Nelinearni dinamički sustavi

1 Osnovne definicije

Diskretni dinamički sustav (X, f) sastoji se od nepraznog skupa X i preslikavanja $f : X \to X$. Skup X još se zove i *fazni prostor*, a preslikavanje f *fazno preslikavanje*. Teorija diskretnih dinamičkih sustava bavi se proučavanjem dugoročnog ponašanja točaka skupa X pod djelovanjem iteracija danog preslikavanja f. *Iteracije* od f definirane su induktivno: $f^0 = \mathrm{Id}$ (identiteta na X, $\mathrm{Id}(x) = x$ za svaki $x \in X$) te za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. Ako je f invertibilna, tada je definirano i $f^{-n} = (f^{-1})^n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Budući da vrijedi $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, iteracije čine grupu ako je f invertibilna, odnosno polugrupu ako nije (preciznije, ako f nije invertibilna, iteracije čine monoid s jedinicom $f^0 = \mathrm{Id}$).

Neprekidni dinamički sustav sastoje se od skupa X i jednoparametarske familije preslikavanja $\{f^t : X \to X\}$, $t \in \mathbb{R}$, ili $t \in \mathbb{R}^+$, koja čine jednoparametarsku grupu, ili polugrupu, tj. vrijedi $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ i $f^0 = \mathrm{Id}$. Dinamički sustav se zove *tok* ako je $t \in \mathbb{R}$, odnosno *polutok* ako je $t \in \mathbb{R}^+$. Za tok je preslikavanje f^t invertibilno, jer je $f^{-t} = (f^t)^{-1}$. Primijetimo da za fiksni t_0. iteracije $(f^{t_0})^n = f^{t_0 n}$ čine diskretni dinamički sustav.

U proučavanju dinamičkih sustava uobičajeno je da je skup X opskrbljen nekom strukturom koja se čuva preslikavanjem f. Na primijer, X može biti prostor s mjerom, a f preslikavanje koje čuva mjeru; ili X može biti glatka mnogostrukost, a f diferencijabilno preslikavanje. Budući da ćemo se ovdje pretežno baviti diskretnim topološkim dinamičkim sustavima, nama će X biti topološki Hausdorffov prostor, a f neprekidno preslikavanje.

Definicija 1.1. Za $x \in X$, *orbita naprijed* (ili *pozitivna orbita*) od x je skup

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ako je f invertibilna, *orbita nazad* (ili *negativna orbita*) od x je skup

$$\mathcal{O}_f^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}_0\},$$

a (*puna*) *orbita* od x je skup

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

(Kada god je iz konteksta jasno o kojem se preslikavanju radi, ispuštat ćemo indeks f i pisati samo npr. $\mathcal{O}(x)$.)

Točka x često se naziva i *početno stanje*, a točka $f^n(x)$, za $n \in \mathbb{N}$, *buduće stanje* (orbite). Na orbitu se može gledati i kao na niz pa ima smisla razmatrati npr. podniz orbite ili gomilišta orbite.

Definicija 1.2. Točka $x \in X$ zove se

1. *fiksna točka* (ili *invarijantna točka*, ili *ekvilibrij*) od f ako je $f(x) = x$. Skup svih fiksnih točaka funkcije f označavat ćemo $\operatorname{Fix} f$.

2. *periodična točka* od f perioda $p \in \mathbb{N}$ ako je $f^p(x) = x$. Primijetimo da ako je p period od x, onda je i kp period od x za svaki $k \in \mathbb{N}$. Najmanji period za x zovemo *osnovni period*. Skup svih periodičnih točaka (ne nužno osnovnog) perioda p funkcije f označavat ćemo $\operatorname{Per}_p f$, a skup svih periodičnih točaka od f sa $\operatorname{Per} f$. Primijetimo da je $\operatorname{Per} f = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{Per}_p f$.

3. *predperiodična točka* (ili *završno periodična* točka) od f ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f^m(x)$ periodična točka od f.

Za podskup $A \subset X$ i $n \in \mathbb{N}$, $f^n(A)$ je slika od A za f^n, a $f^{-n}(A)$ je praslika od A za f^n, tj. $f^{-n}(A) = (f^n)^{-1}(A) = \{x \in X : f^n(x) \in A\}$. Primijetimo da $A \subseteq f^{-n}(f^n(A))$, ali za neinvertibilan dinamički sustav općenito A i $f^{-n}(f^n(A))$ ne moraju biti jednaki.

Podskup $A \subset X$ je *f-invarijantan* ako je $f^n(A) \subseteq A$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. A je *naprijed* ili *pozitivno f-invarijantan* ako je $f(A) \subseteq A$. Tada je i $f^n(A) \subseteq A$ za $n \in \mathbb{N}_0$. A je *nazad* ili *negativno f-invarijantan* ako je $f^{-1}(A) \subseteq A$. Tada je i $f^{-n}(A) \subseteq A$ za $n \in \mathbb{N}_0$. Orbite točaka su invarijantni skupovi.

Preslikavanja mogu imati jako puno fiksnih ili periodičnih točaka. Na primijer, za $f = \mathrm{Id}$, svaka točka je fiksna točka. Za $X = \mathbb{R}$ i $f(x) = -x$, jedina fiksna točka je $x = 0$, no svaka druga točka je periodična točka osnovnog perioda dva. To su netipični dinamički sustavi. Sustavi kojima ćemo se mi baviti neće imati intervale fiksnih ili intervale periodičnih točaka.

Primjer 1.3. Rotacija kružnice (ili translacija kružnice).

Razmotrimo jediničnu kružnicu $S^1 = [0,1]/_{\sim}$, gdje $\sim$ označava da su 0 i 1 identificirani. Zbrajanje $\bmod 1$ čini S^1 abelovom grupom. Prirodna udaljenost na $[0,1]$ inducira udaljenost na S^1,

$$d(x,y) = \min\{|x-y|, 1-|x-y|\}. \tag{1}$$

Jediničnu kružnicu također možemo opisati kao skup $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ pri čemu je množenje kompleksnih brojeva operacija grupe. Ta dva prikaza su povezana formulom $z = e^{2\pi i x}$ koja je izometrija ako podijelimo duljinu luka na multiplikativnoj kružnici sa 2π.

Za nas je S^1 topološki prostor s relativnom topologijom kompleksne ravnine. Budući da je S^1 omeđen zatvoren podskup kompleksne ravnine, S^1 je kompaktan metrički prostor. Međutim, nećemo koristiti metriku koju S^1 nasljeđuje od $\mathbb{C}$ (Euklidsku metriku), praktičnije je koristiti metriku danu u (1).

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ označimo sa R_α rotaciju od S^1 za kut $2\pi\alpha$, tj.

$$R_\alpha x = x + \alpha \bmod 1.$$

(To se može shvatiti i kao translacija za α.) Familija $\{R_\alpha : \alpha \in [0,1)\}$ je komutativna grupa s kompozicijom kao operacijom grupe, $R_\alpha \circ R_\beta = R_\gamma$, gdje je $\gamma = \alpha + \beta \bmod 1$. Primijetimo da je R_α izometrija, tj. čuva udaljenost d.

Preslikavanje R_α se ponaša vrlo različito u ovisnosti da li je α racionalan ili iracionalan broj. Ako je $\alpha = \frac{p}{q}$ racionalan broj, pri čemu su $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ relativno prosti, tada je $R_\alpha^q = \mathrm{Id}$ i svaka orbita je periodična s osnovnim periodom q.

