$ i $H_3(N)$ trivijalne grupe i iz Mayer-Vietorisovog niza dobivamo dva egzaktne niza za par N i X . Prvi egzaktan niz je:

$$0 \longrightarrow H_3(S^3) \longrightarrow H_2(X \cap N) \longrightarrow H_2(X) \oplus H_2(N) \longrightarrow 0.$$

$$\mathbb{Z} \qquad \qquad \bigoplus_n \mathbb{Z} \qquad \qquad 0$$

2.4 Homologija komplementa linka

Ovdje na sličan način kao u teoremu o homologiji vanjštine uzla zaključujemo da se generator od $H_3(S^3)$ preslikava u $(\pm 1, \dots, \pm 1) \in \bigoplus_n \mathbb{Z}$ i zato je grupa $H_2(X)$ izomorfna sa $\bigoplus_{n-1} \mathbb{Z}$. Drugi egzakti niz je:

$$0 \longrightarrow H_1(X \cap N) \longrightarrow H_1(X) \oplus H_1(N) \longrightarrow 0.$$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{2n} \mathbb{Z} & & \bigoplus_n \mathbb{Z} \end{array}$$

Budući da je u ovom nizu srednje pridruživanje izomorfizam, vrijedi da je grupa $H_1(X)$ izomorfna grupi $\bigoplus_n \mathbb{Z}$. Sada još treba pokazati da je taj izomorfizam prirodan.

Grupa $H_1(X \cap N)$ prirodno je izomorfna grupi $\bigoplus_n (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$, gdje je svaki sumand $H_1(\partial N_i) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generiran klasama meridijana μ_i i paralele λ_i pripadajuće komponente L_i . Grupa $H_1(N)$ na isti način prirodno je izomorfna grupi $\bigoplus_n \mathbb{Z}$, gdje je svaki sumand $H_1(N_i) \cong \mathbb{Z}$ generiran klasom paralele λ_i pripadajuće komponente L_i . Slično kao u teoremu o homologiji vanjštine uzla, zaključujemo da je grupa $H_1(X)$ prirodno izomorfna grupi $\bigoplus_n \mathbb{Z}$ i generirana klasama meridijana μ_1, \dots, μ_n individualnih komponenti L_1, \dots, L_n linka L . \square

Dakle, jedinstveno su određeni *meridijani* μ_1, \dots, μ_n i *paralele* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ linka L s komponentama L_1, \dots, L_n . Meridijan μ_i razapinje disk u regularnoj okolini N_i komponente L_i , i zato je $[\mu_i] = 0$ u grupi $H_1(S^3 - L_j)$ za $i \neq j$. Paralela λ_i homologna je komponenti L_i u regularnoj okolini N_i , i zato je $[\lambda_i] = [L_i]$ u grupi $H_1(S^3 - L_j)$ za $i \neq j$.

2.4.2 Spletni broj

Mogli bismo reći da paralele $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ linka L na neki način predstavljaju u $S^3 - L$ komponente L_1, \dots, L_n u L . Za meridijane μ_1, \dots, μ_n mogli bismo reći da u komplementu $S^3 - L$ predstavljaju bazu dualnu bazi predstavljenoj s L_1, \dots, L_n u L .

Propozicija 2.2 *Neka je L orijentirani link u S^3 s n komponenti L_1, \dots, L_n i C orijentirana jednostavno zatvorena krivulja u komplementu linka L . Neka su μ_1, \dots, μ_n redom meridijani individualnih komponenti linka L . Tada je klasa $[C]$ u $H_1(S^3 - L)$ jednaka*

$$[C] = \sum_i \text{lk}(C, L_i) [\mu_i] \in H_1(S^3 - L).$$

Dokaz. Klasa $[C]$ u $H_1(S^3 - L)$ jednaka je $\sum_i k_i [\mu_i]$ za neke $k_i \in \mathbb{Z}$. Vrijedi da je klasa $[\mu_j] = 0$ u grupi $H_1(S^3 - L_i)$ za $j \neq i$, i vrijedi da su ciklusi

2.4 Homologija komplementa linka

homologi u $S^3 - L$ homologi i u $S^3 - L_i$ za svaki i . Iz toga slijedi da je klasa $[C]$ u $H_1(S^3 - L_i)$ jednaka $k_i[\mu_i]$. S druge strane, znamo da je

$$[C] = \text{lk}(C, L_i)[\mu_i] \in H_1(S^3 - L_i).$$

Iz toga slijedi $k_i = \text{lk}(C, L_i)$ što smo i trebali pokazati. \square

Za jednostavno zatvorenu orijentiranu krivulju C u komplementu orijentiranog linka L , definiramo *spletni broj* uzla C i linka L sa

$$\text{lk}(C, L) = \sum_i \text{lk}(C, L_i).$$

Zapišimo sada ukratko homologiju komplementa orijentiranog linka L s n komponenti u S^3 ,

$$H_k(S^3 - \{L_1 \cup \dots \cup L_n\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{za } k = 0, \\ \bigoplus_n \mathbb{Z} & \text{za } k = 1, \\ \bigoplus_{n-1} \mathbb{Z} & \text{za } k = 2, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Poglavlje 3

Seifertove plohe

U ovom poglavlju pokazat ćemo da je svaki link u S^3 rub neke orijentabilne plohe smještene u S^3 . Te plohe će nam omogućiti da definiramo neke invarijante uzlova — u ovom poglavlju rod uzla, a kasnije i Alexanderov polinom uzla i mnoge druge.

3.1 Klasifikacija ploha

Na povezanu plohu možemo *dodati ručku* (engl. tubing) tako da iz plohe uklonimo interijere dva diska D^2 , i na rubove homeomorfne S^1 koji su nastali time zalijepimo rubove cijevi $S^1 \times I$. Ako je ploha orijentabilna, pazimo pri tome da rubove poistovjetimo poštujući orijentabilnost plohe. Svaka zatvorena povezana orijentabilna ploha homeomorfna je, za neki g , sferi s g dodanih ručki, M_g . Broj ručki g je *rod* (engl. genus) plohe M_g .



Slika 3.1: Klasifikacija ploha

Kompaktna povezana orijentabilna ploha s nepraznim rubom homeomorfna je, za neke g i n , plohi $M_{g,n}$, sferi s g dodanih ručki i uklonjenim interijerima n diskova. Rod te plohe je također g , n je broj komponenti njenog ruba.

3.2 Definicija i konstrukcija Seifertove plohe

Teorem 3.1 *Dvije povezane orijentabilne kompaktne plohe su homeomorfne ako i samo ako su istog roda i imaju isti broj komponenti ruba. \square*

Eulerova karakteristika plohe F jednaka je $v - e + t$, gdje je v broj vrhova, e broj bridova i t broj trokuta u nekoj triangulaciji plohe F . Eulerova karakteristika ne ovisi o triangulaciji plohe F .

Propozicija 3.1 *Eulerova karakteristika plohe $M_{g,n}$ je*

$$\chi(M_{g,n}) = 2 - 2g - n.$$

Dokaz. Sferu s g ručki i n komponenti ruba dobit ćemo tako da iz sfere S^2 uklonimo interijere $2g + n$ diskova i zatim zalijepimo rubove g cijevî na $2g$ kružnica u rubu nastale plohe. Zato je

$$\chi(M_{g,n}) = \chi(S^2) - (2g + n) + g\chi(S^1 \times I) - 2g\chi(S^1) = 2 - 2g - n. \quad \square$$

Ako ploha nije povezana, njen rod jednak je sumi rodova njenih komponenti. Istim postupkom kojim dodajemo ručku na povezanu plohu, možemo pomoću cijevi povezati dvije plohe (engl. piping).

3.2 Definicija i konstrukcija Seifertove plohe

Prvi konstruktivni dokaz da svaki uzao razapinje neku orijentabilnu plohu dao je H. Seifert — konstrukcija polazi od dijagrama uzla i jednostavna je — dokazi egzistencije koji su predhodili tome bili su puno kompleksniji. Seifert je 1934. godine definirao rod uzla, invarijantu koja zauzima središnje mjesto u teoriji uzlova, o kojoj ćemo također u ovom poglavlju govoriti.

3.2.1 Definicija Seifertove plohe

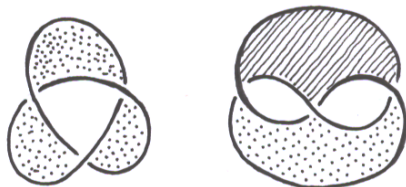
Definicija 3.1 *Neka je L orijentirani link u S^3 . Za plohu F kažemo da je Seifertova ploha linka L ako je F povezana orijentirana kompaktna ploha smještena u S^3 čiji je orijentirani rub link L .*

Zamijetimo da ovdje također nije bitno uzimamo li link kao podskup od S^3 ili kao klasu ekvivalentnih podskupova od S^3 — homeomorfizam koji prevodi jedan link u drugi nosi s linkom i njegovu Seifertovu plohu.

Naravno da je svaka povezana kompaktna orijentirana ploha s rubom, smještena u S^3 , Seifertova ploha nekog orijentiranog linka u S^3 . No nije odmah jasno da svaki link posjeduje takvu plohu. Pogledajmo najprije kako možemo konstruirati neke plohe razapete određenim linkom L u S^3 .

3.2 Definicija i konstrukcija Seifertove plohe

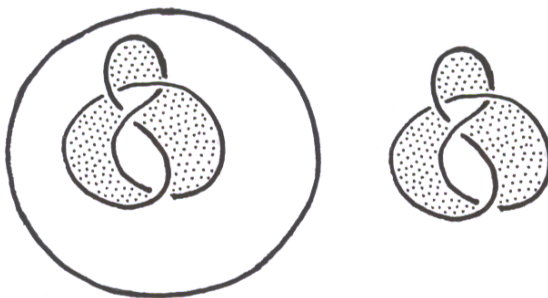
Osjenčajmo naizmjenice područja na koja projekcija linka L dijeli S^2 kao što su osjenčana polja na šahovskoj ploči (engl. checkboard coloring). Iz Jordanovog teorema (indukcijom po broju presjekâ zatvorene krivulje) slijedi da to možemo uvijek učiniti.



Slika 3.2: Plohe razapete trolistom

Tamna područja uzmimo kao diskove u S^2 spojene malim napola zakrenutim trakama u okolini prijelazâ; trake naravno nisu sadržane u S^2 . Time smo dobili plohu čiji rub je link L .

Neki dijagrami ovako će dati orijentabilnu plohu, neki neće. Među različitim dijagramima jednog linka, mogu neke pripadajuće plohe biti orijentabilne, a druge ne. Na slici se nalaze dvije plohe za trolist (engl. trefoil knot) — jedna jest, a druga nije orijentabilna. Postoji još jedna ploha koju možemo dobiti iz istog dijagrama na S^2 uzevši svijetla područja, no niti ona ne mora biti orijentabilna. Na slici koja slijedi nalaze se svijetla i tamna ploha za osmicu (engl. figure-eight knot).



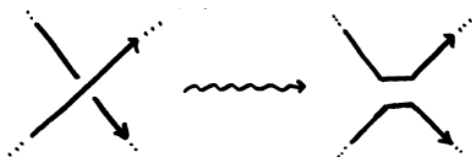
Slika 3.3: Svijetla i tamna ploha razapeta osmicom

Potrebna je opća metoda konstrukcije koja će uvijek dati orijentabilnu plohu. Takva je sljedeća, Seifertova metoda.

3.2.2 Konstrukcija Seifertove plohe

Teorem 3.2 *Svaki orijentirani link u S^3 posjeduje Seifertovu plohu.*

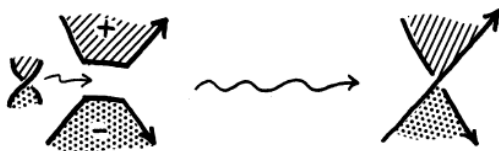
Dokaz. Seifertov algoritam. Neka je D orijentirani dijagram orijentiranog linka L , i neka je \hat{D} dijagram koji je jednak D svugdje osim u malim okolinama prijelazâ gdje je izmijenjen kao što je prikazano na slici.



Slika 3.4: Uklanjanje prijelaza

Zamijetimo da su time uklonjeni svi prijelazi dijagrama, i da je uklanjanje prijelaza (engl. smoothing) usklađeno s orijentacijom linka; dijagram \hat{D} zato je disjunktna unija orijentiranih jednostavno zatvorenih krivulja u $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, koje ćemo zvati *Seifertovim kružnicama dijagrama D* . Možemo pretpostaviti da niti jedna od tih krivulja ne sadrži točku ∞ pa promotrimo njihov položaj u $\mathbb{R}^2 \subset S^2$. Svaka od tih krivulja separira \mathbb{R}^2 na dva dijela, unutrašnji dio homeomorfan krugu i vanjski neomeđeni dio. Sferu S^2 separira na dio koji ne sadrži točku ∞ i dio koji je sadrži.

Sada ćemo konstruirati plohu. Uzet ćemo disjunktnu uniju diskova, po jedan za svaku Seifertovu kružnicu, i postaviti ih iznad \mathbb{R}^2 tako da je projekcija ruba svakog diska njemu pripadajuća Seifertova kružnica. Diskove čije su Seifertove kružnice jedna unutar druge postaviti ćemo na različite visine. Preciznije, postavimo disk na visinu $k + 1$ ako je njegova Seifertova kružnica unutar točno k Seifertovih kružnica. Jednostavno rečeno, ako bismo pogledali tako postavljene neprozirne diskove odozgo, svaki rub bio bi vidljiv i vidjeli bismo upravo dijagram \hat{D} . Povežimo sada diskove malim napola zavrnutim trakama u skladu s prijelazima na dijagramu D , kao što je prikazano na slici.



Slika 3.5: Dodavanje traka

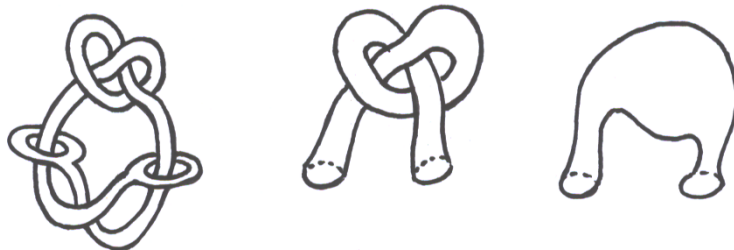
3.3 Rod uzla

Svaki disk naslijedio je orijentaciju pripadajuće Seifertove kružnice i dodavanje traka poštuje tu orijentaciju pa time nastaje orijentirana ploha i njen rub je očito link L . Ako ploha nije povezana, njene komponente povežimo dodavanjem dugih uskih cijevi poštujući orijentaciju plohe. \square

3.2.3 Primjeri Seifertovih ploha

Svaki link je rub raznih Seifertovih ploha. Seifertove plohe smatramo različitim ako ne možemo prevesti jednu u drugu homeomorfizmom prostora S^3 . Jasno, ako su plohe različitog roda, moraju biti različite, no postoje i različite Seifertove plohe istog ruba i istog roda.

Dvije takve plohe možemo zamisliti ako pogledamo sljedeću sliku. Lijevo na slici nalazi se ploha čiji je rub uzao i dvije male kružnice. Na te dvije kružnice možemo zalijepiti rub cijevi na dva različita načina i tako dobiti dvije različite plohe istog roda i razapete istim uzlom. U prvom slučaju cijev ćemo smjestiti tako da slijedi zapetljani dio plohe, u drugom tako da proguta zapetljani dio.



Slika 3.6: Seifertove plohe istog roda i ruba

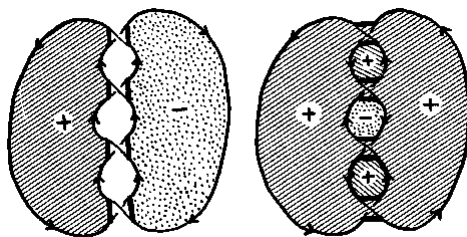
3.3 Rod uzla

Najmanji broj g za koji postoji Seifertova ploha roda g za dani uzao invarijanta je uzlova. Taj broj, za određeni uzao K , zvat ćemo *rodom uzla* K .

Definicija 3.2 Rod $g(K)$ uzla K je

$$g(K) = \min\{g(F) : F \text{ je Seifertova ploha za } K\}.$$

3.3 Rod uzla



Slika 3.7: Seifertove plohe i rod linka

Zamijetimo da je uzao K trivijalan ako i samo ako je $g(K) = 0$. Isto tako, ako uzao ima Seifertovu plohu roda 1, a zna se da nije trivijalan, njegov rod je $g(K) = 1$. Općenito je vrlo teško odrediti rod uzla.

Definicija roda lako se može proširiti i na linkove s proizvoljnim brojem komponenti. Rod ne ovisi o orijentaciji uzla pa nećemo zahtijevati niti da ovisi o orijentaciji linka. Tako je recimo link na sljedećoj slici roda 0 jer je uz odabir orijentacije na desnoj slici njegova Seifertova ploha vijenac.

Pogledajmo sada kako iz dijagrama uzla možemo izračunati rod plohe. Označimo sa s broj Seifertovih kružnica, a sa c broj prijelaza u dijagramu uzla. Seifertovu plohu dobit ćemo iz disjunktne unije s diskova i c traka lijepljenjem. Eulerova karakteristika diska i trake je 1 pa zajedno doprinose $s + c$ Eulerovoj karakteristici Seifertove plohe. Poistovjećivanjem $2c$ segmenata na rubovima diskova s jednako toliko segmenata na rubovima traka, oduzet ćemo $2c$ od prethodne sume jer je Eulerova karakteristika segmenta također 1. Time dobivamo broj $s - c$.

Dakle, Eulerova karakteristika Seifertove plohe konstruirane iz dijagrama sa s Seifertovih kružnica i c prijelaza jednaka je

$$\chi(F) = s - c.$$

Iz jednakosti $\chi(F) = 1 - 2g(F)$ slijedi da je rod Seifertove plohe izvedene iz dijagrama sa s Seifertovih kružnica i c prijelaza:

$$g(F) = \frac{1}{2}(c - s + 1).$$

Propozicija 3.2 *Neka je K uzao u S^3 i neka je D neki njegov dijagram. Neka je s broj Seifertovih kružnica i c broj prijelaza u dijagramu D . Tada za rod uzla K vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$g(K) \leq \frac{1}{2}(c - s + 1). \quad \square$$

3.4 Seifertova ploha i spletni broj

U prethodna dva poglavlja definirali smo spletni broj na dva različita načina — u svakom u skladu sa specifičnim pogledom u tom poglavlju na odnos uzlova u prostoru. U prvom poglavlju, spletni broj definiran je pomoću dijagrama linka, a u drugom pomoću homologije komplementa uzla. U ovom poglavlju karakterizirat ćemo spletni broj pomoću presječnog broja i Seifertovih ploha, i dokazati da su sve definicije ekvivalentne.

3.4.1 Presječni broj

Definicija 3.3 *Neka je J orijentirana krivulja u S^3 i F orijentirana ploha u S^3 . Presječni broj $J \cdot F$ krivulje J s plohom F je razlika broja pozitivnih i broja negativnih presjeka krivulje J s plohom F .*

Neka je F Seifertova ploha linka L u S^3 . Ploha $F - K$ je u $S^3 - K$ orijentirana i ima otvorenu okolinu koju separira na dva otvorena skupa N^+ i N^- . Notacija je odabrana tako da je N^+ s pozitivne, a N^- s negativne strane plohe F . Presječni broj dobit ćemo također ako od broja presjekâ gdje J prolazi lokalno iz N^- u N^+ oduzmemo broj presjekâ gdje J prolazi lokalno iz N^+ u N^- .



Slika 3.8: Otvorena okolina plohe bez ruba

Već smo se susreli s presječnim brojem kad smo definirali meridijan uzla K . Za predstavnika generatora prve homološke grupe $H_1(S^3 - K)$ komplementa uzla K , bili smo odabrali krivulju μ koja je rub orijentiranog diska D takvog da je presječni broj $K \cdot D$ jednak 1. Možemo dakle za meridijan μ pisati:

$$K \cdot D = 1 = \text{lk}(\mu, K) = [\mu] \in H_1(S^3 - K).$$

Presječni broj i prva homološka grupa komplementa uzla usko su povezani. Da bismo to pokazali, najprije definirajmo presječni broj malo općenitije:

Definicija 3.4 *Neka su $c = \sum_{\alpha} c_{\alpha}$ 1-lanac i $D = \sum_{\beta} D_{\beta}$ 2-lanac u općem položaju u S^3 . Presječni broj $c \cdot D$ lanaca c i D jednak je*

$$c \cdot D = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha} \cdot D_{\beta},$$

3.4 Seifertova ploha i spletni broj

gdje je presječni broj $c_\alpha \cdot D_\beta$ 1-simpleksa c_α i 2-simpleksa D_β jednak $+1$, ili -1 , ili 0 ovisno o tome da li je njihov presjek redom pozitivan, ili negativan, ili se uopće ne sijeku.

Presječni broj je očito bilinearan gdje je dobro definiran. No posjeduje i određenu simetriju. Recimo, presječni broj meridijana μ i Seifertove plohe F uzla K jednak je također 1. Vrijedi dakle jednakost:

$$\partial D \cdot F = \mu \cdot F = 1 = D \cdot K = D \cdot \partial F.$$

Propozicija 3.3 *Neka su C i D 2-lanci u općem položaju u prostoru S^3 . Tada vrijedi:*

$$\partial C \cdot D = C \cdot \partial D.$$

Dokaz. Jednakost slijedi direktno iz definicije presječnog broja jer jednakost vrijedi za svaka dva 2-simpleksa u općem položaju u S^3 . Dovoljno je nacrtati dva trokuta u općem položaju, tj. tako da se svaki 1-simpleks i 2-simpleks sijeku u interijerima oba ili se uopće ne sijeku. \square

Propozicija 3.4 *Neka je J orijentirana jednostavno zatvorena krivulja u komplementu $S^3 - L$ orijentiranog linka L . Neka su F i F' dvije Seifertove plohe za L . Tada vrijedi:*

$$J \cdot F = J \cdot F',$$

tj. presječni broj uzla J sa Seifertovom plohom uzla K ne ovisi o odabiru Seifertove plohe F uzla K .

Dokaz. Krivulja J je 1-ciklus u prostoru S^3 čija je prva homološka grupa trivijalna. Zbog toga je svaki 1-ciklus ujedno i 1-rub pa za 1-ciklus J postoji neki 2-lanac D u S^3 takav da je $\partial D = J$. Sada iz prethodne propozicije lako slijedi

$$J \cdot F = \partial D \cdot F = D \cdot \partial F = D \cdot K,$$

iz čega se jasno vidi da je $J \cdot F = J \cdot F'$ zbog $\partial F = \partial F' = K$. \square

Propozicija 3.5 *Neka je J orijentirana jednostavno zatvorena krivulja u komplementu $S^3 - L$ orijentiranog linka L . Neka je J' neki 1-ciklus u $S^3 - L$ homologan 1-ciklusu J , i neka je F neka Seifertova ploha za L . Presječni broj $J \cdot F$ jednak je tada presječnom broju $J' \cdot F$, tj. presječni broj $J \cdot F$ krivulje J sa Seifertovom plohom F ne ovisi o reprezentantu klase $[J]$ u $H_1(S^3 - L)$.*

Dokaz. Uzmimo da je J' neki drugi 1-ciklus koji reprezentira klasu $[J]$. Ciklus J' i krivulja J homologni su u prostoru $S^3 - L$ pa je $J - J'$ rub nekog 2-lanca D u $S^3 - L$. Iz toga odmah slijedi da je $D \cdot L = 0$ jer se lanci D i L uopće ne sijeku. Dakle, $(J - J') \cdot F = \partial D \cdot F = D \cdot \partial F = 0$. \square

3.4 Seifertova ploha i spletni broj

3.4.2 Spletni broj

Ukratko, u prethodnom odjeljku pokazali smo:

Teorem 3.3 *Neka je L orijentirani link u S^3 , F Seifertova ploha za L i C jednostavno zatvorena orijentirana krivulja u $S^3 - L$. Tada:*

- (i) *Presječni broj $C \cdot F$ ne ovisi o reprezentantu klase $[C] \in H_1(S^3 - L)$, i*
- (ii) *Presječni broj $C \cdot F$ ne ovisi o odabiru Seifertove plohe F za link L . \square*

Sada možemo pokazati u kakvom odnosu su spletni broj dva uzla i presječni broj uzla i Seifertove plohe.

Teorem 3.4 *Neka je L orijentirani link u S^3 , F Seifertova ploha za L i C jednostavno zatvorena orijentirana krivulja u $S^3 - L$. Spletni broj $\text{lk}(C, L)$ jednak je presječnom broju $C \cdot F$ krivulje C sa Seifertovom plohom F linka L .*

Dokaz. Grupa $H_1(S^3 - L)$ generirana je klasama meridianâ μ_1, \dots, μ_n individualnih komponenti linka L . Klasa krivulje C u $H_1(S^3 - L)$ jednaka je $\sum_i k_i [\mu_i]$ za neke cijele brojeve k_i . Slijedi da je presječni broj krivulje C i plohe F jednak $C \cdot F = (\sum_i k_i \mu_i) \cdot F = \sum_i k_i (\mu_i \cdot F) = \sum_i k_i$. Znamo da je $k_i = \text{lk}(C, L_i)$ pa vrijedi:

$$C \cdot F = \sum_i \text{lk}(C, L_i) = \text{lk}(C, L). \quad \square$$

Korolar 3.1 *Spletni broj je simetričan, tj. za J i K , dvije disjunktne orijentirane jednostavno zatvorene krivulje u S^3 , vrijedi:*

$$\text{lk}(J, K) = \text{lk}(K, J). \quad \square$$

3.4.3 Ekvivalentnost definicija spletnog broja

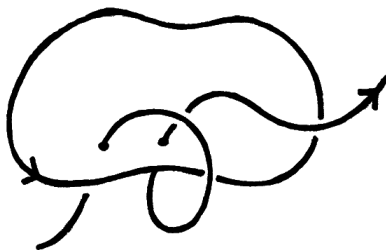
Uzevši dijagram uzla, uzao možemo rekonstruirati na razne načine; jedan od načina je konstrukcija Seifertove plohe. Uzmimo sada dijagram dvokomponentnog linka L s komponentama J i K . Možemo pretpostaviti da u dijagramu J siječe K samo u Seifertovim kružnicama dijagrama uzla K .

Izračunajmo razliku broja pozitivnih i broja negativnih prijelaza gdje J prolazi *ispod* K , označimo tu sumu s $\text{lk}_-(J, K)$. Razliku broja pozitivnih i negativnih prijelaza u kojima J prolazi *iznad* K označimo sukladno tome s $\text{lk}_+(J, K)$. Vrijedi da je

$$\text{lk}_-(J, K) + \text{lk}_+(J, K) = 2 \text{lk}_0(J, K).$$

3.4 Seifertova ploha i spletni broj

Sada ćemo iz dijagrama rekonstruirati link $J \cup K$. Uzao K ćemo rekonstruirati tako da konstruiramo Seifertovu plohu F za K , a uzao J tako da siječe plohu F samo lokalno blizu ruba Seifertovog diska kad u dijagramu prolazi ispod K , a inače je uvijek iznad Seifertove plohe za K . To možemo postići ako uzmemo da je, osim u malim okolinama prijelazâ gdje J prolazi ispod K , J iznad Seifertovog kruga ako je u dijagramu unutar pripadajuće Seifertove kružnice.



Slika 3.9: Presjek uzla sa Seifertovim diskom

Iz ove konstrukcije, recimo pogledom na Seifertove kružnice dijagrama uzla K i dijagram uzla J , lako se vidi da je presječni broj $J \cdot F$ upravo prethodno izračunati $\text{lk}_-(J, K)$. Analognom konstrukcijom sa zamijenjenim ulogama J i K dobivamo da je presječni broj Seifertove plohe za J i uzla K jednak $\text{lk}_-(K, J) = \text{lk}_+(J, K)$. Zbog jednakosti ta dva presječna broja, slijedi da je

$$\text{lk}_-(J, K) = \text{lk}_+(J, K).$$

Zbog toga imamo:

$$\text{lk}_0(J, K) = \text{lk}_-(J, K) = \text{lk}_+(J, K) = J \cdot F = \text{lk}(J, K) = [J] \in H_1(S^3 - K).$$

Time smo pokazali ekvivalentnost definicija spletnog broja — pomoću dijagrama, homologije komplementa uzla, ili presječnog broja uzla sa Seifertovom plohom — spletni broj je omniprezentant. ♡

Poglavlje 4

Beskonačno cikličko natkrivanje

Općenito, uzevši prezentacije dviju grupa, ne postoji algoritam koji bi dao odgovor na pitanje jesu li te dvije grupe izomorfne. Umjesto uspoređivanja tih grupa, pokazalo se plodnim istražiti neke podgrupe fundamentalne grupe uzla. Abelizacija grupe uzla je prva homološka grupa vanjštine uzla — ona je uvijek ciklička grupa cijelih brojeva pa nam ne govori mnogo. No prva komutatorska podgrupa grupe uzla, zajedno s djelovanjem prve homološke grupe na njoj, invarijanta je uzlova koja je vrlo lijepo povezana s geometrijskim svojstvima i topologijom komplementa uzla, i daje lijepe rezultate. Te grupe su u izravnom odnosu s cikličkim natkrivanjima vanjštine linka, o kojima ćemo u ovom poglavlju govoriti.

4.1 Natkrivajući prostori

Prezentacija prve komutatorske podgrupe fundamentalne grupe uzla dana je već 1932. godine u Reidemeisterovoj monografiji *Knotentheorie*, ali samo u algebarskoj verziji. L. P. Neuwirth je 1960. godine prvi učinio veliki korak u geometrijskom smjeru tako da je istražio beskonačno cikličko natkrivanje vanjštine uzla, koristeći nove metode omogućene Dehnovom lemom i Teoremom o petlji. Sada ćemo, za početak, iznijeti teoriju natkrivajućih prostora, a kasnije ćemo opisati i istražiti ciklička natkrivanja vanjštine uzla.

4.1.1 Definicija natkrivanja prostora

Kažemo da je preslikavanje $p: \tilde{X} \rightarrow X$ *natkrivajuće preslikavanje* ako postoji otvoren pokrivač prostora X takav da za svaki element U tog pokrivača:
(i) prasluka $p^{-1}(U)$ je disjunktna unija $\{U_\alpha\}$ otvorenih podskupova od \tilde{X} , i
(ii) p svaki otvoreni skup U_α homeomorfno preslikava na otvoren skup U .

4.1 Natkrivajući prostori

Bazni prostor X ovdje bit će putevima povezan, lokalno putevima povezan, i takav da svaka točka prostora X ima okolinu U takvu da je homomorfizam $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ induciran inkluzijom trivijalan (tj. X je semilokalno jednostavno povezan prostor). Ti uvjeti su trivijalno zadovoljeni za povezane po dijelovima linearne mnogostrukosti pa ovdje ne donose bitno ograničenje.

Prostor \tilde{X} zajedno s natkrivajućim preslikavanjem $p: \tilde{X} \rightarrow X$ zovemo *natkrivanjem* prostora X , sâm prostor \tilde{X} *natkrivajućim prostorom*, a diskretni skup $p^{-1}(x)$ *vlaknom* točke $x \in X$. Prirodno je pri proučavanju natkrivanjâ uzimati da je prostor natkrivanja \tilde{X} također povezan, budući da je restrikcija natkrivajućeg preslikavanja na svaku komponentu povezanosti natkrivajućeg prostora, također natkrivajuće preslikavanje. [Hatcher, Lickorish]

4.1.2 Svojstva podizanja preslikavanja

Kažemo da je preslikavanje $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ *podizanje* ili *natkrivanje preslikavanja* $f: Y \rightarrow X$ ako je $p \circ \tilde{f} = f$, tj. ako je sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ & \nearrow \downarrow & \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

Dva podizanja preslikavanja $f: Y \rightarrow X$ poklapaju se u svim ili u nijednoj točki čim je Y povezan prostor — zato kažemo da natkrivanja imaju *svojstvo jedinstvenosti podizanja preslikavanja*. Natkrivanja imaju i *svojstvo podizanja puteva* — za proizvoljni put $\gamma: I \rightarrow X$ i proizvoljnu točku $\tilde{x} \in p^{-1}(\gamma(0))$ vlakna početne točke tog puta, postoji podizanje $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \tilde{X}$ takvo da je $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$, kao u sljedećem komutativnom dijagramu:

$$\begin{array}{ccc} & (\tilde{X}, \tilde{x}) & \\ & \nearrow \downarrow & \\ (I, *) & \longrightarrow & (X, p(\tilde{x})) \end{array}$$

Posljedica egzistencije i jedinstvenosti podizanja puteva je ekvipotentnost svih vlakana natkrivanja. Kažemo da natkrivanje ima k *slojeva*, ili da je k -*slojno*, ako je kardinalitet vlakna jednak prirodnom broju k .