Ako je α iracionalan broj, svaka orbita naprijed je gust podskup u S^1. Taj rezultat ze zove Jacobijev teorem. Da bismo to dokazali, pretpostavimo da je $x \in S^1$ proizvoljan. Pokažimo prvo da su sve točke orbite naprijed od x različite. Pretpostavimo da je $R_\alpha^n x = R_\alpha^m x$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$. Tada je $x + n\alpha \bmod 1 = x + m\alpha \bmod 1$, tj. $(n-m)\alpha \in \mathbb{Z}$, što daje $n = m$. Dakle $\mathcal{O}^+(x)$ je beskonačan podskup od S^1. Budući da je S^1 kompaktan, niz $\mathcal{O}^+(x)$ ima gomilište u S^1. Zato za svaki $\varepsilon > 0$ postoje m, n takvi da je $m < n$ i $d(R_\alpha^m x, R_\alpha^n x) < \varepsilon$. Dakle, R_α^{n-m} je rotacija za kut $< \varepsilon$ pa je svaka orbita naprijed ε-gusta u S^1, tj. udaljenost od bilo koje točke u S^1 do $\mathcal{O}^+(x)$ je $< \varepsilon$. Jer je ε proizvoljan, dokaz slijedi, tj. svaka orbita naprijed je gust podskup u S^1.

2 Hiperboličnost

Neka je X Hausdorffov topološki prostor i $f : X \to X$ preslikavanje. Neka je $x \in X$ periodična točka od f perioda p. Točka $y \in X$ je *naprijed* ili *pozitivno asimptotična* s x ako je $\lim_{i\to\infty} f^{ip}(y) = x$. *Stabilni skup* od x, u oznaci $W^s(x)$, sastoji se od svih točaka naprijed asimptotičnih s x. Ako je f invertibilna, točka $y \in X$ je *nazad* ili *negativno asimptotična* s x ako je $\lim_{i\to\infty} f^{-ip}(y) = x$. Skup svih točaka negativno asimptotičnih s x zove se *nestabilni skup* od x i označava $W^u(x)$.

Ako je X metrički prostor s metrikom d, a $x \in X$ nije periodična točka, svejedno možemo definirati njoj *naprijed asimptotičnu* točku y zahtijevajući da $d(f^i(x), f^i(y)) \to 0$ kada $i \to \infty$ te analogno, ako je f invertibilna, *nazad* *asimptotičnu* točku.

U nastavku ovog poglavlja, neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija (reda n, pri čemu je n koliko god nam treba).

Definicija 2.1. Neka je x periodična točka osnovnog perioda p. Točka x je *hiperbolična* ako je $|(f^p)'(x)| \neq 1$. Broj $(f^p)'(x)$ se zove *multiplikator* periodične točke x.

Propozicija 2.2. *Neka je f klase C^1. Neka je x hiperbolična fiksna točka i $|f'(x)| < 1$. Tada postoji otvorena okolina U od x takva da za svaki $y \in U$ vrijedi $\lim_{i\to\infty} f^i(y) = x$.*

Dokaz. Budući da je f klase C^1, postoji $\varepsilon > 0$ i $a \in (0,1)$ takvi da je $|f'(y)| < a < 1$ za svaki $y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Po teoremu srednje vrijednosti vrijedi $|f(y) - x| = |f(y) - f(x)| \leqslant a|y-x| < |y-x| \leqslant \varepsilon$. Dakle $f(y) \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ i štoviše, $f(y)$ je bliže točki x nego y. Na isti način dobivamo $|f^i(y) - x| \leqslant a^i|y-x|$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ i zato $\lim_{i\to\infty} f^i(y) = x$. □

Primijetimo da analogan rezultat vrijedi za hiperboličnu periodičnu točku x osnovnog perioda p. U tom slučaju postoji otvorena okolina U od x za koju je $f^p(U) \subset U$ i uvjet u tom slučaju je, naravno, $|(f^p)'(x)| < 1$. Takva okolina se zove *lokalni stabilni skup* i označava W^s_{loc}.

Definicija 2.3. Neka je x hiperbolična periodična točka osnovnog perioda p. Ako je $|(f^p)'(x)| < 1$, točka x se zove *privlačna* periodična točka, ili *atraktor*, ili *ponor*.

Možemo razlikovati tri tipa privlačnih fiksnih točaka: $f'(x) = 0$, $0 < f'(x) < 1$ i $-1 < f'(x) < 0$.

Propozicija 2.4. *Neka je f klase C^1. Neka je x hiperbolična fiksna točka i $|f'(x)| > 1$. Tada postoji otvorena okolina U od x takva da za svaki $y \in U$, $y \neq x$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $f^k(y) \notin U$.*

Dokaz. Budući da je f klase C^1, postoji $\varepsilon > 0$ i $a > 1$ takvi da je $|f'(y)| > a > 1$ za svaki $y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Po teoremu srednje vrijednosti vrijedi $|f(y) - x| = |f(y) - f(x)| \geqslant a|y-x| > |y-x|$. Dakle $f(y)$ je dalje od točke x nego y. Na isti način, do kada god je $f^i(y) \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, dobivamo $|f^{i+1}(y) - x| \geqslant a^i |f^i(y) - x|$. Jer je $a > 1$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $f^k(y) \notin [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. □

Analogan rezultat vrijedi za hiperboličnu periodičnu točku x osnovnog perioda p i uvjet u tom slučaju je, naravno, $|(f^p)'(x)| > 1$. Takva okolina se zove *lokalni nestabilni skup* i označava W^u_{loc}.

Definicija 2.5. Neka je x hiperbolična periodična točka osnovnog perioda p. Ako je $|(f^p)'(x)| > 1$, točka x se zove *odbojna* periodična točka, ili *izvor*.

Možemo razlikovati dva tipa odbojnih fiksnih točaka: $f'(x) > 1$ i $f'(x) < -1$.

Primjer 2.6. Kvadratna familija.

Razmotrimo familiju funkcija $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danu formulom

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x),$$

pri čemu je $\mu > 0$ parametar. Tu familiju zovemo kvadratna familija. Nabrojimo neka jednostavna svojstva kvadratne familije.

(1) F_μ ima dvije fiksne točke, 0 i $x_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu} < 1$. Također, $F_\mu(1) = 0$ i $F_\mu(1/2) = \mu/4$ je maksimum.

(2) $F'_\mu(0) = \mu$ i $F'_\mu(x_\mu) = 2 - \mu$.

(3) Za $0 < \mu < 1$ vrijedi $x_\mu < 0$, 0 je privlačna fiksna točka, a x_μ je odbojna fiksna točka.

(4) Za $1 < \mu < 3$ vrijedi $0 < x_\mu$, 0 je odbojna fiksna točka, a x_μ je privlačna fiksna točka.

(5) Za $\mu > 3$ i dalje vrijedi $0 < x_\mu$, ali su sada i 0 i x_μ odbojne fiksne točke.

(6) Neka je $\mu > 1$. Tada za svaki $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ vrijedi $F_\mu^n(x) \to -\infty$ kada $n \to \infty$.

Dokaz. Ako je $x < 0$ vrijedi $F_\mu(x) = \mu x(1-x) < x$ pa je $(F_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ padajući niz točaka. Taj niz ne može konvergirati nekoj točki y, jer bi u tom slučaju vrijedilo $y = \lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = \lim_{n\to\infty} F_\mu^{n+1}(x) = F_\mu(y)$, što je u kontradikciji s činjenicom da su fiksne točke nenegativne. Dakle, $F_\mu^n(x) \to -\infty$ kako smo i tvrdili. Ako je $x > 1$, vrijedi $F_\mu(x) < 0$ pa dokaz slijedi kao u prethodnom slučaju. □

(7) Neka je $1 < \mu < 3$. Tada za svaki $x \in (0, 1)$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = x_\mu$.