Iz svojstva podizanja puteva lako se izvodi i *svojstvo podizanja homotopija* — ako je \tilde{f}_0 podizanje preslikavanja $f: Y \rightarrow X$ i ako je $f_t, t \in I$ homotopija, tada postoji homotopija $\tilde{f}_t, t \in I$ takva da je \tilde{f}_t podizanje preslikavanja f_t za svaki $t \in I$. Podizanje homotopije puteva je homotopija podizanjâ puteva pa, uz odabrane bazne točke $x \in X$ i $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, odmah slijedi da je homomorfizam

$$p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

4.1 Natkrivajući prostori

induciran preslikavanjem p injekcija. Zato je grupa $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ prirodno izomorfna podgrupi od $\pi_1(X, x)$ koja odgovara svim petljama u X koje se podižu u petlje u natkrivajućem prostoru \tilde{X} .

Još je potrebno vidjeti kada postoji podizanje proizvoljnog preslikavanja $f: Y \rightarrow X$. Neka su α i β dva puta u X s jednakim početnim i krajnjim točkama, i neka su $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ njihova podizanja u \tilde{X} s istom početnom točkom \tilde{x} . Tada su njihove krajnje točke i u prostoru natkrivanja jednake, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$, ako i samo ako je

$$[\alpha\beta^{-1}] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}).$$

To svojstvo zove se *princip monodromije*.

Teorem 4.1 *Neka je $p: \tilde{X} \rightarrow X$ natkrivanje prostora X . Podizanje preslikavanja $f: Y \rightarrow X$ postoji ako i samo ako je*

$$f_*\pi_1(Y, y) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}),$$

uz odabrane bazne točke takve da je $f(y) = p(\tilde{x})$.

Drugim riječima, komutativni dijagram preslikavanja s početka odjeljka postoji ako i samo ako je moguć i na nivou fundamentalnih grupa. Ako je k tome prostor Y također povezan, dva natkrivanja preslikavanja f poklapaju se u svim točkama ili u nijednoj točki — podizanje je uz odabranu baznu točku jedinstveno.

4.1.3 Natkrivanja prostora X i podgrupe od $\pi_1(X)$

Teorem 4.2 *Svaki prostor X posjeduje jednostavno povezano natkrivanje.*

Jednostavno povezano natkrivanje prostora X konstruira se tako da se na skupu homotopskih klasa puteva u X odabere prirodna topologija. To natkrivanje zove se *univerzalno natkrivanje prostora X* jer ono natkriva svako natkrivanje prostora X — fundamentalna grupa tog natkrivajućeg prostora je trivijalna. Slijedi klasifikacija natkrivanjâ danog prostora X .

Teorem 4.3 *Za svaku podgrupu H fundamentalne grupe $\pi_1(X, x)$ prostora X postoji natkrivanje $p: \tilde{X} \rightarrow X$ i bazna točka $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ takvi da je $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = H$.*

Ako su \tilde{x} i \tilde{x}' dvije točke vlakna točke $x \in X$, tada su njima odgovarajuće grupe $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ i $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}')$ međusobno konjugirane podgrupe od $\pi_1(X, x)$. Još i više, sve podgrupe od $\pi_1(X, x)$ koje su konjugirane podgrupi $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$

4.1 Natkrivajući prostori

mogu se dobiti odabirom neke druge točke vlakna točke x za baznu točku prostora natkrivanja \tilde{X} .

Kažemo da su dva natkrivanja $p: \tilde{X} \rightarrow X$ i $q: \hat{X} \rightarrow X$ ekvivalentna ako postoji homeomorfizam $h: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ takav da je $q \circ h = p$. Ekvivalentna natkrivanja smatramo jednakima. Iz teorema o postojanju natkrivanja preslikavanja proizlazi da su natkrivanja ekvivalentna ako i samo ako su im grupe natkrivanja jednake, tj. ako i samo ako je

$$p_*\pi_1(\tilde{X}) = q_*\pi_1(\hat{X}).$$

Dakle, svakom natkrivanju \tilde{X} prostora (X, x) , uz odabranu baznu točku $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \subset \tilde{X}$, pridružena je njegova grupa natkrivanja $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \leq \pi_1(X, x)$ i to pridruživanje je bijekcija,

podgrupe od $\pi_1(X, x) \longleftrightarrow$ punktirana natkrivanja (\tilde{X}, \tilde{x}) prostora X .

Ako zanemarimo bazne točke, imamo sljedeće bijektivno pridruživanje:

klase konjugiranih podgrupa od $\pi_1(X) \longleftrightarrow$ natkrivanja prostora X .

4.1.4 Transformacije natkrivanja i regularna natkrivanja

Automorfizam $\tau: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ zovemo *transformacijom natkrivanja* $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ako je $p \circ \tau = p$. Zbog jedinstvenosti podizanja preslikavanja, transformacija natkrivanja potpuno je određena odabirom točke $\tau(\tilde{x}) \in p^{-1}(x)$. Transformacija natkrivanja nema fiksnih točaka ako nije identiteta.

Kažemo da je natkrivanje \tilde{X} prostora X *regularno natkrivanje* ako je njegova grupa natkrivanja $p_*\pi_1(\tilde{X})$ normalna podgrupa od $\pi_1(X)$. Regularnost natkrivanja ne ovisi o odabiru baznih točaka za X i \tilde{X} .

Propozicija 4.1 *Natkrivanje \tilde{X} prostora X je regularno ako i samo ako za svake dvije točke \tilde{x} i \tilde{x}' vlakna $p^{-1}(x)$ točke $x \in X$ postoji transformacija natkrivanja koja prevodi \tilde{x} u \tilde{x}' .*

Svakoj petlji α u prostoru X prirodno je pridružena jedinstvena transformacija τ_α regularnog natkrivanja \tilde{X} takva da je $\tau(\tilde{\alpha}(0)) = \tilde{\alpha}(1)$. Očito, transformacija τ_α ne ovisi o reprezentantu klase $[\alpha] \in \pi_1(X)$. Ako je β neka druga petlja u X , lako je vidjeti da vrijedi

$$\tau_\alpha \circ \tau_\beta = \tau_{\alpha\beta}.$$

4.1 Natkrivajući prostori

Zato možemo reći da je za regularno natkrivanje \tilde{X} sljedeći niz egzaktni:

$$\{1\} \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow G(\tilde{X}) \longrightarrow \{1\},$$

gdje smo s $G(\tilde{X})$ označili *grupu transformacija natkrivanja* \tilde{X} . Drugačije rečeno, ako je natkrivanje \tilde{X} regularno, postoji prirodni izomorfizam

$$\pi_1(X)/p_*\pi_1(\tilde{X}) \cong G(\tilde{X}).$$

Posebno, grupa transformacija univerzalnog natkrivanja prostora X prirodno je izomorfna fundamentalnoj grupi prostora X . Općenito, uvijek možemo reći da grupa $\pi_1(X)$ djeluje prirodno na prostor natkrivanja \tilde{X} kao grupa automorfizama.

4.1.5 Abelova natkrivanja i prva komutatorska podgrupa od $\pi_1(X)$

Kažemo da je natkrivanje \tilde{X} prostora X *abelovo natkrivanje* ako je regularno i njegova grupa transformacija $G(\tilde{X})$ je abelova grupa. Budući da je onda $\pi_1(X)/p_*\pi_1(\tilde{X})$ abelova grupa, odmah slijedi da grupa $p_*\pi_1(\tilde{X})$ mora sadržavati prvu komutatorsku podgrupu od $\pi_1(X)$:

$$\pi_1(X)' \leq p_*\pi_1(\tilde{X}).$$

Natkrivanje \tilde{X} čija je grupa $p_*\pi_1(\tilde{X})$ jednaka prvoj komutatorskoj podgrupi fundamentalne grupe $\pi_1(X)$ zove se *univerzalno abelovo natkrivanje* prostora X . Razlog takvog naziva je što je takvo natkrivanje \tilde{X} abelovo natkrivanje svih abelovih natkrivanja prostora X . Grupa transformacija tog natkrivanja je abelizacija grupe $\pi_1(X)$, a to je ništa drugo do prva homološka grupa $H_1(X)$ prostora X .

Propozicija 4.2 *Svaki prostor X ima univerzalno abelovo natkrivanje \tilde{X} , tj. postoji natkrivanje $p: \tilde{X} \rightarrow X$ takvo da je*

$$p_*\pi_1(\tilde{X}) = \pi_1(X)' \quad i \quad G(\tilde{X}) \cong H_1(X).$$

Preslikavanje koje abelovom natkrivanju \tilde{X} pridružuje podgrupu od $\pi_1(X)$ koja sadrži komutatorsku podgrupu $\pi_1(X)'$, bijektivno je preslikavanje. Takve podgrupe od $\pi_1(X)$ čine skup prirodno izomorfan skupu podgrupa kvocijenta $\pi_1(X)/\pi_1(X)'$. Zato za abelova natkrivanja imamo prirodno bijektivno pridruživanje:

$$\text{podgrupe od } H_1(X) \leftrightarrow \text{abelova natkrivanja prostora } X.$$

4.2 Ciklička natkrivanja vanjšine linka

U slučaju da je prostor X vanjšina nekog uzla K , natkrivanje čija je grupa transformacija izomorfna grupi $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$ univerzalno je abelovo natkrivanje. Jedino je takvo pa se također zove *beskonačno cikličko natkrivanje vanjšine uzla K* i označava s X_∞ . Sva ostala abelova natkrivanja vanjšine uzla su *konačna ciklička natkrivanja*; njihove grupe transformacija izomorfne su grupama \mathbb{Z}_k .

Teorem 4.4 *Za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveno natkrivanje X_k vanjšine uzla K takvo da je $G(X_k) = \mathbb{Z}_k$. Takvo natkrivanje zove se k -slojno cikličko natkrivanje vanjšine uzla K .*

Dokaz. Razlog toga je što je $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$ i $\pi_1(X)' \leq p_*\pi_1(X_k)$ — ako označimo grupu nekog takvog natkrivanja s H , odmah vidimo da postoji samo jedna podgrupa H od $\pi_1(X)$ koja bi mogla sudjelovati u ovakvom surjektivnom preslikavanju:

$$\mathbb{Z} \cong G(X_\infty) \cong \pi_1(X)/\pi_1(X)' \longrightarrow \pi_1(X)/H \cong G(X_k) \cong \mathbb{Z}_k.$$

To je naravno podgrupa $p_*\pi_1(X_k)$. Jedinstvenost proizlazi iz činjenice da je jezgra svakog epimorfizma $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_k$ uvijek podgrupa $k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. \square

Dakle, abelovo natkrivanje vanjšine uzla određeno je grupom transformacija tog natkrivanja. Konačnom cikličkom natkrivanju X_k odgovara kao grupa natkrivanja jezgra jedinstvenog preslikavanja

$$\pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_k.$$

Homološke grupe abelovih natkrivanja vanjšine linka nazivaju se ponekad *abelovim invarijantama linka*. Primjer konačnih i beskonačnih cikličkih natkrivanja možemo lako vidjeti kod natkrivanja kružnice. Njena fundamentalna grupa već jest abelova, tj. $H_1(S^1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, i sva njena abelova natkrivanja također su konačna i beskonačna ciklička natkrivanja.

4.2 Ciklička natkrivanja vanjšine linka

Svakom elementu prve homološke grupe $H_1(X)$ vanjšine uzla K pridružena je jedinstvena transformacija univerzalnog abelovog natkrivanja prostora X , i to pridruživanje je bijekcija. Petlja γ u X se podiže u petlju u \tilde{X} ako i samo ako je $\text{lk}(\gamma, K) = 0$, a to je ekvivalentno tome da je $\gamma \cdot F = 0$ za proizvoljnu Seifertovu plohu F uzla K . Zato je prirodno pokušati konstruirati abelova natkrivanja rezanjem prostora X po Seifertovoj plohi i zatim lijepljenjem takvih prostora.

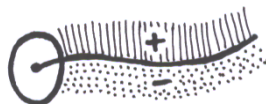
4.2 Ciklička natkrivanja vanjštine linka

Pokazali smo da postoje prirodna bijektivna pridruživanja koja vežu algebru i topologiju prostora natkrivanja: svakom elementu prve homološke grupe prostora X odgovara neka točka vlakna bazne točke prostora X , a njoj pak odgovara neka transformacija natkrivajućeg prostora. Sve te grupe su abelizacija fundamentalne grupe vanjštine uzla,

$$\pi_1(X) \longrightarrow H_1(X) \longleftarrow p^{-1}(x) \longleftarrow G(\tilde{X}).$$

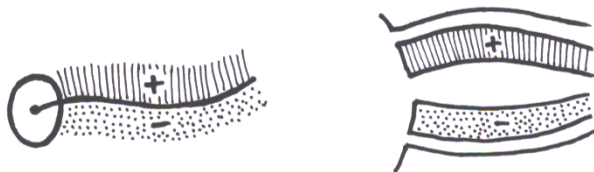
4.2.1 Rezanje po plohi

Neka je F Seifertova ploha orijentiranog linka L u S^3 , $\partial F = L$. Neka je N regularna okolina linka L , disjunktka unija n punih torusa smještenih u S^3 . Neka je X vanjština linka L , zatvorenje od $S^3 - N$.



Slika 4.1: Okolina Seifertove plohe u vanjštini uzla

Tada je $F \cap X$ ploha F s uklonjenom otvorenom regularnom okolinom svog ruba — ona se bitno ne razlikuje od F pa ćemo ju odsada označavati s F . Ta ploha je pravilno smještena u X , tj. $\partial F = \partial X \cap F$. Ona je i orijentabilna pa ima regularnu okolinu $F \times [-1, 1]$ u X gdje je F poistovjećena s $F \times \{0\}$, a notacija odabrana tako da meridijan svake komponente linka L ulazi u okolinu plohe na negativnoj strani $F \times \{-1\}$ i izlazi na pozitivnoj $F \times \{1\}$. Također, vrijedi da je $F \times [-1, 1] \cap \partial X = \partial F \times [-1, 1]$.



Slika 4.2: Rastavljanje okoline plohe na dijelove

Označimo $F \times [-1, 0]$ s U^- , i $F \times [0, 1]$ s U^+ . Označimo s M zatvorenje od $X - U$, gdje je U unija U^- i U^+ . Uzmimo sada disjunktne unije prostora U^+ , U^- i M . Postoji prirodno kvocijentno preslikavanje q inducirano inkluzijama,

$$q: U^+ \cup M \cup U^- \rightarrow X.$$

4.2 Ciklička natkrivanja vanjštine linka

Sada poistovjetimo $x \in M$ s $x^+ \in U^+$ ako je $q(x) = q(x^+)$, i poistovjetimo $y \in M$ s $y^- \in U^-$ ako je $q(y) = q(y^-)$. Ta poistovjećivanja zapravo su ponovno lijepljenje U^+ i U^- na rubovima s M , propustili smo zalijepiti jedino U^- s U^+ . Trodimenzionalna mnogostrukost nastala time zove se *rezultat rezanja prostora X po plohi F* ; označit ćemo ju s Y .



Slika 4.3: Lijepljenjem dijelova dobivamo rezultat rezanja po plohi

Seifertova ploha F ne separira S^3 (jer je povezana i postoji krivulja koja ju siječe samo jedanput) pa je Y povezana mnogostrukost. Postoji prirodno kvocijentno preslikavanje $r: Y \rightarrow X$. Preslika plohe F sastoji se od disjunktne unije dviju ploha homeomorfni plohi F ; nazvat ćemo ih F^+ i F^- , notaciju ćemo odabrati u skladu s notacijom za U^+ i U^- . Restrikcija kvocijenta preslikavanja r na $Y - (F^+ \cup F^-)$ je homeomorfizam na svoju sliku $X - F$, a restrikcija preslikavanja r na $F^+ \cup F^-$ je dvoslojno (nepovezano) natkrivanje plohe F .

Kad bismo zalijepili F^+ i F^- , dobili bismo opet prostor X .



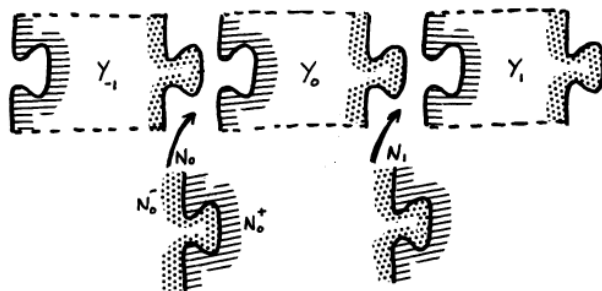
Slika 4.4: Lijepljenjem rezultata rezanja dobili bismo početni prostor

4.2.2 Konstrukcija prostorâ X_∞ i X_k

Neka je sada, kao u prethodnom odjeljku, Y rezultat rezanja vanjštine X linka L po plohi F . Neka je $r: Y \rightarrow X$ prirodno kvocijentno preslikavanje. Označimo s ϕ prirodni homeomorfizam $\phi: F^- \rightarrow F^+$; vrijedi da je $r\phi = r$ na plohi F^- . Iz konstrukcije je jasno da ϕ obrće orijentaciju i da lijepljenjem prostora Y po ϕ dobivamo opet prostor X .

4.2 Ciklička natkrivanja vanjštine linka

Uzmimo sada Y_i , $i \in \mathbb{Z}$, disjunktne uniju prebrojivo mnogo kopija prostora Y . Označimo s $h_i: Y \rightarrow Y_i$ pripadajuće homeomorfizme. Zalijepimo zatim, za svaki i , prostore Y_i i Y_{i+1} tako da poistovjetimo plohu F_i^- s plohom F_{i+1}^+ restrikcijom homeomorfizma $h_{i+1} \circ h_i^{-1}$ na F_i^- . Tako nastali prostor označimo s X_∞ .



Slika 4.5: Konstrukcija beskonačnog cikličkog natkrivanja

Prostor X_∞ je povezana 3-mnogostrukost koja je natkrivanje prostora X uz preslikavanje $p: X_\infty \rightarrow X$ definirano sa

$$p|_{Y_i} = r h_i^{-1}.$$

Na sličan način mogli bismo konstruirati i natkrivanje s konačno mnogo slojeva. Uzmimo disjunktne uniju prostora Y_0, \dots, Y_{k-1} i zalijepimo, na jednak način kao prije, Y_i s Y_{i+1} za $i = 0, \dots, k-2$, a Y_{k-1} zalijepimo s Y_0 i zatvorimo krug. Označimo s X_k prostor nastao iz k kopija prostora Y lijepljenjem na ovaj način. Prostor X_k je povezana kompaktna 3-mnogostrukost koja je k -slojno natkrivanje prostora X .

Vidjeli smo već da homologija komplementa linka ne govori gotovo ništa o linku i ne može nikako poslužiti za raspoznavanje uzlova, no to ne znači da homologija ne može biti upotrijebljena u tu svrhu. Homologije različitih prostora natkrivanja vanjštine uzla, tj. abelove invarijante uzla, mogu vrlo dobro poslužiti raspoznavanju uzlova.

4.2.3 Grupa $H_1(X_\infty)$ je Λ -modul

Na prostoru natkrivanja X_∞ postoji prirodni homeomorfizam $t: X_\infty \rightarrow X_\infty$ definiran sa

$$t|_{Y_i} = h_{i+1} h_i^{-1}.$$

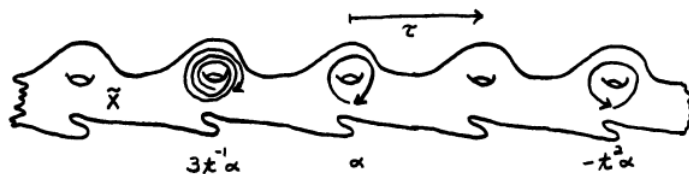
Možemo ga gledati kao translaciju prostora X_∞ "za jedan korak prema gore" (ili "nadesno", gledajući prikaz na slici) jer za svaki i prevodi Y_i u Y_{i+1} .

4.2 Ciklička natkrivanja vanjšine linka

Zbog toga beskonačna ciklička grupa $\langle t \rangle$ generirana s t djeluje na prostor X_∞ kao grupa homeomorfizama.

Homeomorfizam $t: X_\infty \rightarrow X_\infty$ inducira na prvoj homološkoj grupi automorfizam $t_*: H_1(X_\infty) \rightarrow H_1(X_\infty)$. Zbog toga možemo reći da $\langle t \rangle$ djeluje i na prvu homološku grupu $H_1(X_\infty)$ kao grupa automorfizama $\langle t_* \rangle$. Prsten \mathbb{Z} prirodno djeluje na svaku abelovu grupu pa grupni prsten $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ djeluje na $H_1(X_\infty)$ — zato je $H_1(X_\infty)$ $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -modul.

Grupni prsten $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ sastoji se od formalnih \mathbb{Z} -linearnih kombinacija elemenata iz $\langle t \rangle$ s formalnim zbrajanjem, i množenjem izvedenim iz množenja na $\langle t \rangle$ i zakona distributivnosti. Zato je $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ prsten Laurentovih polinoma u jednoj varijabli s cjelobrojnim koeficijentima; taj prsten, koji se inače označava s $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, označit ćemo kraće s Λ . Dakle, prva homološka grupa $H_1(X_\infty)$ beskonačnog cikličkog prostora natkrivanja je Λ -modul.



Slika 4.6: Djelovanje prstena Λ na natkrivajući prostor

Grupa $\langle t \rangle$ homeomorfizama prostora natkrivanja je zapravo grupa transformacija natkrivanja $p: X_\infty \rightarrow X$. Homeomorfizam t je transformacija natkrivanja jer je $p \circ t = p: X_\infty \rightarrow X$ zbog $pt|_{Y_{i-1}} = rh_i^{-1}h_i h_{i-1}^{-1}$ što je jednako $rh_{i-1}^{-1} = p|_{Y_{i-1}}$. Natkrivanje $p: X_\infty \rightarrow X$ je regularno, i t generira njegovu grupu transformacija.

Na prostoru natkrivanja X_k također postoji prirodni homeomorfizam $t_k: X_k \rightarrow X$ definiran sa $t_k|_{Y_i} = h_{i+1}h_i^{-1}$ gdje pod Y_k i h_k zapravo podrazumijevamo Y_0 i h_0 . Na taj homeomorfizam pak možemo gledati kao rotaciju prostora X_k za jedan korak u pozitivnom smjeru. Naravno, u ovom slučaju vrijedi da je $t_k^k = 1$, tj. grupa \mathbb{Z}_k djeluje kao grupa homeomorfizama na prostor natkrivanja X_k , a time i na prvu homološku grupu $H_1(X_k)$. Zato možemo reći da je $H_1(X_k)$ modul nad \mathbb{Z}_k .

Prostore natkrivanja X_∞ i X_k vanjšine linka konstruirali smo koristeći neku Seifertovu plohu linka pa bi se moglo činiti da oni i ovise o odabiru te plohe, no to nije tako. Intuitivno, razlog tome je što, iako je rezultat rezanja prostora X ovisan o plohi F , nakon lijepljenja prestaje biti bitno koja je to ploha bila jer je lokalno oko svake kopije plohe F u X_∞ sve isto kao oko plohe F u X . Sada ćemo to i dokazati.

4.2 Ciklička natkrivanja vanjštine linka

4.2.4 Natkrivanje X_∞ i Λ -modul $H_1(X_\infty)$ ne ovise o F

Prostori natkrivanja prostora X u posebnom su odnosu s fundamentalnom grupom $\pi_1(X)$ — uzmimo zato da je spletni broj definiran i za petlje u X :

$$\begin{aligned} \text{lk}(\gamma, K) &= [\gamma] \in H_1(S^3 - K), \\ \text{lk}(\gamma, L) &= \sum_i \text{lk}(\gamma, L_i). \end{aligned}$$

Zamijetimo prvo da, nakon što je odabrana Seifertova ploha za link L , sve što dalje proizlazi iz konstrukcije X_∞ jedinstveno je određeno: prostor Y kao rezultat rezanja prostora X po F , zatim lijepljenje kopija Y_i prostora Y , prostor natkrivanja X_∞ i transformacija t . No, već s linkom L sve je jedinstveno određeno, što ćemo sada pokazati.

Teorem 4.5 *Natkrivanje $p: X_\infty \rightarrow X$ vanjštine orijentiranog linka L ne ovisi o odabiru Seifertove plohe F korištene u konstrukciji natkrivajućeg prostora X_∞ . Uz to, djelovanje beskonačne cikličke grupe na prostor X_∞ i time na grupu $H_1(X_\infty)$ također ne ovisi o odabiru Seifertove plohe F .*

Dokaz. Uzmimo da je bazna točka prostora X odabrana u skupu $X - F$, i da je za baznu točku prostora natkrivanja X_∞ odabrana ona točka vlakna koja je u prostoru Y_0 . Označimo je s \tilde{b} .

Neka je $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ proizvoljna petlja u X i neka je $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow X_\infty$ njeno podizanje u X_∞ . Pri svakom presjeku petlje α s plohom F , $\tilde{\alpha}$ lokalno prelazi iz jedne kopije prostora Y u drugu. Ovisno o tome prolazi li α lokalno iz U^- u U^+ ili obratno, put $\tilde{\alpha}$ za neki i prelazi iz U_i^- u U_{i+1}^+ ili obratno. S druge strane, pri svakom prijelazu puta $\tilde{\alpha}$ iz jedne kopije prostora Y u drugu, petlja α siječe plohu F . Zbog svega toga, krajnja točka $\tilde{\alpha}(1)$ puta $\tilde{\alpha}$ naći će se u prostoru Y_k ako i samo ako je $\alpha \cdot F = k$,

$$\tilde{\alpha}(1) \in Y_k \Leftrightarrow \alpha \cdot F = k.$$

Petlja α podići će se zato u petlju u X_∞ ako i samo ako je njen presječni broj s plohom F jednak $\alpha \cdot F = 0$,

$$[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(X_\infty) \Leftrightarrow \alpha \cdot F = 0.$$

Presječni broj $\alpha \cdot F = \text{lk}(\alpha, L)$ ne ovisi o odabiru Seifertove plohe F linka L pa niti grupa $p_*\pi_1(X_\infty) \leq \pi_1(X)$ ne ovisi o plohi F . Iz teorema o jedinstvenosti natkrivanja slijedi da je natkrivanje $p: X_\infty \rightarrow X$ jedinstveno do na ekvivalentnost natkrivanja. Preciznije, ako je $\hat{p}: \hat{X}_\infty \rightarrow X$ natkrivanje

4.2 Ciklička natkrivanja vanjšine linka

konstruirano koristeći neku drugu Seifertovu plohu linka L , onda postoji homeomorfizam $h: X_\infty \rightarrow \hat{X}_\infty$ takav da prevodi baznu točku \tilde{b} u baznu točku \hat{b} i vrijedi

$$\hat{p} \circ h = p.$$

Preostaje pokazati da je $\hat{t} \circ h = h \circ t$, gdje smo s t odnosno \hat{t} označili transformacije natkrivanja X_∞ odnosno \hat{X}_∞ kao u konstrukciji. Neka je $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow X_\infty$ put u prostoru X_∞ od bazne točke \tilde{b} do točke $t(\tilde{b})$. Točka $t(\tilde{b})$ je u kopiji $Y_1 \subset X_\infty$. Neka je petlja $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ spuštanje puta $\tilde{\gamma}$ u prostor X . Slijedi da je $\text{lk}(\gamma, L) = 1$. S druge strane, neka je $\hat{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \hat{X}_\infty$ podizanje petlje γ u prostor \hat{X}_∞ . Spletni broj $\text{lk}(\gamma, L)$ jednak je 1 pa je $\hat{\gamma}$ put od bazne točke \hat{b} do točke $\hat{t}(\hat{b})$.

Budući da je $h \circ \tilde{\gamma}$ također podizanje petlje γ u \hat{X}_∞ , iz jedinstvenosti podizanja puteva slijedi da je $h \circ \tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$. Sada slijedi $ht(b) = \hat{t}(\hat{b})$, tj. $ht(h^{-1}(\hat{b})) = \hat{t}(\hat{b})$. Transformacija natkrivanja jedinstveno je određena time kamo preslikava baznu točku prostora natkrivanja pa vrijedi da su transformacije $ht h^{-1}$ i \hat{t} prostora natkrivanja \hat{X}_∞ jednake. Iz toga odmah slijedi jednakost

$$\hat{t} \circ h = h \circ t. \quad \square$$

Prethodni teorem pokazuje da je natkrivanje $p: X_\infty \rightarrow X$ zajedno s djelovanjem homeomorfizma t invarijanta linka L . Zato se natkrivanje X_∞ zove *beskonačno cikličko natkrivanje vanjšine linka L* . Λ -modul $H_1(X_\infty)$ je također invarijanta linka L i zove se *Alexanderov modul linka L* . Slično vrijedi i za k -slojno natkrivanja X_k vanjšine linka L .

Teorem 4.6 *k -slojno natkrivanje $p: X_k \rightarrow X$ vanjšine linka L ne ovisi o Seifertovoj plohi F korištenoj u konstrukciji. Djelovanje konačne cikličke grupe \mathbb{Z}_k na prostor natkrivanja X_k također ne ovisi o odabiru plohe F .*

Dokaz. Na sličan način kao u dokazu prethodnog teorema vidimo da se petlja α u prostoru X podiže u petlju u prostoru X_k ako i samo ako je presječni broj $\alpha \cdot F$ djeljiv s k ,

$$[\tilde{\alpha}] \in H_1(X_k) \Leftrightarrow \alpha \cdot F \equiv 0 \pmod{k}.$$

Presječni broj $\alpha \cdot F = \text{lk}(\alpha, L)$ ne ovisi o odabiru plohe F , pa zaključujemo da grupa tog natkrivanja ne ovisi o odabiru plohe F i da je natkrivanje X_k jedinstveno do na ekvivalentnost natkrivanja. Djelovanje transformacije t_k također je jedinstveno određeno, sličnim zaključivanjem kao u prethodnom teoremu, jer mora vrijediti da je $\text{lk}(\alpha, L) = 1 \Leftrightarrow t(\tilde{\alpha}(0)) = \tilde{\alpha}(1)$. \square

Natkrivanje X_k za $k \in \mathbb{N}$ zove se *k -to konačno cikličko natkrivanje vanjšine linka L* ili *k -slojno cikličko natkrivanje linka L* . Homologija prostora

4.2 Ciklička natkrivanja vanjštine linka

natkrivanja X_k s djelovanjem cikličke grupe \mathbb{Z}_k također je invarijanta linka L . Time smo već konstruirali prebrojivo mnogo zanimljivih invarijanti linka L . Zamijetimo da je beskonačno cikličko natkrivanje X_∞ natkrivanje svakog konačnog cikličkog natkrivanja vanjštine linka L . U sljedećem odjeljku pokazat će se zašto ova natkrivanja zovemo cikličkim natkrivanjima.

4.2.5 Abelova natkrivanja vanjštine linka

Natkrivanja X_∞ i X_k , za $k \in \mathbb{Z}$, sva su abelova natkrivanja vanjštine uzla — svako je jedinstveno čim je određena grupa transformacija \mathbb{Z} ili \mathbb{Z}_k . No to ne vrijedi i za linkove. Univerzalno abelovo natkrivanje linka nije cikličko — grupa transformacija tog natkrivanja je $H_1(S^3 - L) \cong \bigoplus_n \mathbb{Z}$. To je razlog zašto smo u prethodnom odjeljku jedinstvenost natkrivanja dokazali geometrijski iako se za uzlove može pokazati i algebarski. Ciklička natkrivanja X_∞ odnosno X_k vanjštine linka L odgovaraju podgrupama fundamentalne grupe $\pi_1(X)$ koje su jezgre redom sljedećih preslikavanja:

$$\pi_1(X) \longrightarrow \bigoplus_n (\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \text{ i}$$

$$\pi_1(X) \longrightarrow \bigoplus_n (\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_k.$$

Prvo preslikavanje u nizovima je abelizacija $\pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$, a drugo preslikavanje je $(k_1, \dots, k_n) \mapsto \sum_i k_i$, tj. pridruživanje $\text{lk}: H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$.

4.2.6 Generatori slobodnog Λ -modula $\bigoplus_i H_1(Y_i)$

Neka je $\{e_i\}$ skup predstavnika elemenata baze prve homološke grupe $H_1(X - F)$ prostora $X - F$; tada je on također skup predstavnika baze za grupu $H_1(Y_0)$. Ta baza podiže se ili spušta u bazu za prostor Y_k transformacijom t^k — baza za $H_1(Y_k)$ zato je $\{[t^k(e_i)]\}$. Prva homološka grupa disjunktne unije prostorâ Y_i zbog toga je slobodna abelova grupa s bazom $\{[t^k(e_i)] \mid k \in \mathbb{Z}, i \in \{1, \dots, n\}\}$. Kao Λ -modul ta grupa je slobodan modul generiran s $\{[e_i]\}$. Pitanje je što se događa kad prostore Y_i zalijepimo da dobijemo prostor X_∞ . Na to pitanje odgovorit će poglavlja koja slijede.