Dokaz. Neka je $1 < \mu < 2$. Tada je $F_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} < \frac{1}{2}$ i $x_\mu = \frac{\mu-1}{\mu} < \frac{1}{2}$. Ako je $x \in (0, 1/2]$, $x \neq x_\mu$, tada je $|F_\mu(x) - x_\mu| < |x - x_\mu|$, tj. $(F_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ je rastući niz točaka za $x \in (0, x_\mu)$, odnosno padajući niz točaka za $x \in (x_\mu, 1/2]$. Dokaz slijedi analogno dokazu tvrdnje (6). Ako je $x \in (1/2, 1)$, tada je $F_\mu(x) < 1/2$ pa dokaz slijedi kao u prethodnom slučaju, tj. $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = \lim_{n\to\infty} F_\mu^{n-1}(F_\mu(x)) = x_\mu$.

Neka je $2 < \mu < 3$. Tada je $F_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} > \frac{1}{2}$ i $x_\mu = \frac{\mu-1}{\mu} > \frac{1}{2}$. Označimo sa $\widehat{x}_\mu \in (0, 1/2)$ jedinstvenu točku sa svojstvom $F_\mu(\widehat{x}_\mu) = x_\mu$. Lakim računom se provjeri da je $F_\mu^2(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$ pa je $F_\mu^2([\widehat{x}_\mu, x_\mu]) \subset [1/2, x_\mu]$. Također, za $x \in [1/2, x_\mu)$ niz $(F_\mu^{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ je rastući, a $(F_\mu^{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ je padajuí niz točaka. Zato, za svaki $x \in [\widehat{x}_\mu, x_\mu]$ dokaz slijedi analogno dokazu tvrdnje (6).

Pretpostavimo da je $x \in (0, \widehat{x}_\mu)$. Lako se vidi da je tada $F_\mu(x) > x$ pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $F_\mu^k(x) \in [\widehat{x}_\mu, x_\mu]$ te dobivamo $\lim_{n\to\infty} F_\mu^{k+n}(x) = x_\mu$. Ako je $x \in (x_\mu, 1)$, vrijedi $F_\mu(x) \in (0, \widehat{x}_\mu)$ pa dokaz slijedi.

Slučaj $\mu = 2$ ostavljamo kao jednostavan zadatak. □

(8) Neka je $\mu > 4$. Tada je maksimum $F_\mu(1/2) = \mu/4 > 1$ pa postoje točke segmenta $I := [0,1]$ čije prve iteracije više ne leže u I. Označimo skup svih takvih točaka s A_0,

$$A_0 = \{x \in I : F_\mu(x) \notin I\}.$$

Jer za svaki $x \in A_0$ vrijedi $F_\mu(x) > 1$, imamo $F_\mu^2(x) < 0$ i zato $F_\mu^n(x) \to -\infty$ kada $n \to \infty$. Sve točke iz $I \setminus A_0$ ostaju u I nakon prve iteracije F_μ.

Jasno je da je A_0 interval s centrom $1/2$ te da je $I \setminus A_0$ unija dva disjunktna segmenta. Označimo s I_0 onaj lijevo od A_0 i s I_1 onaj desno od A_0. Primijetimo da F_μ preslikava oba, I_0 i I_1, monotono na I i to F_μ je rastuća na I_0 i padajuća na I_1. Jer je $F_\mu(I_0) = F_\mu(I_1) = I$, postoji par intervala, jedan u I_0, a drugi u I_1, koje F_μ preslikava na A_0. Označimo taj skup s A_1,

$$A_1 = \{x \in I : F_\mu(x) \in A_0\}.$$

Za svaki $x \in A_1$ vrijedi $F_\mu^2(x) > 1$, $F_\mu^3(x) < 0$ i zato $F_\mu^n(x) \to -\infty$ kada $n \to \infty$.

Razmotrimo skup $I \setminus (A_0 \cup A_1)$. To je unija 4 disjunktna segmenta, F_μ preslikava svaki od njih monotono ili na I_0 ili na I_1 pa F_μ^2 preslikava svaki od njih na I. Štoviše, F_μ^2 je alternirajuće rastuća i padajuća na ta 4 segmenta te F_μ^2 ima 2 maksimuma. Zato svaki od tih 4 segmenta od $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ sadrži podinterval kojeg F_μ^2 preslikava na A_0. Taj skup zovemo A_2.

Proces nastavljamo induktivno. Neka je

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in I : F_\mu^n(x) \in A_0\} \\ &= \{x \in I : F_\mu^i(x) \in I,\ i \leqslant n \ \&\ F_\mu^{n+1}(x) \notin I\}. \end{aligned}$$

Dakle, A_n je skup svih onih točaka od I koji napuštaju I u točno $n+1$.-oj iteraciji. A_n je unija 2^n disjunktnih intervala i za svaki $x \in A_n$ vrijedi

$F_\mu^n(x) \to -\infty$ kada $n \to \infty$ te nam ostaje analizirati ponašanje onih točaka koje nikada ne napuste I, tj skup

$$\Lambda := I \setminus (\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n).$$

Jer je A_n unija 2^n disjunktnih intervala (i $\Sigma_{n=0}^{n} 2^n = 2^{n+1} - 1$), skup $I \setminus (\bigcup_{i=0}^{n} A_i)$ je unija 2^{n+1} disjunktnih segmenata. F_μ^{n+1} preslikava svaki od tih segmenata monotono na I, alternirajuće raste i pada na tim segmentima i F_μ^{n+1} ima točno 2^n maksimuma na I.

Konstrukcija skupa Λ podsjeća na konstrukciju Cantorovog skupa. Podsjetimo se, podskup segmenta zovemo Cantorov skup ako je zatvoren, potpuno nepovezan i perfektan.

Propozicija 2.7. *Ako je $\mu > 2 + \sqrt{5}$, Λ je Cantorov skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Tada je $|F'(x)| > 1$ za svaki $x \in I_0 \cup I_1$ pa postoji $\lambda > 1$ takav da je $|F'(x)| > \lambda$ za svaki $x \in \Lambda$. Po pravilu ulančavanja također vrijedi $|(F^n)'(x)| > \lambda^n$.

Prvo ćemo dokazati da Λ ne sadrži interval. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$, takvi da $[x, y] \subset \Lambda$ i za svaki $z \in [x, y]$ vrijedi $|(F^n)'(z)| > \lambda^n$. Izaberimo n takav da je $\lambda^n |y - x| > 1$. Po teoremu srednje vrijednosti slijedi da $|F^n(y) - F^n(x)| \geqslant \lambda^n |y - x| > 1$ pa barem jedan od $F^n(y)$ ili $F^n(x)$ leži izvan I. No to je u suprotnosti s $x, y \in \Lambda$ pa je Λ potpuno nepovezan.

Dokažimo sada da je Λ perfektan. Primijetimo prvo da su krajnje točke od svih A_k u Λ, jer se one završno preslikaju u fiksnu točku 0 pa pod iteracijama ostaju u I. Pretpostavimo da postoji izolirana točka $x \in \Lambda$. Tada postoji okolina od x takva da sve točke te okoline pod iteracijama napuste I. Zato svaka od tih točaka pripada nekom A_k i to ili postoji niz takvih točaka koje su krajnje točke A_k-ova koje konvergiraju prema x, ili se sve točke te okoline od x preslikaju izvan I istom iteracijom od F. Prvi slučaj nije moguć, jer su krajnje točke A_k-ova sadržane u Λ pa x nije izolirana. U drugom slučaju možemo pretpostaviti da F^n preslikava x u 0, a sve točke iz okoline od x u negativnu realnu os. No tada F^n ima maksimum u x i vrijedi $(F^n)'(x) = 0$. Po pravilu ulančavanja vrijedi $F'(F^i(x)) = 0$ za neki $i < n$ pa je $F^i(x) = 1/2$. Iz toga slijedi $F^{i+1}(x) \notin I$ i zato $F^j(x) \to -\infty$, što je u suprotnosti sa $F^n(x) = 0$.

Budući da je Λ presjek padajućeg niza segmenata, Λ je zatvoren. $\square$

Napomena 2.8. Propozicija ustvari vrijedi za sve $\mu > 4$, ali je dokaz tehnički zahtijevniji.

Definicija 2.9. Skup $\Gamma \subset \mathbb{R}$ zove se *odbojni* (odnosno *privlačni*) hiperbolični skup za funkciju f, ako je Γ zatvoren, omeđen, invarijantan za f i ako postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $|(f^n)'(x)| > 1$ (odnosno $|(f^n)'(x)| < 1$) za sve $n \geqslant N$ i $x \in \Gamma$.

Cantorov skup Λ za kvadratnu funkciju F_μ za $\mu > 2 + \sqrt{5}$ je odbojni hiperbolični skup sa $N = 1$.

3 Simbolička dinamika

Definicija 3.1. Skup $\Sigma_2 := \{\overrightarrow{s} = s_0 s_1 \ldots s_n \ldots : s_n \in \{0, 1\}\}$ zove se *prostor nizova dva simbola.*

Za dva niza $\overrightarrow{s} = s_0 s_1 \ldots s_n \ldots$ i $\overrightarrow{t} = t_0 t_1 \ldots t_n \ldots$ definiramo udaljenost među njima formulom

$$d(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Budući da je $|s_i - t_i|$ ili 0 ili 1, red je dominiran geometrijskim redom $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$ pa je konvergentan.

Lema 3.2. *d je metrika na Σ_2.*

Dokaz. Vrijedi $d(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t}) \geqslant 0$ za svaki $\overrightarrow{s},\overrightarrow{t} \in \Sigma_2$ i $d(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t}) = 0$ ako i samo ako $s_i = t_i$ za sve $i \in \mathbb{N}_0$. Budući da je $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ vrijedi $d(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t}) = d(\overrightarrow{t},\overrightarrow{s})$. Na kraju, za sve $\overrightarrow{r},\overrightarrow{s},\overrightarrow{t} \in \Sigma_2$ vrijedi $|r_i - t_i| \leqslant |r_i - s_i| + |s_i - t_i|$ što povlači $d(\overrightarrow{r},\overrightarrow{t}) \leqslant d(\overrightarrow{r},\overrightarrow{s}) + d(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t})$. $\square$

Lema 3.3. *Neka su $\overrightarrow{s},\overrightarrow{t} \in \Sigma_2$. Ako je $s_i = t_i$ za $i = 0, 1, \ldots, n$, tada je $d(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t}) \leqslant 1/2^n$. Obratno, ako je $d(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t}) < 1/2^n$, tada je $s_i = t_i$ za $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $s_i = t_i$ za $i = 0, 1, \ldots, n$. Tada je

$$d(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

S druge strane, ako je $s_j \neq t_j$ za neki $j \leqslant n$, tada je $d(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t}) \geqslant \frac{1}{2^j} \geqslant \frac{1}{2^n}$. Zato, ako je $d(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t}) < \frac{1}{2^n}$, onda je $s_i = t_i$ za sve $i \leqslant n$. $\square$

Definicija 3.4. Preslikavanje $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ definirano sa $\sigma(s_0 s_1 \ldots s_n \ldots) = s_1 \ldots s_n \ldots$ zove se *pomak*.

Lema 3.5. *Pomak $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ je neprekidno preslikavanje.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ i $\overrightarrow{s} = s_0 s_1 \ldots s_i \ldots$. Neka je n takav da je $1/2^n < \varepsilon$. Neka je $\delta = 1/2^{n+1}$. Neka je $\overrightarrow{t} = t_0 t_1 \ldots t_i \ldots$ takav da je $d(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t}) < \delta$. Tada po lemi 3.3 imamo $s_i = t_i$ za $i \leqslant n + 1$ pa je $(\sigma(\overrightarrow{s}))_i = (\sigma(\overrightarrow{t}))_i$ za $i \leqslant n$, gdje je $(\sigma(\overrightarrow{s}))_i$ i-ta koordinata niza $\sigma(\overrightarrow{s}) = \overrightarrow{r} = r_0 r_1 \ldots r_i \ldots$. Ponovno po lemi 3.3 vrijedi $d(\sigma(\overrightarrow{s}), \sigma(\overrightarrow{t})) \leqslant 1/2^n < \varepsilon$ pa je σ neprekidno preslikavanje u $\overrightarrow{s}$. Kako je $\overrightarrow{s}$ bila proizvoljna, σ je neprekidno na Σ_2. $\square$

Dinamiku pomaka σ razumijemo u potpunosti. Na primjer, periodične točke su periodični nizovi, tj. nizovi oblika

$$\overrightarrow{s} = (s_0 s_1 \ldots s_{n-1})^{\infty} = s_0 s_1 \ldots s_{n-1}\, s_0 s_1 \ldots s_{n-1} \ \ldots .$$

Preslikavanje σ ima 2^n periodičnih točaka perioda n i svaka je generirana jednim od 2^n konačnih nizova duljine n. Konačan niz nula i jedinica zvati ćemo *riječ*. Riječ ima duljinu n ako se sastoji od n simbola.

Propozicija 3.6. *Skup svih periodičnih točaka za σ, $\mathrm{Per}(\sigma)$, je gust podskup od Σ_2.*

Dokaz. Pokazat ćemo da za svaku točku $\overrightarrow{s} = s_0 s_1 \dots s_n \dots \in \Sigma_2$ postoji niz periodičnih točaka $(\overrightarrow{t^n})_{n \in \mathbb{N}}$ koje konvergiraju prema $\overrightarrow{s}$. Neka je $\overrightarrow{t^n} = (s_0 s_1 \dots s_n)^\infty$. Očigledno je $\overrightarrow{t^n}$ periodična, po lemi 3.3 $d(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t^n}) \leqslant 1/2^n$ pa $(\overrightarrow{t^n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira prema $\overrightarrow{s}$. □

Predperiodične točke također je lako karakterizirati, svaki niz oblika

$$\overrightarrow{s} = s_0 s_1 \dots s_{n-1} (s_n s_{n+1} \dots s_{n+m-1})^\infty$$

je predperiodična točka za σ.

Propozicija 3.7. *Postoji točka u Σ_2 čija σ orbita je gust podskup od Σ_2.*

Dokaz. Konstruirat ćemo jednu takvu točku čija orbita je proizvoljno blizu svakoj točki u Σ_2. Neka je

$$\overrightarrow{s}^* = \underbrace{0\,1}\ \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{riječi duljine 2}}\ \underbrace{000\ 001\ 010\ \dots}_{\text{riječi duljine 3}}\ \dots\ \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{sve riječi duljine } n}\ \dots\ .$$

Dakle, niz $\overrightarrow{s}^*$ sadrži sve riječi duljine n sa svaki $n \in \mathbb{N}$. Zato za svaki niz $\overrightarrow{t} \in \Sigma_2$ i $m \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da se $\sigma^k(\overrightarrow{s}^*)$ podudara sa $\overrightarrow{t}$ u prvih m simbola. □

Preslikavanja koja imaju gustu orbitu zovemo *topološki tranzitivna*.

4 Topološka konjugacija

Definicija 4.1. Neka su $f : X \to X$ i $g : Y \to Y$ dva preslikavanja. Za f i g kažemo da su *topološki konjugirana* ako postoji homeomorfizam $h : X \to Y$ takav da je $h \circ f = g \circ h$. Homeomorfizam h zovemo *topološka konjugacija*.