Poglavlje 5

Seifertova forma

Pokazali smo već da inkluzija $X - F \hookrightarrow X$, gdje je X vanjšina i F Seifertova ploha linka L , inducira trivijalni homomorfizam $H_1(X - F) \rightarrow H_1(X)$. Petlja u $X - F$ je petlja u X koja ne siječe plohu F ; ona je nul-homologna u X . U ovom poglavlju istražiti ćemo homologiju plohe F i prostora $X - F$. Na temelju toga konstruirati ćemo bilinearnu formu koja će poslužiti proučavanju homologije cikličkih natkrivanja vanjšine linka L .

5.1 Homologija ploha

Kompaktne povezane plohe $M_{g,n}$ s nepraznim rubom opisali smo ranije kao sfere s ručkama i uklonjenim interijerima diskova, no takve plohe moguće je i drugačije prikazati. Ploha $M_{g,n}$ s g ručki i $n \neq 0$ komponenti ruba homeomorfna je plohi koja se sastoji od jednog diska na čiji rub je pričvršćeno $2g$ traka u parovima i $n - 1$ usamljenih traka kao na slici (engl. disc-band surface). Detaljni opis može se naći u [Moise].



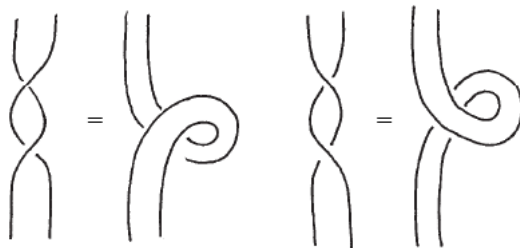
Slika 5.1: Disk ploha s trakama

5.2 Homologija komplementa plohe

Lako se može provjeriti da takva ploha zaista jest $M_{g,n}$. Ima n komponenti ruba, orijentabilna je i kompaktna, i njena Eulerova karakteristika je

$$\chi(D^2) + (2g + n - 1) \chi(I \times I) - 2(2g + n - 1) \chi(I) = 2 - 2g - n.$$

Krivulje koje će predstavljati elemente baze grupe $H_1(M_{g,n})$ možemo odabrati tako da (i) svaka krivulja prolazi jednom pripadajućom trakom, (ii) svake dvije krivulje se sijeku u jednoj ili nijednoj točki, i (iii) krivulje se sijeku samo ako pripadaju dvjema susjednim trakama koje čine par. Grupa $H_1(M_{g,n})$ izomorfna je direktnoj sumi $\bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z}$ i generirana je klasama tih jednostavno zatvorenih orijentiranih krivulja. To također nije teško provjeriti jer deformacijski retrakt te plohe očito je $\bigvee_{2g+n-1} S^1$ i deformacijska retrakcija prevodi svaku krivulju f_i u zasebnu kružnicu od $\bigvee_{2g+n-1} S^1$.



Slika 5.2: Zavrnutе trake plohe

Slijedi razmatranje što se događa kad tu plohu smjestimo u S^3 , moguće sa zavrnutim i međusobno zapetljanim trakama.

5.2 Homologija komplementa plohe

Teorem 5.1 *Neka je F povezana kompaktna orijentirana ploha s nepraznim rubom po dijelovima linearно smještena u S^3 . Tada su homološke grupe $H_1(S^3 - F)$ i $H_1(F)$ međusobno izomorfne i postoji jedinstvena nesingularna bilinearna forma*

$$\beta: H_1(S^3 - F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$$

takva da je $\beta([c], [d]) = \text{lk}(c, d)$ za svake dvije orijentirane jednostavno zatvorene krivulje c u $S^3 - F$ i d u F .

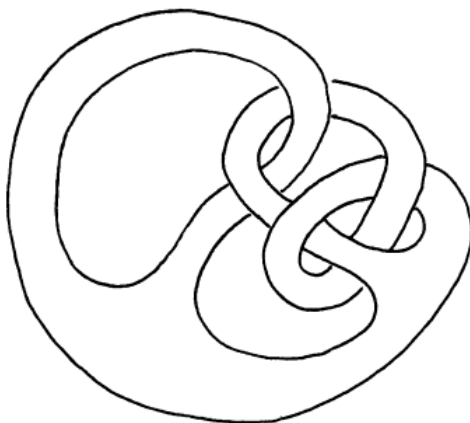
Dokaz. Ploha F sada je smještena u S^3 . Njena prva homološka grupa je $H_1(F) \cong \bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z}$ generirana klasama $2g + n - 1$ jednostavno zatvorenih orijentiranih krivulja f_i , gdje je g rod plohe i n broj komponenti linka L .

5.2 Homologija komplementa plohe

Neka je V njena regularna okolina u S^3 . V je tada tijelo s $2g + n - 1$ ručki (engl. handlebody) smješteno u S^3 . Ploha F je deformacijski reakt svoje regularne okoline, inkluzija $F \hookrightarrow V$ je homotopska ekvivalencija, i homološke grupe plohe i njene regularne okoline međusobno su prirodno izomorfne.

Rub ∂V tijela s ručkama V je sfera s ručkama, zatvorena povezana ploha smještena u S^3 roda $2g + n - 1$; prva homološka grupa te plohe izomorfna je grupi $(\bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z}) \oplus (\bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z})$. Generatori $[f'_i]$ i $[e_i]$ te grupe mogu biti odabrani tako da (i) svaka f'_i je jednostavno zatvorena krivulja, (ii) svaki e_i je rub malog diska u V koji siječe f'_i u jednoj točki, i (iii) inkluzija $\partial V \subset V$ inducira na homologijama preslikavanje koje $[f'_i]$ prevodi u $[f_i]$ i svaki $[e_i]$ naravno u nulu. K tome, (iv) orijentacije krivulja $\{e_i\}$ mogu biti odabrane tako da je $\text{lk}(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.

To je standardna homologija inkuzije plohe F u pripadajuće tijelo s ručkama V i ona ne ovisi o smještenju F i V u S^3 .



Slika 5.3: Smještenje tijela s ručkama u S^3

Nas zanima homologija prostora $S^3 - F$; ona ovisi o smještenju. Neka je W zatvorenje komplementa regularne okoline plohe F , tj. zatvorenje od $S^3 - V$. Inkluzija $W \hookrightarrow S^3 - F$ je također homotopska ekvivalencija i homologije tih dvaju prostora međusobno su prirodno izomorfne. Vrijedi da je presjek $W \cap V = \partial W = \partial V$ homeomorfan plohi M_{2g+n-1} . Pogledajmo dio Mayer-Vietorisovog niza za $V \cup W$:

$$0 \cong H_2(S^3) \longrightarrow H_1(\partial V) \longrightarrow H_1(V) \oplus H_1(W) \longrightarrow H_1(S^3) \cong 0.$$

5.2 Homologija komplementa plohe

Budući da su prva i zadnja grupa u nizu trivijalne, preslikavanje u sredini inducirano inkluzijama ruba $\partial V = \partial W$ u prostore V i W je izomorfizam. Zato je $H_1(W)$ izomorfna grupi $\bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z}$. Njena slobodna baza je skup $\{[e_i]\}$ zato što (i) slike elemenata slobodne baze $\{[e_i]\} \cup \{[f'_i]\}$ grupe $H_1(\partial V)$ generiraju grupu $H_1(V) \oplus H_1(W)$, i (ii) svaki $[e_i]$ jednak je 0 u grupi $H_1(V)$. To vrijedi i za grupu $H_1(S^3 - F) \cong H_1(W)$.

Definirajmo sada bilinearnu formu $\beta: H_1(S^3 - F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ sa

$$\beta([e_i], [f_j]) = \text{lk}(e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

i proširimo ju po bilinearnosti. Jasno je da je forma s tim svojstvima jedinstvena i nesingularna. Preostaje dokazati da je $\beta([c], [d]) = \text{lk}(c, d)$ za svake dvije jednostavno zatvorene orijentirane krivulje c u $S^3 - F$ i d u F .

Već smo se susreli s presječnim brojem — za dva disjunktna uzla C i K , pokazali smo da $C \cdot D$ ne ovisi niti o odabiru plohe D takve da je $\partial D = K$ niti o reprezentantu klase $[C] \in H_1(S^3 - K)$. Također, pokazali smo da je svejedno koji od ta dva uzla razapinje plohu D i da vrijedi da je $C \cdot D$ jednak spletnom broju $\text{lk}(C, K)$. Općenito, svakom paru disjunktne 1-lanaca C i K u S^3 može se na taj način pridružiti broj $C \cdot D$, gdje je D neki 2-lanac u S^3 takav da je $\partial D = K$.

Naše krivulje c i d također su disjunktne, kao što su bilo koji 1-lanac u F i 1-lanac u $S^3 - F$. Zato prethodno opisano pridruživanje inducira bilinearnu formu $\hat{\beta}$ na $H_1(S^3 - F) \times H_1(F)$. Ta forma poklapa se s formom β na bazi i budući da je β jedina takva bilinearna forma, ona mora biti jednaka $\hat{\beta}$. Zato za formu β vrijedi što i za formu $\hat{\beta}$ — za proizvoljne disjunktne jednostavno zatvorene orijentirane krivulje c i d , vrijednost $\beta([c], [d])$ jednaka je $\text{lk}(c, d)$. \square

Naglasimo da bilinearna forma β ne ovisi o odabiru baza za $H_1(F)$ i $H_1(S^3 - F)$ jer je jedinstvena bilinearna forma za koju je $\beta([c], [d]) = \text{lk}(c, d)$ i ta vrijednost ne ovisi o bazama. Dalje, baze korištene u teoremu su *dualne baze* u smislu da je $\beta([e_i], [f_j]) = \delta_{ij}$. Za svaku bazu grupe $H_1(F)$ postoji jedinstvena β -dualna baza za $H_1(S^3 - F)$. Općenito, za podskup $A \subset S^3$ bilinearna forma

$$\text{link}: H_1(S^3 - A) \times H_1(A) \rightarrow \mathbb{Z}$$

takva da je $\text{link}([c], [d]) = \text{lk}(c, d)$ za svake dvije jednostavno zatvorene orijentirane krivulje c u $S^3 - A$ i d u A , zove se *spletno sparivanje* (engl. linking pairing).

5.3 Seifertova forma

Za orijentiranu jednostavno zatvorenu krivulju C u komplementu $S^3 - F$ Seifertove plohe linka L vrijedi da je

$$[C] = \sum_i \text{lk}(C, f_i) [e_i] = \sum_i \beta([C], [f_j]) [e_j] \in H_1(S^3 - F),$$

gdje su $\{[e_i]\}$ i $\{[f_j]\}$ međusobno dualne baze za $H_1(S^3 - F)$ i $H_1(F)$.

Konstruirali smo u prethodnom poglavlju beskonačno cikličko natkrivanje X_∞ vanjštine orijentiranog linka L i pokazali da je prva homološka grupa $H_1(X_\infty)$ modul nad $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ — Alexanderov modul linka L .

5.3.1 Seifertova forma

Već smo pokazali da Seifertova ploha F kao ploha u X ima regularnu okolinu $F \times [-1, 1]$, gdje je F poistovjeđena s $F \times \{0\}$ i notacija odabrana tako da meridijan svake komponente linka L ulazi u okolinu plohe na negativnoj strani $F \times \{-1\}$ i izlazi na pozitivnoj $F \times \{1\}$. Preciznije, postoji homeomorfizam $h: F \times [-1, 1] \rightarrow X$ takav da je (i) $h(x, 0) = x$ za sve točke x plohe F , i (ii) $h(F \times [-1, 1]) \cap \partial X = h(\partial F \times [-1, 1])$. Neka su s^+ i s^- dva smještenja $F \rightarrow S^3 - F$ definirana sa

$$s^\pm(x) = h(x, \pm 1).$$

Za jednostavno zatvorenu orijentiranu krivulju c u F označit ćemo s c^+ odnosno c^- slike od c po preslikavanjima s^+ odnosno s^- . Te krivulje mogli bismo zvati podizanjem odnosno spuštanjem krivulje c s plohe F u komplement $X - F$. Upravo te operacije pomoći će nam da proučimo homologiju cikličkih natkrivanja vanjštine linka. Bilinearna forma β prikazuje homološku klasu krivulje c u $S^3 - F$ u bazi za $H_1(S^3 - F)$. Nađimo sada bilinearnu formu koja će za krivulju d u F prikazivati homološke klase krivulja d^+ i d^- u bazi za $H_1(S^3 - F)$.

Definicija 5.1 *Seifertovoj plohi F orijentiranog linka L pridružena je Seifertova forma, bilinearna forma*

$$\alpha: H_1(F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$$

definirana sa $\alpha(x, y) = \beta(s_*^-(x), y)$.

Po prethodnom teoremu forma α jest bilinearna i dobro je definirana. Ako su a i b dvije orijentirane jednostavno zatvorene krivulje u F , tada je $\alpha([a], [b]) = \text{lk}(a^-, b)$. Translacijom po drugoj koordinati okoline $F \times [-1, 1]$ vidimo da je $\alpha([a], [b])$ također jednak $\text{lk}(a, b^+)$. Dakle,

$$\alpha([a], [b]) = \text{lk}(a^-, b) = \text{lk}(a, b^+).$$

5.3 Seifertova forma

5.3.2 Seifertova matrica

U odnosu na bazu $\{[f_i]\}$ za $H_1(F)$ i njoj β -dualnu bazu $\{[e_i]\}$ za $H_1(S^3 - F)$ kao ranije, Seifertova forma α reprezentirana je *Seifertovom matricom* A , gdje je

$$A_{ij} = \alpha([f_i], [f_j]) = \text{lk}(f_i^-, f_j) = \text{lk}(f_i, f_j^+).$$

Odmah slijedi da su podizanja i spuštanja predstavnika elemenata baze za $H_1(F)$ u grupi $H_1(S^3 - F)$ predstavnici redom sljedećih elemenata:

$$[f_i^-] = \sum_j \text{lk}(f_i^-, f_j) [e_j] = \sum_j A_{ij} [e_j], \text{ i}$$

$$[f_i^+] = \sum_j \text{lk}(f_i^+, f_j) [e_j] = \sum_j \text{lk}(f_j, f_i^+) [e_j] = \sum_j A_{ji} [e_j] = \sum_j A_{ij}^T [e_j].$$

Seifertova forma i matrica nisu invarijante linkova jer ovise o plohi F . Seifertova matrica k tome ovisi o odabiru slobodne baze za $H_1(F)$. No ipak, Seifertova matrica ima neka zanimljiva svojstva koja ne ovise o odabiru baze za grupu $H_1(F)$.

5.3.3 Seifertova matrica i presječni broj

Propozicija 5.1 *Neka je A Seifertova matrica obzirom na neku Seifertovu plohu F linka L i u odnosu na neke proizvoljne baze za $H_1(S^3 - F)$ i $H_1(F)$. Tada vrijedi da je*

$$\det(A - A^T) = \begin{cases} \pm 1 & \text{ako je } L \text{ uzao,} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Seifertova ploha je orijentirana 2-mnogostrukost — zato svaka dva ciklusa u općem položaju u F imaju presječni broj. Za dva 1-ciklusa j i k u plohi označit ćemo njihov presječni broj s $j \cdot k$ jednako kao i ranije. *Presječni broj* $j_\alpha \cdot k_\beta$ dva 1-simpleksa u plohi jednak je $+1$ odnosno -1 ako baza (j_α, k_β) jest odnosno nije sukladna s orijentacijom plohe F , ili 0 ako se j_α i k_β ne sijeku. Zato vrijedi da je

$$j \cdot k = -k \cdot j.$$

Na slici je vidljiv presječni broj $j_\alpha \cdot k_\beta$ u plohi koja je s ove strane orijentirana pozitivno; 1-simpleks j_α prikazan je kao zakrivljeni segment i 1-simpleks k kao ravni.