Preslikavanja koja su topološki konjugirana su ekvivalentna u smislu njihove dinamike. Na primijer, ako su f i g konjugirane preko h i ako je x fiksna točka za f, tada je $h(x)$ fiksna točka za g, jer je $h(x) = h(f(x)) = g(h(x))$. Također, h preslikava skup periodičnih točaka perioda n za f injektivno na skup periodičnih točaka perioda n za g. Lako se vidi da h također preslikava predperiodične točke (odnosno asimptotične orbite) od f injektivno na predperiodične točke (odnosno asimptotične orbite) od g. Štoviše, f je topološki tranzitivno ako i samo ako je i g.

Nastavljamo proučavati kvadratnu familiju $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ za $\mu > 2+\sqrt{5}$. Želimo pokazati da su $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ i $F_\mu : \Lambda \to \Lambda$ konjugirani za $\mu > 2+\sqrt{5}$. Podsjetimo se da je $\Lambda \subset I_0 \cup I_1$ i $I_0 \cap I_1 = \emptyset$.

Definicija 4.2. Neka je $x \in \Lambda$. *Itinerer* točke x je niz $S(x) = s_0 s_1 \ldots s_n \ldots$, gdje je $s_n = 0$ ako je $F_\mu^n(x) \in I_0$ i $s_n = 1$ ako je $F_\mu^n(x) \in I_1$.

Očigledno je S preslikavanje sa Λ u Σ_2. Pokazat ćemo da je S željena konjugacija.

Teorem 4.3. *Za $\mu > 2+\sqrt{5}$ preslikavanje $S : \Lambda \to \Sigma_2$ je homeomorfizam.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je S injekcija. Neka su $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$ i pretpostavimo da je $S(x) = S(y)$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $F_\mu^n(x)$ i $F_\mu^n(y)$ leže na istoj strani od $1/2$. To znači da je F_μ monotona na intervalu između $F_\mu^n(x)$ i $F_\mu^n(y)$ za svaki n. Zato i sve točke tog intervala zauvijek ostaju u $I_0 \cup I_1$, no to je u suprotnosti s činjenicom da je Λ potpuno nepovezan. Dakle, S je injekcija.

Pokažimo sada da je S surjekcija. Za segment $J \subseteq I$, neka je $F_\mu^{-n}(J) = \{x \in I : F_\mu^n(x) \in J\}$. Primijetimo da je $F_\mu^{-1}(J)$ unija dva segmenta od kojih je jedan podskup od I_0, a drugi od I_1. Neka je $\overrightarrow{s} = s_0 s_1 \ldots s_n \cdots \in \Sigma_2$. Želimo pokazati da postoji $x \in \Lambda$ takav da je $S(x) = \overrightarrow{s}$. Definiramo

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \ldots s_n} &:= \{x \in I : x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \ldots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \cdots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

Pokažimo da je $(I_{s_0s_1\ldots s_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ugniježđeni niz nepraznih segmenata. Primijetimo da je $I_{s_0s_1\ldots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1\ldots s_n})$. Pretpostavimo, po indukciji, da je $I_{s_1\ldots s_n}$ neprazni segment. Tada je $F_\mu^{-1}(I_{s_1\ldots s_n})$ unija dva segmenta od kojih je jedan podskup od I_0, a drugi od I_1. Zato je $I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1\ldots s_n})$ neprazni segment. Primijetimo također da vrijedi $I_{s_0s_1\ldots s_n} = I_{s_0s_1\ldots s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0s_1\ldots s_{n-1}}$ pa su segmenti ugnježđeni. Zato je $\bigcap_{n=0}^\infty I_{s_0s_1\ldots s_n}$ neprazan. Štoviše, za $x \in \bigcap_{n=0}^\infty I_{s_0s_1\ldots s_n}$ vrijedi $x \in I_{s_0}$, $F_\mu(x) \in I_{s_1}, \ldots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}, \ldots$ pa je $S(x) = s_0s_1\ldots s_n\ldots$, tj. S je surjekcija.

Jer je S injekcija, $\bigcap_{n=0}^\infty I_{s_0s_1\ldots s_n}$ sadrži jednu točku pa $\operatorname{diam}(I_{s_0s_1\ldots s_n}) \to 0$ kada $n \to \infty$.

Na kraju pokažimo da je S neprekidna. Neka je $x \in \Lambda$, $S(x) = s_0s_1\ldots s_n\ldots$ i $\varepsilon > 0$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $1/2^k < \varepsilon$. Razmotrimo segmente $I_{t_0t_1\ldots t_k}$ za sve moguće riječi $t_0t_1\ldots t_k$. Postoji 2^{k+1} takvih segmenata, oni su međusobno disjunktni, Λ je sadržan u njihovoj uniji i $I_{s_0s_1\ldots s_k}$ je jedan od njih. Zato postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $y \in \Lambda$ za koji je $|x-y| < \delta$ vrijedi $y \in I_{s_0s_1\ldots s_k}$. To znači da se $S(x)$ i $S(y)$ podudaraju u prvih $k+1$ simbola pa po lemi 3.3 vrijedi $d(S(x), S(y)) < 1/2^k < \varepsilon$, odnosno S je neprekidna. Slično se vidi da je i S^{-1} neprekidna pa je S homeomorfizam. □

Teorem 4.4. $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$

Dokaz. Točka $x \in \Lambda$ dana je jedinstveno sa ugnježđenim nizom segmenata u $\bigcap_{n=0}^\infty I_{s_0s_1\ldots s_n}$ danim itinererom $S(x)$. Za $I_{s_0s_1\ldots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \cdots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n})$ promotrimo $F_\mu(I_{s_0s_1\ldots s_n})$. Općenito za dva segmenta I i J i funkciju f vrijedi $f(I \cap J) \subseteq f(I) \cap f(J)$ i obrnuta inkluzija ne mora vrijediti. No ako $f(I) \supset f(J)$ i $f(I \cap J) = f(J)$ tada je očigledno $f(I \cap J) = f(I) \cap f(J)$. Zato induktivno možemo pokazati da je

$$F_\mu(I_{s_0s_1\ldots s_n}) = I_{s_1} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \cdots \cap F_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1\ldots s_n}$$

(primijetimo da je $F_\mu(I_{s_0}) = I$).

Promotrimo sada $F_\mu(\bigcap_{n=0}^\infty I_{s_0s_1\ldots s_n})$. Jer je $(I_{s_0s_1\ldots s_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ugniježđeni niz nepraznih segmenata čiji je presijek jedna točka i F_μ je neprekidna funkcija, vrijedi

$$F_\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_\mu(I_{s_0 s_1 \dots s_n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \dots s_n}.$$

Zato je

$$SF_\mu(x) = SF_\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}) = S(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \dots s_n}) = s_1 s_2 \dots s_n \dots = \sigma S(x).$$

□

5 Schwarzova derivacija

Definicija 5.1. *Schwarzova derivacija* funkcije f u točki x definira se kao

$$Sf(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

Primjer 5.2. Za $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ vrijedi $F_\mu'(x) = \mu(1-2x)$, $F_\mu''(x) = -2\mu$ pa $SF_\mu(x) = -\frac{3}{2}\frac{4\mu^2}{\mu^2(1-2\mu)^2} = -\frac{6}{(1-2x)^2} < 0$ za svaki x (čak i za $x = 1/2$ vrijedi $SF_\mu(x) = -\infty$).