Neka su sada j i k jednostavno zatvorene orijentirane krivulje u plohi F . Ploha $J = j \times [-1, 1]$ u okolini $F \times [-1, 1]$ siječe krivulju k upravo tamo gdje

5.3 Seifertova forma



Slika 5.4: Presječni broj krivulja u plohi

krivulja j siječe krivulju k . Uzmimo da je ploha J orijentirana tako da je njen rub jednak $j^+ - j^-$. Lako je vidjeti da je onda

$$J \cdot k = j \cdot k.$$

Neka su D^+ i D^- 2-lanci u S^3 takvi da je $\partial D^+ = j^+$ i $\partial D^- = j^-$. Tada je

$$\partial J = \partial(D^+ - D^-).$$

Presječni broj 2-lanca $D^+ - D^-$ s krivuljom k jednak je

$$(D^+ - D^-) \cdot k = D^+ \cdot k - D^- \cdot k = \text{lk}(j^+, k) - \text{lk}(j^-, k).$$

No znamo da je jednak i presječnom broju plohe J s krivuljom k . Zato je

$$j \cdot k = J \cdot k = \text{lk}(j^+, k) - \text{lk}(j^-, k).$$

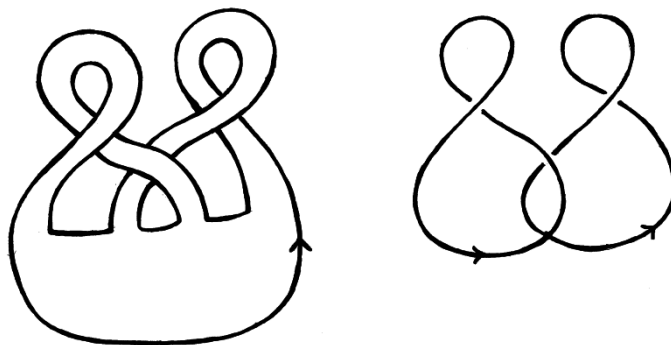
Dokaz propozicije 5.1. Neka je B Seifertova matrica u odnosu na ranije opisanu prirodnu bazu $\{[f_j]\}$ za $H_1(F)$. Krivulje f_j su odabrane tako da je presječni broj $f_{2j-1} \cdot f_{2j} = -1$ za $j = 1, \dots, g$, tj. za trake u parovima, a inače je uvijek 0. Zato se matrica $B - B^\tau$ sastoji na dijagonali od g blokova oblika $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i moguće jedne nul-matrice. Determinanta te matrice jednaka je $+1$ ili -1 ovisno o parnosti roda plohe F ako je L uzao, ili je jednaka 0 ako je L link s više komponenti. Obje matrice A i B predstavljaju Seifertovu formu α pa su determinante $\det(A - A^\tau)$ i $\det(B - B^\tau)$ jednake i tvrdnja je dokazana. \square

S druge strane, svaka matrica A koja se može prikazati kao umnožak PVP^τ , gdje je P neka unimodularna matrica i V matrica koja se sastoji na dijagonali od blokova oblika $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i moguće jedne nul-matrice, Seifertova je matrica nekog linka L . Matrica P odgovara naravno promjeni baze za $H_1(F)$ neke plohe F . Svaka cjelobrojna matrica A takva da je $\det(A - A^\tau) = \pm 1$ Seifertova je matrica nekog uzla K . Dokaz tih karakterizacija Seifertovih matrica je konstruktivan i može se pronaći u [Kawauchi, str. 62].

5.3 Seifertova forma

5.3.4 Primjeri Seifertovih matrica

Primjer 5.1 Seifertova ploha trolista prikazana je na slici zajedno s krivuljama koje predstavljaju generatore njene prve homološke grupe.

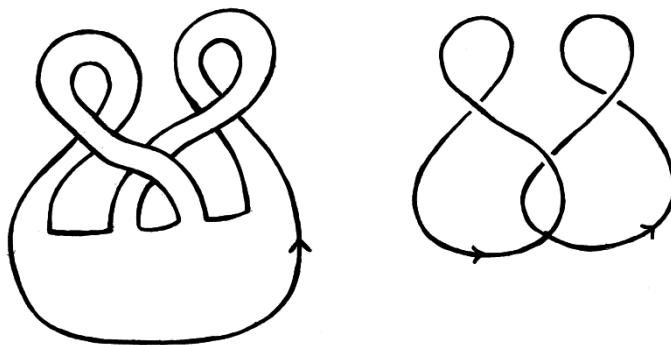


Slika 5.5: Seifertova ploha trolista

Na slici je vidljivo što će se dogoditi ako podignemo ili spustimo krivulje s plohe. Recimo, ako spustimo desnu krivulju, njen spletni broj s prvom bit će 0. Ako je pak podignemo, spletni broj bit će 1. Ako podignemo lijevu krivulju, ona će sa svojim originalom imati spletni broj -1 , jednako kao i desna krivulja sa svojim. Dakle, Seifertova matrica ove plohe uz odabrane krivulje kao na slici jednaka je

$$S(3_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 5.2 Pogledajmo sada Seifertovu plohu osmice:



Slika 5.6: Seifertova ploha osmice

5.3 Seifertova forma

Na prvi pogled jednaka je Seifertovoj plohi trolista, ali ako pogledamo pažljivije, vidjet ćemo da je bitno drugačije smještena u S^3 . Slično kao u prošlom primjeru dobivamo da je Seifertova matrica osmice, uz odabranu ovu Seifertovu plohu i krivulje, jednaka

$$S(4_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.3.5 Neki generatori i relatori grupe $H_1(X_\infty)$

Uzmimo sada da su $\{f_i\}$ krivulje u $Y_0 \cap Y_1$ i predstavnici elemenata baze za $H_1(Y_0 \cap Y_1)$. Također, uzmimo da su $\{e_i\}$ krivulje u Y_0 i predstavnici elemenata baze za $H_1(Y_0)$.

Tada, za svaki $k \in \mathbb{Z}$, klase krivulja $\{t^k(e_i)\}$ čine bazu za $H_1(Y_k)$ i klase krivulja $\{t^k(f_i)\}$ čine bazu za $H_1(Y_k \cap Y_{k+1})$. Prva homološka grupa disjunktne unije prostorâ Y_k zato je slobodna abelova grupa s bazom čiji su elementi klase krivulja $\{t^k(e_i) : k \in \mathbb{Z}, i \in \{1, \dots, 2g + n - 1\}\}$. Pitanje je što se događa kad zalijepimo prostore Y_k da bismo dobili prostor X_∞ .

Postoji prirodno preslikavanje $H_1(\bigcup_k Y_k) \rightarrow H_1(X_\infty)$ inducirano inkluzijama $Y_k \hookrightarrow X_\infty$. Kad bi to preslikavanje bilo surjekcija, mogli bismo reći da klase krivulja $\{t^k(e_i)\}$ generiraju cijelu grupu $H_1(X_\infty)$. No u to ne možemo još biti sigurni. Recimo, kod konačnog cikličkog natkrivanja X_k lijepljenjem prostorâ pojavljuje se petlja čiju klasu nije moguće izraziti pomoću postojećih — to je petlja koja obilazi sve prostore jedanput, petlja koja je podizanje petlje $k\mu$.

Ono što ipak sada možemo reći jest da među klasama krivulja $t^k(e_i)$ u natkrivajućem prostoru X_∞ sigurno vrijede neke relacije. U prostoru X_∞ krivulja $t^k(f_i)$ se podiže u prostor Y_{k+1} , a spušta u prostor Y_k , i zato su njihove klase jednake:

$$[t^k(f_i)^-] = \sum_j A_{ij} [t^k(e_j)], \text{ i}$$

$$[t^k(f_i)^+] = \sum_j A_{ij}^\tau [t^{k+1}(e_j)].$$

Podizanje krivulje $t^k(f_i)$ u prostor Y_{k+1} homologno je u X_∞ spuštanju iste krivulje $t^k(f_i)$ u prostor Y_k , tj. vrijedi

$$[t^k(f_i)^-] = [t^k(f_i)^+] \in H_1(X_\infty),$$

i zato mora za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijediti relacija:

$$\sum_j A_{ij} [t^k(e_j)] = \sum_j A_{ij}^\tau [t^{k+1}(e_j)], \text{ to jest}$$

5.3 Seifertova forma

$$t^k \sum_j (tA^\tau - A)_{ij}[e_j] = 0 \in H_1(X_\infty).$$

Time smo pronašli neke elemente jezgre, no ne možemo još biti sigurni generiraju li ti elementi cijelu jezgru preslikavanja $H_1(\bigcup_k Y_k) \rightarrow H_1(X_\infty)$.

U sljedećem poglavlju pokazat ćemo da to preslikavanje jest surjekcija i da su ti elementi (relatori) dovoljni da opišu jezgru. Pokazat ćemo dakle da generatori $\{t^k[(e_i)]\}$ uz relatore $\{t^k \sum_j (tA^\tau - A)_{ij}[e_j]\}$ čine prezentaciju grupe $H_1(X_\infty)$. Gledajući $H_1(X_\infty)$ kao Λ -modul, to je ekvivalentno tome da generatori $\{[e_i]\}$ uz relatore $\{\sum_j (tA^\tau - A)_{ij}[e_j]\}$ prezentiraju Λ -modul $H_1(X_\infty)$.

Poglavlje 6

Alexanderov polinom

U ovom poglavlju istražit ćemo prvu homološku grupu beskonačnog cikličkog natkrivanja vanjštine uzla. Pokazat će se da, uz djelovanje grupe transformacija tog natkrivanja, ta grupa postaje modul nad prstenom Laurentovih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima — Alexanderov modul uzla. J. W. Alexander je 1928. godine opisao jednostavan način računanja polinoma iz dijagrama uzla i pokazao da je to pridruživanje invarijanta uzlova [Alexander]. H. Seifert je 1934. godine istražio topološku pozadinu tog pridruživanja, homologiju beskonačnog cikličkog natkrivanja vanjštine uzla — njemu pripada zasluga i za druge invarijante proistekle iz konačnih cikličkih natkrivanja vanjštine uzla.

6.1 Prezentacija modula

Neka je M modul nad komutativnim prstenom R . Pretpostavit ćemo da R posjeduje jedinicu 1 i da je $1x = x$ za svaki $x \in M$. R -modul je *slobodan* ako se svaki njegov element može na jedinstven način izraziti kao linearna kombinacija elemenata baze; modul $\bigoplus_n R$ je kanonski primjer slobodnog R -modula.

Konačna prezentacija modula M je egzaktni niz

$$F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0,$$

gdje su E i F slobodni R -moduli konačnih baza. Ako baze za E i F označimo sa $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ i $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, preslikavanje $\alpha: F \rightarrow E$ možemo reprezentirati $m \times n$ matricom A . Slike elemenata baze $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ čine stupce matrice A , tj.

$$\alpha(f_i) = \sum_j A_{ji} e_j.$$

6.2 Prezentacija Alexanderovog modula

Matrica A zove se *prezentacijska matrica modula* M . Preslikavanje ϕ je surjeksija pa slijedi da je $M \cong E/\text{Im } \alpha$; zato e_1, e_2, \dots, e_m možemo gledati kao generatore za M , a slike od f_1, f_2, \dots, f_n ili stupce matrice A kao relatore.

Ako je naprimjer modul generiran elementima e_i uz relatore $\sum_i B_{ij}e_j$, njegova prezentacijska matrica je B^T , matrica transponirana matrici B .

6.2 Prezentacija Alexanderovog modula

U ovom odjeljku pokazat ćemo ono o čemu smo govorili u prethodnom poglavlju — skup generatora $\{[e_i]\}$ uz skup relatora $\{\sum_j (tA^T - A)_{ij}[e_j]\}$ prezentira Λ -modul $H_1(X_\infty)$.

Teorem 6.1 *Neka je F Seifertova ploha za orijentirani link L u S^3 i neka je A matrica, u odnosu na neku bazu od $H_1(F)$, pripadajuće Seifertove forme. Tada je $tA - A^T$ matrica koja prezentira Λ -modul $H_1(X_\infty)$.*

Dokaz. Prikažimo X_∞ kao uniju prostora Y' i Y'' , gdje je $Y' = \bigcup_i Y_{2i+1}$ i $Y'' = \bigcup_i Y_{2i}$. Svaki od tih prostora je disjunktna unija prebrojivo mnogo kopija prostora Y i njihov presjek je disjunktna unija prebrojivo mnogo kopija plohe F . Istražit ćemo sada homologiju prostora X_∞ koristeći Mayer-Vietorisov niz za $X_\infty = Y' \cup Y''$. Taj dugi egzaktan niz homoloških grupa slijedi iz kratkog egzaktnog niza lančanih kompleksa, koji u ovom slučaju izgleda ovako:

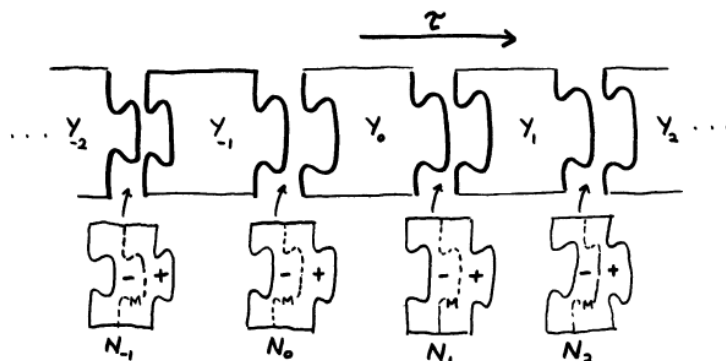
$$0 \longrightarrow C_n(Y' \cap Y'') \xrightarrow{\alpha_n} C_n(Y') \oplus C_n(Y'') \xrightarrow{\beta_n} C_n(X_\infty) \longrightarrow 0.$$

Transformacija t prostora natkrivanja preslikava Y' u Y'' i obratno pa lančane grupe $C_n(Y')$ i $C_n(Y'')$ tih individualnih prostora nisu Λ -moduli, no $C_n(Y') \oplus C_n(Y'') = \bigoplus_i C_n(Y_i)$ ipak jest takav modul. Lančane grupe $C_n(Y' \cap Y'') = \bigoplus_i C_n(Y_{i-1} \cap Y_i)$ i $C_n(X_\infty)$ su Λ -moduli pa su sve grupe u gornjem nizu Λ -moduli.

Preslikavanja α_n i β_n trebamo definirati tako da budu homomorfizmi modulâ i da gornji niz bude kratki egzaktan niz lančanih kompleksa — definirat ćemo ih ovako: $\beta_n(a, b) = a + b$, i za lanac $x \in C_n(Y_{i-1} \cap Y_i)$ neka je $\alpha_n(x) = (-x, x) \in C_n(Y_{i-1}) \oplus C_n(Y_i)$. Odmah slijedi da su α_n i β_n homomorfizmi modulâ i da je $\text{Im } \alpha_n = \text{Ker } \beta_n$. Kratki egzaktan niz lančanih kompleksa na uobičajen način daje sljedeći dugi egzaktan niz homoloških modula:

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow H_1(Y' \cap Y'') \xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y') \oplus H_1(Y'') \xrightarrow{\beta_*} H_1(X_\infty) \\ &\longrightarrow H_0(Y' \cap Y'') \xrightarrow{\alpha_*} H_0(Y') \oplus H_0(Y''). \end{aligned}$$

6.2 Prezentacija Alexanderovog modula



Slika 6.1: Beskonačno cikličko natkrivanje

Seifertova ploha F je po definiciji povezana pa je $H_0(F) \cong \mathbb{Z}$. Presjek $Y' \cap Y''$ je prebrojiva disjunktna unija kopija plohe F , gdje je, za svaki $i \in \mathbb{Z}$, F_{i+1} slika restrikcije homeomorfizma t na F_i . Zato se $H_0(Y' \cap Y'')$ sastoji od jedne kopije grupe \mathbb{Z} za svaku potenciju od t , i kao Λ -modul može biti poistovjeđena s $\Lambda \otimes H_0(F)$, gdje je s $1 \otimes 1$ poistovjeđen generator grupe $H_0(Y_0 \cap Y_1)$. Tenzorski produkt ovdje je tenzorski produkt dvaju \mathbb{Z} -modula. Grupa $H_0(Y') \oplus H_0(Y'')$ je direktna suma prebrojivo mnogo kopija grupe $H_0(Y) \cong \mathbb{Z}$ pa može biti kao Λ -modul poistovjeđena s $\Lambda \otimes H_0(Y)$, gdje je s $1 \otimes 1$ poistovjeđen generator grupe $H_0(Y_0)$. Oba modula izomorfna su Λ -modulu $\Lambda \otimes \mathbb{Z} = \Lambda$.

Preslikavanje α_* prevodi generator grupe $H_0(Y' \cap Y'')$, koji je predstavljen 0-simpleksom u $Y_0 \cap Y_1$, u

$$\alpha_*(1 \otimes 1) = t \otimes 1 - 1 \otimes 1.$$

Slijedi da je α_* sa $H_0(Y' \cap Y'')$ injekcija pa β_* sa $H_1(Y') \oplus H_1(Y'')$ mora biti surjekcija:

$$\dots \longrightarrow H_1(Y' \cap Y'') \xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y') \oplus H_1(Y'') \xrightarrow{\beta_*} H_1(X_\infty) \longrightarrow 0.$$

Primijenimo sada na H_1 jednako zaključivanje: grupa $H_1(Y' \cap Y'')$ poistovjeđena je s $\Lambda \otimes H_1(F)$ tako da je s $1 \otimes x$ poistovjeđen $x \in H_1(Y_0 \cap Y_1)$, i grupa $H_1(Y') \oplus H_1(Y'')$ poistovjeđena je s $\Lambda \otimes H_1(Y)$ tako da je s $1 \otimes y$ poistovjeđen $y \in H_1(Y_0)$. Tada, kao Λ -modul, $H_1(Y' \cap Y'')$ je slobodni modul s bazom $\{1 \otimes [f_i]\}$ i $H_1(Y') \oplus H_1(Y'')$ slobodni modul s bazom $\{1 \otimes [e_i]\}$, gdje su $\{f_i\}$ jednostavno zatvorene krivulje u $Y_0 \cap Y_1$ i $\{e_i\}$ jednostavno zatvorene krivulje u Y_0 kao ranije. Sada definicija preslikavanja α daje

$$\alpha_*(1 \otimes [f_j]) = \sum_i (\text{lk}(f_j^+, f_i) t \otimes [e_i] - \text{lk}(f_j^-, f_i) \otimes [e_i]),$$

6.2 Prezentacija Alexanderovog modula

što uz definiciju Seifertove matrice $A_{ij} = \text{lk}(f_i^-, f_j) = \text{lk}(f_i, f_j^+)$ daje

$$\alpha_*(1 \otimes [f_j]) = \sum_i (tA_{ji} - A_{ij}) \otimes [e_i],$$

gdje je A Seifertova matrica u odnosu na dane baze. Zato je u odnosu na baze slobodnih Λ -modula, $\{1 \otimes [f_i]\}$ i $\{1 \otimes [e_i]\}$, preslikavanje α_* reprezentirano matricom $tA - A^\tau$, a zato što je β surjekcija, ta matrica je prezentacijska matrica Λ -modula $H_1(X_\infty)$. \square

Ako pogledamo preslikavanje $\alpha_*: H_1(Y' \cap Y'') \rightarrow H_1(Y') \oplus H_1(Y'')$ zamijetiti ćemo da je ono također injekcija:

$$\alpha_*\left(\sum_j \lambda_j \otimes [f_j]\right) = \sum_{i,j} (tA - A^\tau)_{ji} \otimes [e_i].$$

Zato je sljedeći kratki niz egzaktan:

$$0 \longrightarrow H_1(Y' \cap Y'') \longrightarrow H_1(Y') \oplus H_1(Y'') \longrightarrow H_1(X_\infty) \longrightarrow 0.$$

Činjenica da je preslikavanje β_* surjekcija govori nam da generatora ima dovoljno, a činjenica da je preslikavanje α_* injekcija da nema nepotrebnih relatora, tj. da su relatori nezavisni. Dakle, to je optimalna prezentacija.

6.2.1 Prezentacija abelove grupe $H_1(X_k)$

Ni jedno ni drugo neće se dogoditi ako je natkrivanje konačno cikličko — preslikavanje $\oplus_i H_1(Y_i) \rightarrow H_1(X_k)$ neće biti surjekcija niti preslikavanje $\oplus_i H_1(Y_i \cap Y_{i+1}) \rightarrow \oplus_i H_1(Y_i)$ injekcija. To znači da preslikavanjem β_* nećemo dobiti sve generatore, a preslikavanjem α_* ćemo dobiti i nepotrebne relatore [Rolfsen, Lickorish].

Modul $H_1(X_k)$ bit će jednak \mathbb{Z} -modulu $M \oplus \mathbb{Z}$, gdje je M modul prezentiran matricom za α_* , a generator modula \mathbb{Z} predstavljen petljom koja obilazi jedanput sve kopije prostora Y . Preslikavanje α_* nije injekcija pa također u prezentaciji modula M imamo nepotrebnih relatora. Pokažimo sve to na primjeru za dvoslojno cikličko natkrivanje X_2 .

Teorem 6.2 *Neka je X_2 cikličko dvoslojno natkrivanje vanjštine X linka L i neka je A Seifertova matrica za L obzirom na neku Seifertovu plohu linka L . Tada je torzijski dio M grupe $H_1(X_2)$ kao abelova grupa prezentiran matricom $\begin{pmatrix} -A^\tau & A \\ A & -A^\tau \end{pmatrix}$. Grupa $H_1(X_2)$ jednaka je $M \oplus \mathbb{Z}$.*

6.2 Prezentacija Alexanderovog modula

Dokaz. Dugi egzakti Mayer-Vietorisov niz za par Y_0, Y_1 je

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_1(Y_0 \cap Y_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_1(Y_0) \oplus H_1(Y_1) & \xrightarrow{\beta_*} & H_1(X_2) \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \cdots \\ & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \end{array}$$

Grupa $H_0(Y_0 \cap Y_1)$ jednaka je direktnoj sumi prvih homoloških grupa dvije kopije F_0 i F_1 Seifertove plohe F — one su povezane pa je to $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Preslikavanje α_* preslikava $(1, 0) \mapsto (-1, 1)$ i $(0, 1) \mapsto (1, -1)$. Jezgra tog preslikavanja generirana je s $(1, 1) \in H_0(F_0) \oplus H_0(F_1) = H_0(Y_0 \cap Y_1)$. Zato je sljedeći niz egzaktan:

$$H_1(Y_0 \cap Y_1) \xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y_0) \oplus H_1(Y_1) \xrightarrow{\beta_*} H_1(X_2) \xrightarrow{\delta_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

gdje je \mathbb{Z} ciklička podgrupa grupe $H_0(Y_0 \cap Y_1)$ generirana elementom $(1, -1)$ u $H_0(Y_0 \cap Y_1)$. Predstavnicima elemenata slobodne baze grupe $H_1(Y_0) \cap H_1(Y_1)$ su krivulje $\{f_j\} \cup \{f'_j\}$, a grupe $H_1(Y_0) \oplus H_1(Y_1)$ krivulje $\{e_i\} \cup \{e'_i\}$. Sada kao i ranije imamo za preslikavanje α_* i Seifertovu matricu A :

$$[f_j] \mapsto A_{ji}[e'_i] - A_{ji}^\tau[e_i],$$

$$[f'_j] \mapsto A_{ji}[e_i] - A_{ji}^\tau[e'_i].$$

Prethodni egzakti niz kaže da $H_1(X_2)$ možemo rastaviti kao $\text{Im } \beta_* \oplus \mathbb{Z}$, gdje je \mathbb{Z} generiran petljom γ koja siječe svaku Seifertovu plohu jedanput. To je tako jer ako uzmemo da je neki meridijan μ linka L petlja iz bazne točke $p \in F$ i petlju γ kao podizanje petlje 2μ , tada se 1-lanac $\gamma \in C_1(X_2)$ preslikava po δ u $p_0 - p_1 \in C_0(Y_0 \cap Y_1)$, gdje su $p_0 \in F_0$ i $p_1 \in F_1$ podizanja bazne točke $p \in F$.

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\mu}, \tilde{\mu}') & \xrightarrow{\beta} & \gamma \\ \downarrow & & \\ p_0 - p_1 & \xrightarrow{\alpha} & (p_1 - p_0, p_0 - p_1) \end{array}$$

Prezentacijska matrica abelove grupe $H_1(X_2)$ jednaka je prezentacijakoj matrici abelove grupe $\text{Im } \beta_*$ uz dodan jedan red nula za petlju γ . Prezentacijska matrica za $\text{Im } \beta_*$, uzevši u obzir kako se preslikavaju $[f_j]$ i $[f'_j]$, je

$$\begin{pmatrix} -A^\tau & A \\ A & -A^\tau \end{pmatrix}. \quad \square$$

Vidjeli smo sada da $\text{Im } \beta_*$ nije cijela grupa $H_1(X_2)$ nego samo njen torzijski dio — kod konačnih cikličkih natkrivanja pojavljuje se petlja koja obilazi

6.3 Elementarni ideali

jedanput sve kopije prostora Y . Slika te petlje γ , koja je podizanje petlje $k\mu$ u cikličkom natkrivanju X_k , invarijantna je na sve transformacije natkrivanja. Njena klasa $[\gamma] \in H_1(X_k)$ također je invarijantna na sve transformacije natkrivanja X_k .

Neka je $\{e_1^0, e_2^0, \dots, e_{2g}^0, \dots, e_1^{k-1}, \dots, e_{2g}^{k-1}\}$ baza za disjunktну uniju prostorâ Y_0, \dots, Y_{k-1} . Možemo je kraće zapisati vektorski $\{e^0, e^1, \dots, e^{k-1}\}$. Tada relacije možemo pisati ovako:

$$e^0 A^\tau = e^1 A, \dots, e^{k-1} A^\tau = e^0 A.$$

Time je prezentacijska matrica torzijskog dijela T grupe $H_1(X_k) \cong T \oplus \mathbb{Z}$ sljedećeg oblika:

$$\begin{pmatrix} -A^\tau & & & & A \\ A & -A^\tau & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & A & -A^\tau \end{pmatrix}$$

Pogledajmo sada još kako kod konačnih natkrivanja na ovaj način dobivamo previše relatora, tj. relatore koji nisu nezavisni. Ako je Seifertova matrica A invertibilna, možemo sve generatore izraziti pomoću generatora e^0 na sljedeći način:

$$e^0 (A^\tau A^{-1})^k = e^0,$$

pa je prezentacijska matrica torzijskog dijela abelove grupe $H_1(X_k)$ jednaka $(A^\tau A^{-1})^k - I$. Ako matrica A nije invertibilna, označimo s Γ matricu $A(A^\tau - A)$, tada je $\Gamma^k - (\Gamma - I)^k$ prezentacijska matrica torzijskog dijela abelove grupe $H_1(X_k)$. [Rolfsen]

6.3 Elementarni ideali

Teorem 6.3 *Svake dvije prezentacijske matrice, A i A_1 , modula M razlikuju se za konačan niz sljedećih transformacija i njihovih inverza:*

- (i) *permutacija redova ili stupaca;*
- (ii) *zamjena matrice A matricom $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;*
- (iii) *dodavanje novog stupca koji je nul-stupac matrici A ;*
- (iv) *dodavanje skalarnog višekratnika nekog reda (odn. stupca) matrice A drugom redu (odn. stupcu) matrice A .*

6.3 Elementarni ideali

Dokaz. Pretpostavimo da matrice A i A_1 pripadaju, u odnosu na neke baze, preslikavanjima α i α_1 u sljedećim prezentacijama:

$$\begin{array}{ccccccc} F & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\phi} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \uparrow 1 & & \\ F_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & E_1 & \xrightarrow{\phi_1} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Slobodna baza modula E i surjektivnost preslikavanja ϕ_1 omogućuju konstrukciju preslikavanja $\beta: E \rightarrow E_1$ takvog da je $\phi_1\beta = \phi$ (za svaki e_i odaberemo neki $x_i \in E_1$ takav da je $\phi_1(x_i) = \phi(e_i)$ i definiramo $\beta: e_i \mapsto x_i$). Slično tome, F je slobodan modul i nizovi su pri E i E_1 egzaktni pa možemo definirati preslikavanje $\gamma: F \rightarrow F_1$ takvo da je $\beta\alpha = \alpha_1\gamma$ (definiramo $\gamma: f_j \mapsto y_j$ za bilo koji $y_j \in F_1$ takav da je $\alpha_1(y_j) = \beta\alpha(f_j)$). Sada vidimo da je dani dijagram komutativan. Ako su onda preslikavanja β i γ reprezentirana matricama B i C u odnosu na dane baze, vrijedi da je $BA = A_1C$. Na potpuno simetričan način možemo definirati preslikavanja β_1 i γ_1 , s matricama B_1 i C_1 takvima da je $B_1A_1 = AC_1$. Ako ekvivalenciju matrica po konačnom broju transformacija navedenih u iskazu teorema označimo s \sim , imamo:

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} A & B_1 \\ 0 & I \end{pmatrix} && \text{po (ii), (iii)} \\ &\sim \begin{pmatrix} A & B_1 & B_1A_1 \\ 0 & I & A_1 \end{pmatrix} && \text{po (iii), (iv)} \\ &\sim \begin{pmatrix} A & B_1 & 0 \\ 0 & I & A_1 \end{pmatrix} && \text{po (iv), jer } AC_1 = B_1A_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} A & B_1 & 0 & B_1B \\ 0 & I & A_1 & B \end{pmatrix} && \text{po (iii), (iv)}. \end{aligned}$$

Za svaki $e \in E$ vrijedi da je $\phi\beta_1\beta(e) = \phi(e)$ jer vrijede jednakosti $\phi_1\beta = \phi$ i $\phi\beta_1 = \phi$. Zatim vrijedi da je $\phi(\beta_1\beta - 1) = 0$ pa je, zbog egzaktnosti niza pri E , slika preslikavanja $\beta_1\beta - 1$ sadržana u slici preslikavanja α . Zato što je E slobodan modul, možemo definirati preslikavanje $\delta: E \rightarrow F$ takvo da je $\alpha\delta = \beta_1\beta - 1$ (jednostavno za svaki e_i odaberemo neki $y_i \in F$ takav da je $\alpha(y_i) = (\beta_1\beta - 1)(e_i)$ i definiramo $\delta: e_i \mapsto y_i$). Ako sada δ reprezentiramo matricom D , imamo $AD = B_1B - I$, tj. $B_1B = AD + I$. Zato vrijedi

$$\begin{pmatrix} A & B_1 & 0 & B_1B \\ 0 & I & A_1 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B_1 & 0 & I \\ 0 & I & A_1 & B \end{pmatrix} \quad \text{po (iv).}$$

6.3 Elementarni ideali

Potpuno simetričnim zaključivanjem možemo krenuti od matrice A_1 pa vidimo da vrijedi

$$A \sim \begin{pmatrix} A & B_1 & 0 & I \\ 0 & I & A_1 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 & B & 0 & I \\ 0 & I & A & B_1 \end{pmatrix} \sim A_1. \quad \square$$

Prezentacijska matrica nije invarijanta modulâ, ali bilo koja vrijednost koju možemo izvesti iz nje koja ostaje nepromijenjena ovim transformacijama, bit će invarijanta modulâ.

Definicija 6.1 *Neka je M modul nad komutativnim prstenom R (s jedinicom) koji posjeduje $m \times n$ prezentacijsku matricu A . Ideal prstena R koji je generiran svim $(m - r + 1) \times (m - r + 1)$ minorama matrice A zove se r -ti elementarni ideal \mathcal{E}_r modula M .*

Elementarni ideali modula dobro su definirani jer ne ovise o odabiru prezentacije modula. Razlog toga to je što svaka transformacija prezentacijske matrice ne mijenja ideal generiran skupom determinanti njenih minora. Iz Laplaceovog razvoja determinante odmah vidimo da je $\mathcal{E}_r \subseteq \mathcal{E}_{r+1}$. Za $r \leq 0$ ili $r \leq m - n$ minore su veće od matrice pa definiramo $\mathcal{E}_r = 0$, a za $r > m$ su premale i definiramo $\mathcal{E}_r = R$. Sada imamo rastući niz ideala u R :

$$\cdots \subseteq 0 \subseteq \mathcal{E}_k \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E}_{k+j} \subseteq R \subseteq \cdots$$

za neke prirodne brojeve k i j . Ako je $n = m$, matrica A je kvadratna matrica pa je prvi ideal \mathcal{E}_1 glavni ideal prstena R i generiran je vrijednošću $\det A$.

Primjer 6.1 Konačna abelova grupa G ima prirodnu strukturu \mathbb{Z} -modula i njen prvi ideal \mathcal{E}_1 je ideal prstena \mathbb{Z} generiran s $|G|$, redom grupe G .

Primjer 6.2 Prezentacija torzijskog dijela prve homološke grupe $H_1(X_2)$ dvoslojnog cikličkog prostora natkrivanja X_2 je $A + A^\tau$, gdje je A neka Seifertova matrica uzla. Prezentacijska matrica je

$$\begin{pmatrix} -A^\tau & A \\ A & -A^\tau \end{pmatrix} \sim A + A^\tau.$$

Apsolutna vrijednost $\det(A + A^\tau)$, tj. generator elementarnog ideala \mathcal{E}_1 , red je grupe $H_1(X_2)$ — ta invarijanta zove se *determinanta uzla*.