Propozicija 5.3. *Neka je $P(x)$ polinom. Ako su svi korijeni od $P'(x)$ realni i različiti, tada je $SP < 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $P'(x) = \prod_{i=1}^{N}(x - a_i)$, gdje su svi a_i realni i različiti. Tada vrijedi

$$P''(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{P'(x)}{x - a_j} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\prod_{i=1}^{N}(x - a_i)}{x - a_j}$$

i

$$P'''(x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \frac{\prod_{i=1}^{N}(x - a_i)}{(x - a_j)(x - a_k)}.$$

Zato vrijedi

$$\begin{aligned}
SP(x) &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{(x-a_j)(x-a_k)} - \frac{3}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{x-a_j}\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{(x-a_j)(x-a_k)} - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{x-a_j}\right)^2 \\
&\quad -\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{(x-a_j)(x-a_k)} - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{x-a_j}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{x-a_j}\right)^2 - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{x-a_j}\right)^2 < 0.
\end{aligned}$$

□

Propozicija 5.4. *Ako su $Sf < 0$ i $Sg < 0$, tada je $S(f\circ g) < 0$.*

Dokaz.

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$(f\circ g)''(x) = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$$

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'''(x) &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 2f''(g(x))g'(x)g''(x) + f''(g(x))g'(x)g''(x) \\
&\quad + f'(g(x))g'''(x) \\
&= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(f\circ g)(x) &= \frac{(f\circ g)'''(x)}{(f\circ g)'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{(f\circ g)''(x)}{(f\circ g)'(x)}\right)^2 \\
&= \frac{f'''(g(x))(g'(x))^3}{f'(g(x))g'(x)} + 3\frac{f''(g(x))g'(x)g''(x)}{f'(g(x))g'(x)} + \frac{f'(g(x))g'''(x)}{f'(g(x))g'(x)} \\
&\quad -\frac{3}{2}\left(\frac{f''(g(x))(g'(x))^2}{f'(g(x))g'(x)} + \frac{f'(g(x))g''(x)}{f'(g(x))g'(x)}\right)^2 \\
&= \frac{f'''(g(x))}{f'(g(x))}(g'(x))^2 + 3\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))}g''(x) + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2 \\
&\quad -\frac{3}{2}\left(\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))}\right)^2(g'(x))^2 - 3\frac{f''(g(x))g'(x)g''(x)}{f'(g(x))g'(x)} \\
&= (Sf)(g(x))(g'(x))^2 + Sg(x) < 0.
\end{aligned}$$

□

Dakle, ako je $Sf < 0$, tada je $Sf^n < 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 5.5. *Pretpostavimo da je $Sf < 0$ ($Sf(x) = -\infty$ je dopušteno). Ako f ima n kritičnih točaka, tada f ima najviše $n+2$ privlačne periodične orbite.*

Da bismo dokazali taj teorem trebamo sljedeće tri leme.

Lema 5.6. *Ako je $Sf < 0$, tada f' ne može imati pozitivni lokalni minimum niti negativni lokalni maksimum.*

Dokaz. Pretpostavimo da je y kritična točka od f', tj. $f''(y) = 0$. Budući da je $Sf(y) < 0$, vrijedi $\frac{f'''(y)}{f'(y)} < 0$, tj. $f'''(y)$ i $f'(y)$ imaju suprotne predznake. To znači da je $f'(y)$ pozitivna kada je konkavna i negativna kada je konveksna. Zato između svake dvije kritične točke od f' graf od f' siječe x-os. □

Lema 5.7. *Ako f ima konačno mnogo kritičnih točaka onda i f^m ima konačno mnogo kritičnih točaka za svaki $m \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da f ima konačno mnogo kritičnih točaka. Tada je $f^{-1}(x)$ konačan skup za svaki x, jer između svake dvije praslike od x postoji najmanje jedna kritična točka od f. Indukcijom se lako pokaže da je i $f^{-m}(x) = \{y : f^m(y) = x\}$ konačan skup.

Pretpostavimo da je $(f^m)'(x) = 0$, tj. da je x kritična točka od f^m. Tada vrijedi

$$(f^m)'(x) = \prod_{i=0}^{m-1} f'(f^i(x)) = 0$$

pa je $f^i(x)$ kritična točka od f^m za neki $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Zato je

$$\{x : (f^m)'(x) = 0\} = \{x : f'(x) = 0\} \cup (\cup_{i=1}^{m-1}\{x : f'(f^i(x)) = 0\}),$$

pri čemu je $\{x : f'(x) = 0\}$ skup svih kritičnih točaka od f, a $\cup_{i=1}^{m-1}\{x : f'(f^i(x)) = 0\}$ skup svih praslika f^{-i} kritičnih točaka od f za $i = 1, \dots, m-1$. Budući da su oba skupa konačna i skup kritičnih točaka od f^m je konačan. □

Lema 5.8. *Pretpostavimo da je $Sf < 0$ i da f ima konačno mnogo kritičnih točaka. Tada f ima konačno mnogo periodičnih točaka perioda m za svaki $m \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Označimo $g := f^m$. Tada su periodične točke perioda m za f fiksne točke od g. Iz propozicije 5.4 slijedi $Sg < 0$.

Pretpostavimo da g ima beskonačno mnogo fiksnih točaka. Tada, po teoremu srednje vrijednosti, postoji beskonačno mnogo točaka za koje je $g'(x) = 1$. Također, ne može postojati interval takav da za sve točke tog intervala vrijedi $g'(x) = 1$, jer bi u tom slučaju za sve točke tog intervala vrijedilo $g''(x) = g'''(x) = 0$, odnosno $Sg(x) = 0$, suprotno pretpostavci $Sg < 0$. Zato između svake tri uzastopne točke za koje je $g'(x) = 1$, postoji točka u kojoj je $g'(x) < 1$. Štoviše, po lemi 5.6 g' ne može imati pozitivni lokalni minimum pa između te tri točke postoje točke u kojima je $g'(x) < 0$ i posebno, postoji točka u kojoj je $g'(x) = 0$. No iz toga slijedi da g ima beskonačno mnogo kritičnih točaka pa po lemi 5.7 i f ima beskonačno mnogo kritičnih točaka suprotno pretpostavci leme. □

Dokaz teorema 5.5. Pretpostavimo da je x privlačna periodična točka od f perioda m. Neka je $W(x)$ maksimalni interval koji sadrži x takav da sve točke od $W(x)$ teže asimptotski prema x pod djelovanjem f^m, to jest, $W(x)$ je maksimalna povezana komponenta skupa $\{y : f^{mj}(y) \to x \text{ kada } j \to \infty\}$ koja sadrži x. Jasno je da je $W(x)$ otvoren i da $f^m(W(x)) \subset W(x)$.

Pretpostavimo prvo da je x fiksna točka i $W(x) := (l, r)$, $l, r \in \mathbb{R}$. Budući da je $f(W(x)) \subset W(x)$ i $W(x)$ je maksimalan, vrijedi jedna od sljedeće tri mogućnosti:

(1) $f(l) = l$, $f(r) = r$;

(2) $f(l) = r$, $f(r) = l$;

(3) $f(l) = f(r)$.

Ako vrijedi (1), po teoremu srednje vrijednosti postoje točke a, b, $l < a < x < b < r$, takve da je $f'(a) = f'(b) = 1$. Budući da je x privlačna, vrijedi $|f'(x)| < 1$. Po lemi 5.6 f' ne može imati pozitivni lokalni minimum pa f' poprima i negativne vrijednosti u (a, b). No tada očigledno postoji točka u (a, b) u kojoj je f' nula, tj. kritična točka od f je u (a, b).

Ako vrijedi (2), isti zaključak vrijedi za f^2.

Ako vrijedi (3), f očigledno ima minimum ili maksimum između l i r pa postoji kritična točka od f u $W(x)$.

U slučaju da su l ili r beskonačno, takav dokaz ne vrijedi, no tada možemo imati jos najviše dvije dodatne privlačne fiksne točke.

Ako je x periodična točka perioda m, razmotrimo f^m i na isti način dobivamo postojanje kritične točke od f^m u $W(x)$. No jedna točka orbite te kritične točke je kritična točka za f po pravilu ulančavanja pa dokaz slijedi. □

Teorem se može proširiti i na nehiperbolične periodične točke.