Primjer 6.3 Prezentacijska matrica torzijskog dijela prve homološke grupe $H_1(X_3)$ troslojnog cikličkog prostora natkrivanja X_3 je

$$\begin{pmatrix} A + A^\tau & A^\tau \\ A & A + A^\tau \end{pmatrix}.$$

6.4 Alexanderovi ideali i polinomi

Primjer 6.4 Uzevši neku Seifertovu matricu uzla, iz prezentacijske matrice je lako, kao što je već opisano, izraziti u X_k generatore prvih homoloških grupa prostorâ Y_1, \dots, Y_k pomoću generatora prve homološke grupe prostora Y_0 . Ovdje dajemo neke abelove invarijante trolista, mnogi drugi primjeri mogu se pronaći u [Rolfsen].

$$\begin{aligned}H_1(X_2) &= \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \\ \mathcal{E}_1 &= 3\mathbb{Z} \\ \mathcal{E}_2 &= \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_1(X_3) &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \\ \mathcal{E}_1 &= 4\mathbb{Z} \\ \mathcal{E}_2 &= 2\mathbb{Z} \\ \mathcal{E}_3 &= \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_1(X_\infty) &= \Lambda / (t^2 - t + 1) \\ \mathcal{E}_1 &= (t^2 - t + 1)\Lambda \\ \mathcal{E}_2 &= \Lambda\end{aligned}$$

6.4 Alexanderovi ideali i polinomi

Definicija 6.2 r -ti Alexanderov ideal *orijentiranog linka* L je r -ti elementarni ideal Λ -modula $H_1(X_\infty)$. r -ti Alexanderov polinom *linka* L je generator najmanjeg glavnog ideala koji sadrži r -ti Alexanderov ideal. Prvi Alexanderov polinom zove se Alexanderov polinom i označava se s $\Delta_L(t)$.

Generator glavnog ideala jedinstven je do na množenje invertibilnim elementom prstena Λ — zato je Alexanderov polinom, definiran na ovaj način, jedinstven do na množenje elementima oblika $\pm t^{\pm n}$. Modul $H_1(X_\infty)$ posjeduje kvadratnu prezentacijsku matricu pa je njegov prvi elementarni ideal \mathcal{E}_1 uvijek glavni ideal i Alexanderov polinom jednak je

$$\Delta_L(t) \doteq \det(tA - A^\tau),$$

gdje je A Seifertova matrica za link L i znak \doteq označava jednakost do na množenje invertibilnim elementom prstena Λ , tj. elementima oblika $\pm t^{\pm n}$.

6.4.1 Primjeri Alexanderovih polinoma uzlova

Primjer 6.5 Jedna od Seifertovih ploha trivijalnog uzla je disk D^2 . Kada prerežemo vanjštinu uzla po toj plohi, uklonili smo iz S^3 kuglu $D^2 \times [-1, 1]$;

6.4 Alexanderovi ideali i polinomi

zatvorenje onoga što ostane također je kugla homeomorfna kugli $D^2 \times [-1, 1]$. Prostor X_∞ nastao lijepljenjem prebrojivo mnogo takvih po $D^2 \times \{-1\}$ i $D^2 \times \{1\}$ homeomorfan je prostoru $D^2 \times \mathbb{R}$ — njegova prva homološka grupa zato je trivijalna. Trivijalni modul možemo prezentirati jediničnom matricom dimenzija 1×1 pa je Alexanderov polinom trivijalnog uzla jednak $\Delta_O \doteq 1$.

Primjer 6.6 Neka je K_n uzao kao na slici s ukupno $2n - 1$ prijelaza u donjem dijelu dijagrama. Broj $2n - 1$ bit će pozitivan ako je zakretanje u pozitivnom smjeru kao na slici, tj. ako su prijelazi u donjem dijelu dijagrama pozitivni, a bit će negativan ako je zakretanje u suprotnom smjeru, tj. prijelazi su negativni.



Slika 6.2: Zavrnuti uzao K_n

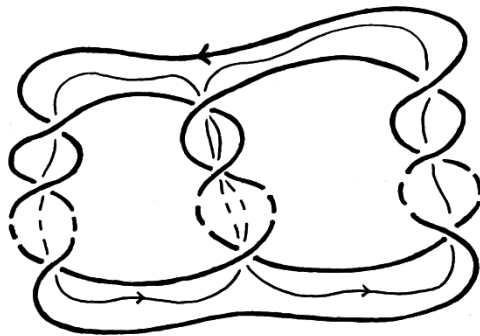
Lako je vidjeti Seifertova plohu F za taj uzao; generatori prve homološke grupe te plohe reprezentirani su dvjema krivuljama označenim na slici. Sjetimo se da je Seiferova matrica A dana s $A_{ij} = \text{lk}(f_i, f_j^+)$, gdje je f_j^+ krivulja f_j podignuta s plohe F u pozitivni dio okoline te plohe; za uzao K_n Seifertova matrica jednaka je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & n \end{pmatrix}$. Slijedi da je

$$tA - A^r = \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ -t & n(t-1) \end{pmatrix},$$

pa je Alexanderov polinom uzla K_n jednak $\Delta_{K_n} \doteq n(t^2 - 2t + 1) + t$. Zamijetimo da je K_0 trivijalni uzao; ova formula za K_0 daje polinom $\Delta_{K_0} \doteq t$ što se slaže s računom u prethodnom primjeru. Uzao K_1 je trolist 3_1 i Alexanderov polinom trolista je $t^2 - t + 1$. Slično tome, K_2 je uzao 5_2 i njegov Alexanderov polinom je $2t^2 - 3t + 2$.

Primjer 6.7 Neka su p , q i r neparni cijeli brojevi i neka je $P(p, q, r)$ uzao s p , q i r zakretanja redom kao na slici. Ovdje također pozitivnost tih brojeva znači da je zakretanje takvo da su prijelazi pozitivni, a negativnost negativni. Ovakav uzao zove se *perec* (engl. pretzel knot).

6.4 Alexanderovi ideali i polinomi



Slika 6.3: Perek $P(p,q,r)$

Lako je vidjeti na slici Seifertovu plohu i predstavnike generatorâ njene prve homološke grupe. Seifertova matrica ovog uzla jednaka je

$$A = \begin{pmatrix} p+q & q+1 \\ q-1 & q+r \end{pmatrix},$$

i zato je Alexanderov polinom uzla $P(p,q,r)$ jednak

$$\Delta_{P(p,q,r)} \doteq \det(tA - A^T) = \frac{1}{4}((pq + qr + rp)(t-1)^2 + t^2 + 2t + 1).$$

Ako su p , q i r brojevi takvi da je $pq + qr + rp = -1$, recimo za uzao $P(-3, 5, 7)$, tada je $\Delta_{P(p,q,r)} \doteq t$, što je Alexanderov polinom trivijalnog uzla. Uzao $P(-3, 5, 7)$ jest poznat kao uzao s jediničnim Alexanderovim polinomom. Drugim invarijantama, recimo Jonesovim polinomom, može se pokazati da nije trivijalan — Alexanderov polinom dakle ne može pokazati da neki uzao jest trivijalan, tj. ne razlikuje trivijalni uzao od svih ostalih uzlova.

Uzao $P(3, 3, -3)$, označen s 9_{46} u tablici uzlova, i uzao 6_1 , koji izgleda kao uzao na slici iz prethodnog primjera uz $n = 3$ i gornja dva prijelaza izmijenjena, posjeduju jednake Alexanderove polinome. Prvi elementarni ideal Alexanderovog modula oba uzla generiran je s $-2t^2 + 5t - 2$. No, po drugom elementarnom idealu se razlikuju. Drugi elementarni ideal za uzao 9_{46} generiran je s $(t-2)$ i $(2t-1)$; on nije cijeli prsten Λ jer evaluacija u $t = -1$ daje surjekciju $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ koja preslikava taj ideal u $3\mathbb{Z}$. Drugi elementarni ideal za uzao 6_1 jest cijeli prsten Λ . Postoje dakle netrivialni uzlovi jednakih Alexanderovih polinoma, i također je moguće da elementarni ideali razlikuju uzlove koje Alexanderov polinom ne razlikuje.

6.5 Svojstva Alexanderovog polinoma

Teorem 6.4 (i) Za svaki orijentirani link L vrijedi $\Delta_L(t) \doteq \Delta_L(t^{-1})$.

(ii) Za svaki (orijentirani) uzao K vrijedi $\Delta_L(1) = \pm 1$.

Obje tvrdnje analogno vrijede i za r -te Alexanderove polinome.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je A Seifertova matrica za link L dimenzija $n \times n$. Tvrdnja slijedi iz sljedećih jednakosti:

$$\Delta_L(t) \doteq \det(tA - A^\tau) = \det(tA^\tau - A) = (-t)^n \det(t^{-1}A - A^\tau) \doteq \Delta_L(t^{-1}).$$

(ii) Neka je A Seifertova matrica uzla K konstruirana obzirom na standardnu bazu od $2g$ orijentiranih krivulja $\{f_i\}$ na Seifertovoj plohi F roda g . Jednakost $\Delta_K(1) = \pm \det(A - A^\tau)$ i svojstvo Seifertove matrice A

$$(A - A^\tau)_{ij} = \text{lk}(f_i^-, f_j) - \text{lk}(f_i^+, f_j) = f_j \cdot f_i,$$

daju kao u propoziciji o svojstvima Seifertovih matrica da je $\Delta_K(1) = \pm 1$. Općenito, za link s više od jedne komponente $\Delta_K(1)$ jednak je 0. \square

Korolar 6.1 Alexanderov polinom, za svaki uzao K , dopušta oblik

$$\Delta_K(t) \doteq a_0 + a_1(t^{-1} + t) + a_2(t^{-2} + t) + \dots$$

gdje su a_i cijeli brojevi i a_0 je neparan broj.

Dokaz. Zapišimo Aleksanderov polinom uzla K bez negativnih potencija varijable t , $\Delta_K(t) \doteq b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n$, tako da su $b_0, b_n \neq 0$. Iz jednakosti $\Delta_K(t) \doteq \Delta_K(t^{-1})$ slijedi da je $b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n = \pm(b_n + b_{n-1}t + \dots + b_0t^n)$ pa je $b_k = \pm b_{n-k}$, s izborom predznaka jednakim za svaki k . Budući da je $\Delta_K(1) = \pm 1$, vrijedi da n nikako ne može biti neparan broj i zatim, iz parnosti broja n , slijedi da je $b_k = b_{n-k}$ za svaki k i da je $b_{n/2}$ neparan broj. Zato je moguće Alexanderov polinom zapisati u obliku navedenom u tvrdnji teorema. \square

Ovaj korolar također pokazuje da, unatoč neodređenosti Alexanderovog polinoma, on se ipak na jedinstven način može zapisati kao polinom s pozitivnim slobodnim članom što ne bi vrijedilo da koeficijenti ne posjeduju simetriju $b_k = b_{n-k}$. Iz istog razloga na jedinstven način ga možemo zapisati kao polinom sa svojstvom $\Delta_K(1) = 1$ i netrivialnim slobodnim članom. *Conwayeva normalizacija* je pak zapis Alexanderovog polinoma u obliku

$$\Delta_K(t) = a_0 + a_1(t^{-1} + t) + a_2(t^{-2} + t) + \dots, \text{ gdje je } \Delta_K(1) = 1.$$

6.5 Svojstva Alexanderovog polinoma

Propozicija 6.1 *Neka je L orijentirani link. Tada \bar{L} i rL , njemu zrcalni link i obrnuti link, imaju isti Alexanderov polinom kao L do na množenje invertibilnim elementom prstena Λ .*

Dokaz. Neka je F neka Seifertova ploha za L , i neka je A Seifertova matrica u odnosu na tu plohu. Promjenom orijentacije svih komponenti linka mijenja se orijentacija plohe F pa se zamjenjuju pozitivna i negativna strana plohe. Zbog toga, uz isti odabir jednostavno zatvorenih krivulja na F koje predstavljaju bazu za $H_1(F)$, Seifertova matrica A za link L mijenja se u matricu A^τ za link rL . Zrcaljenjem linka mijenjaju se predznaci spletnih brojeva pa je Seifertova matrica za \bar{L} jednaka $-A$. \square

Propozicija 6.2 *Neka su K i J orijentirani uzlovi, tada je*

$$\Delta_{(K+J)}(t) = \Delta_K(t)\Delta_J(t).$$

Dokaz. Ako su B i C Seifertove matrice orijentiranih uzlova J i K , matrica $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ je Seifertova matrica uzla $J + K$. \square

Raspon Laurentovog polinoma je razlika između najvećeg i najmanjeg eksponenta potencijâ uz koje su koeficijenti polinoma različiti od nule. Tako je naprimjer raspon polinoma čiji je slobodni koeficijent različit od nule jednak stupnju tog polinoma.

Propozicija 6.3 *Neka je K uzao i $g(K)$ njegov rod. Tada vrijedi*

$$2g(K) \geq \text{raspon } \Delta_K(t).$$

Dokaz. Neka je F Seifertova ploha minimalnog roda za uzao K . Tada je matrica $A - A^\tau$ dimenzija $2g \times 2g$ pa stupanj polinoma $\det(tA - A^\tau)$ nije veći od $2g$. \square

Prethodni rezultat može se smatrati jednom od primjena Alexanderovog polinoma. Moguće ga je proširiti na linkove s proizvoljnim brojem komponenti. Ako link L s n komponenti razapinje povezanu orijentabilnu plohu roda g , tada je

$$2g + n - 1 \geq \text{raspon } \Delta_L(t).$$

Za razliku od uzlova, postoje orijentirani linkovi s dvije ili više komponenti čiji je Alexanderov polinom nul-polinom.

Propozicija 6.4 *Ako orijentirani link L razapinje nepovezanu orijentiranu plohu u prostoru S^3 , njegov Alexanderov polinom je nul-polinom, tj. $\Delta_L = 0$.*

6.5 Svojstva Alexanderovog polinoma

Dokaz. Pretpostavimo da je F' nepovezana orijentirana ploha razapeta orijentiranim linkom L i da su f_i predstavnici generatora prve homološke grupe plohe F' . Da bismo povezali dvije komponente plohe F' , a rub plohe ostavili netaknutim, dovoljno je izrezati dva mala diska, svaki u jednoj komponenti plohe, i spojiti rubove koji su nastali uskim cilindrom, tj. cijevi $S^1 \times I$. Diskove možemo odabrati tako da ne sijeku krivulje f_i . Zamijetimo da generatore prve homološke grupe nastale plohe možemo predstaviti krivuljama $\{f_i\} \cup \{f\}$, gdje je f jednostavno zatvorena krivulja koja obilazi oko cijevi točno jedanput i ne siječe predstavnike ostalih klasa.

Krivulja f je meridijan — ona razapinje disk D u prostoru S^3 takav da je $\partial D = D \cap F$ — zato je $\text{lk}(f, f^+) = 0$ i $\text{lk}(f, f_i^\pm) = 0$ za svaku krivulju f_i . Povežimo tako komponente plohe F' i povezanu plohu koja nastane time označimo s F — ona je Seifertova ploha linka L . Matrica te Seifertove plohe posjeduje neki stupac i red, jednakog indeksa, čiji su elementi nule pa je determinanta matrice $tA - A^T$ nužno također jednaka nuli.

Bibliografija

- [Alexander] J. W. Alexander, *Topological Invariants of Knots and Links*, Transactions of American Mathematical Society, Vol. 30, 1928., 275-306.
- [Burde-Zieschang] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2003.
- [Crowel-Fox] R. H. Crowel, R. H. Fox. *Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 57, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1977.
- [Gordon-Luecke] C. M. Gordon, J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, *Journal of American Mathematical Society*, Vol. 2, 1989., 371-415.
- [Hatcher] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [Hempel] J. Hempel, *3-manifolds*, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- [Kawauchi] A. Kawauchi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1996.
- [Lickorish] W. B. R. Lickorish, *Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 175, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [Moise] E. E. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1918.
- [Nash] C. Nash, *Topology and Physics—a historical essay, History of Topology*, edited by I. M. James, Elsevier, Amsterdam, 1999.

- [Neuwirth] L. P. Neuwirth, *Knot Groups*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1965.
- [Reidemeister] K. Reidemeister, *Knotentheorie*, Springer-Verlag, New York, 1948.
- [Rolfsen] D. Rolfsen, *Knots and Links*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.
- [Rourke-Sanderson] C. P. Rourke, B. J. Sanderson, *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1972.