Propozicija 5.9. *Pretpostavimo da f ima konačno mnogo kritičnih točaka i da je $Sf < 0$. Ako f ima fiksnu točku x s multiplicitetom ± 1, tada x privlači točke s najmanje jedne strane i ako je $W(x)$ omeđen sadrži kritičnu točku od f.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f'(x) = 1$ (u drugom slučaju treba razmotriti f^2). Po lemi 5.8 f ima konačno mnogo fiksnih točaka. Zato postoji interval koji sadrži x i ne sadrži niti jednu drugu fiksnu točku. Pretpostavimo da je x odbojna, tj. da postoji interval $(a, b) \ni x$ takav da za svaki $y \in (a, x)$ vrijedi $f(y) < y$ i za svaki $y \in (x, b)$ vrijedi $f(y) > y$. Tada f' ima lokalni minimum 1, što je u suprotnosti s lemom 5.6. Dakle, ili $f(y) > y$ za $y \in (a, x)$, ili $f(y) < y$ za $y \in (x, b)$ pa je x privlačna s najmanje jedne strane.

Postojanje kritične točke od f u $W(x)$ slijedi kao u dokazu teorema 5.5. □

Iz svega slijedi da periodična točka s omeđenim stabilnim skupom privlači kritičnu točku. No ako je stabilan skup neomeđen, to ne mora vrijediti kao što se vidi is sljedećeg primijera.

Primjer 5.10. Neka je $E(x) = e^{x-1}$. Tada je $SE = -\frac{1}{2} < 0$ i $x = 1$ je slabo privlačna fiksna točka s $W(x) = (-\infty, 1)$ no E nema kritičnu točku.

Korolar 5.11. *Funkcija $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ ima najviše jednu privlačnu periodičnu točku za svaki μ.*

Dokaz. Budući da je $SF_\mu < 0$ i da za $|x|$ dovoljno velik vrijedi $|F_\mu^n(x)| \to \infty$ kada $n \to \infty$, ne postoji privlačna periodična točka s neograničenim stabilnim skupom. □

Za neki μ, F_μ nema niti jednu privlačnu periodičnu točku kao na primijer za $\mu = 4$ (jer se kritična točka preslika na odbojnu fiksnu točku), ili za $\mu > 2 + \sqrt{5}$ (jer iteracije kritične točke divergiraju).

6 Šarkovskijev teorem

Lema 6.1. *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ segment i f neprekidna funkcija. Ako $f(I) \supseteq I$, tada f ima fiksnu točku u I.*

Dokaz. Neka je $I = [a, b]$, $a < b$. Budući da su $a, b \in I \subseteq f(I)$, postoje $x_a, x_b \in I$ takvi da je $f(x_a) = a$ i $f(x_b) = b$. Zato je $x_a \geqslant a$ i $x_b \leqslant b$ pa neprekidna funkcija $x \mapsto f(x) - x$ mijenja predznak između x_a i x_b. Zbog neprekidnosti postoji točka x_0 između x_a i x_b u kojoj je vrijednost te funkcije nula, što znači da je $f(x_0) = x_0$. □

Lema 6.2. *Neka su $I, J \subset \mathbb{R}$ segmenti i f neprekidna funkcija. Ako $f(I) \supseteq J$, tada postoji segment $I' \subseteq I$ takav da je $f(I') = J$.*

Dokaz. Neka je $J = [a, b]$, $a < b$ te $A = \{x \in I : f(x) = a\}$ i $B = \{x \in I : f(x) = b\}$. Budući da je f neprekidna, A i B su kompaktni pa oba imaju minimum i maksimum. Neka je $x_a = \min A$ i $x_b = \min B$. Budući da su A i B disjunktni, $x_a \neq x_b$.

Pretpostavimo prvo da je $x_a < x_b$. Neka je $y_a = \max(A \cap [x_a, x_b])$. Budući da je f neprekidna te $f(y_a) = a$, $f(x_b) = b$ i ne postoji $x \in (y_a, x_b)$ takav da je $f(x) \in \{a, b\}$, vrijedi $f([y_a, x_b]) = [a, b]$. Dakle, $I' = [y_a, x_b]$.

Za $x_a > x_b$ dokaz je analogan. □

Lema 6.3. *Neka su $J_0, \ldots, J_k \subset \mathbb{R}$ segmenti i f neprekidna funkcija. Ako $f(J_j) \supseteq J_{j+1}$ za svaki $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, tada postoje segmenti $I_j \subseteq J_j$ takvi da je $f(I_j) = J_{j+1}$ za svaki $j \in \{0, \ldots, k-1\}$.*

Dokaz. Matematičkom indukcijom. □

Neka je (I, f) dinamički sustav, pri čemu je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval i f neprekidna funkcija. Neka je x periodična točka od f osnovnog perioda p. Označimo sa x_i, $i = 1, \ldots, p$, točke orbite od x, pri čemu su indeksirane tako da je $x_i < x_{i+1}$. Neka je $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ za sve $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Primijetimo da je $f(x_i) \in \mathcal{O}(x)$ za svaki i pa je $[f(x_i), f(x_{i+1})]$ unija uzastopnih intervala (najmanje jedan) oblika I_i.

Definicija 6.4. Ako $f(I_i) \supseteq I_j$, to ćemo još označavati i sa $I_i \to I_j$.

Markovljev graf periodične točke x je usmjereni graf čiji su vrhovi intervali I_i, a brid od vrha I_i do vrha I_j postoji kadgod vrijedi $I_i \to I_j$.

Ciklus duline k, $k \in \mathbb{N}$, u Markovljevom grafu od x je put oblika $J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{k-1} \to J_0$, gdje su J_i vrhovi Markovljevog grafa.

Ciklus je *osnovni* kadgod nije unija (slijed) jednog kraćeg ciklusa nekoliko puta.

Primjer 6.5. Ciklus $J_0 \to J_1 \to J_2 \to J_0 \to J_2 \to J_3 \to J_0$ je osnovni iako je unija dva podciklusa, a ciklus $J_0 \to J_1 \to J_2 \to J_0 \to J_1 \to J_2 \to J_0$ nije osnovni, jer je unija dva ista podciklusa.

Lema 6.6 (Štefanova lema)**.** *Neka je (I, f) dinamički sustav, gdje je I interval i f neprekidna funkcija te neka je $x \in I$ periodična točka. Pretpostavimo da Markovljev graf od x sadrži osnovni ciklus $J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Tada postoji periodična točka $y \in J_0$ osnovnog perioda n takva da je $f^k(y) \in J_k$ za svaki $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Dokaz. Iz leme 6.3 slijedi da za svaki $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ postoji segment $K_j \subseteq J_j$ takav da je $f(K_j) = K_{j+1}$ za $j \in \{0, \ldots, n-2\}$ i $f(K_{n-1}) = J_0 \supseteq K_0$. Zato $f^n(K_0) \supseteq K_0$ pa po lemi 6.1 postoji fiksna točka $y \in K_0$ za f^n, odnosno periodična točka od f perioda n. Očigledno je $f^j(y) \in f^j(K_0) = K_j \subseteq J_j$ za $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Tvrdimo da, jer je ciklus osnovni, n je osnovni period od y.

Pretpostavimo, po kontradikciji, da n nije osnovni period od y, odnosno da postoji $p < n$ takav da je $f^p(y) = y$.

Pretpostavimo prvo da y nije rubna točka od J_0. Budući da je $f^p(y) \in J_p$ vrijedi $y \in J_0 \cap J_p$. Također, $y \notin \partial J_0$ daje $J_p = J_0$. Budući da je $f^{p+i}(y) = f^i(y)$, vrijedi $J_{p+i} = J_i$ za $i = 1, \ldots, n-p$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je ciklus osnovni.

Pretpostavimo sada da je $y \in \partial J_0$. Tada $y \in \mathcal{O}(x)$, odnosno $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(x)$. Zato je osnovni period od x jednak osnovnom periodu $p < n$ od y. Jer je n također period od y, vrijedi $n = pm$ za neki $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$.

Ako je $y = x_1$, vrh $J_0 = I_1 = [x_1, x_2]$ je jedinstveno određen. Štoviše, za svaki vrh J_i je vrh J_{i+1} jedinstveno određen ($f(J_i)$ može biti unija nekoliko segmenata I_j, no $f^{i+1}(x_1) \in f^{i+1}(K_0) = K_{i+1} \subseteq J_{i+1}$ pa za J_{i+1} biramo onaj segment I_j koji sadrži K_{i+1}). Jer je $f^p(y) = y = x_1$, vrijedi $J_p = J_0$ i $J_{p+i} = J_i$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je ciklus osnovni.

Budući da je svaki ciklus duljine p koji počinje nekim drugim vrhom I_j samo ciklička permutacija ciklusa duljine p koji počine vrho I_1 (i zato jedinstveno određen), ista kontradikcija se dobije za svaki $y \in \mathcal{O}(x)$. □

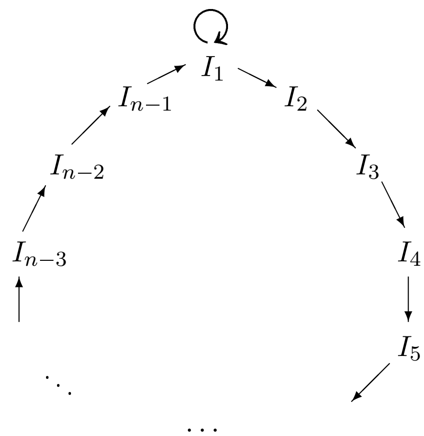
Definicija 6.7. *Šarkovskijev uređaj* je uređaj na skupu prirodnih brojeva dan na sljedeći način: $3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \cdots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \cdots \succ 2^3 \cdot 3 \succ 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ \cdots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1$.

Teorem 6.8 (Šarkovskijev teorem)**.** *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako f ima periodičnu točku osnovnog perioda n, tada f ima i periodičnu točku osnovnog perioda m za svaki $m \prec n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da f ima periodičnu točku x osnovnog perioda n.

1. slučaj. Pretpostavimo prvo da je $n > 1$ neparan i da f nema periodičnu točku neparnog perioda manjeg od n (u standardnom uređaju). Označimo sa x_i, $i = 1, \ldots, n$, točke orbite od x pri čemu su indeksirane tako da je $x_i < x_{i+1}$. Očigledno je $f(x_n) < x_n$. Neka je j najveći indeks za koji je $f(x_j) > x_j$. Označimo $I_1 := [x_j, x_{j+1}]$. Budući da je $f(x_{j+1}) < x_{j+1}$, vrijedi $f(x_{j+1}) \leqslant x_j$ pa $f(I_1) \supseteq I_1$, odnosno $I_1 \to I_1$. Budući da period od x nije 2, ne može biti $f(x_{j+1}) = x_j$ i $f(x_j) = x_{j+1}$ pa $f(I_1)$ sadrži najmanje još jedan segment oblika $[x_i, x_{i+1}]$; označimo ga s I_2. Dakle, $I_1 \to I_2$. Nastavljajući biramo $I_3, I_4, \ldots$ tako da $f(I_i) \supseteq I_{i+1}$. Budući da je n neparan, ima više x_i s jedne strane od I_1 nego s druge strane. Zato se za neke i, x_i i $f(x_i)$ nalaze s iste strane od I_1, a za neke i se x_i i $f(x_i)$ nalaze s različitih strane od I_1. Zato postoji k takav da su x_k i $f(x_k)$ s iste strane od I_1, a x_{k+1} i $f(x_{k+1})$ pripadaju suprotnim stranama od I_1 pa za taj k vrijedi $f(I_k) \supset I_1$. Dakle imamo $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k \to I_1$.

Neka je k takav da je $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k \to I_1$ najkraći put od I_1 do I_1 osim $I_1 \to I_1$. Želimo pokazati da je $k = n - 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. $k < n - 1$. Tada, po Štefanovoj lemi (lema 6.6), jedan od ciklusa $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k \to I_1$ ili $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k \to I_1 \to I_1$, daje fiksnu točku od f^r pri čemu je $r < n$ neparan. Ta točka se nalazi u nutrini od I_1, jer su rubne točke od I_1 točke orbite od x koje su periodične osnovnog perioda n. Također, $r > 1$, jer je $I_2 \neq I_1$. No po pretpostavci f nema periodičnu točku s neparnim periodom manjim od n. Dakle, $k = n-1$ i gornji najkraći put od I_1 do I_1 možemo zapisati kao na slici 1.



Slika 1:

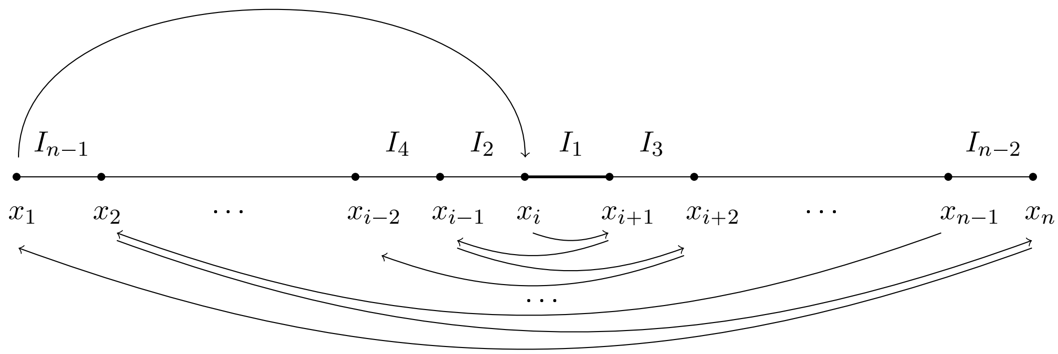
Budući da je $n-1$ najmanji broj za koji imamo takav ciklus, ne možemo imati brid $I_j \to I_r$ za $r > j+1$. Zato je orbita od x uređena u $\mathbb{R}$ kao na slici 2, ili kao na njenoj zrcalnoj slici.

Iz toga slijedi da se ciklus prikazan na slici 1 može proširiti kao na slici 3.

Dokaz teorema za neparan n slijedi direktno iz dijagrama na slici 3 i Štefanove leme: periodi veći od n dani su ciklusima oblika $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1$, a manji parni periodi dani su ciklusima oblika $I_{n-1} \to I_{n-2} \to I_{n-1}$, $I_{n-1} \to I_{n-4} \to I_{n-3} \to I_{n-2} \to I_{n-1}, \cdots$.

2. slučaj. Pretpostavimo sada da je n paran.

(2a) Prvo ćemo dokazati da f ima periodičnu točku perioda 2. Ukoliko se točke x_i i $f(x_i)$ nalaze na suprotim stranama od I_1 za neke i, a za neke



Slika 2:

druge i se x_i i $f(x_i)$ nalaze na istoj strani od I_1, dokaz slijedi kao u prvom slučaju (za neparan n), jer tada postoji ciklus $I_{n-1} \to I_{n-2} \to I_{n-1}$. Ako to nije slučaj, tada se x_i i $f(x_i)$ nalaze na suprotim stranama od I_1 za sve i i vrijedi dijagram na slici 4.

Zato $f([x_1, x_i]) \supset [x_{i+1}.x_n]$ i $f([x_{i+1}, x_n]) \supset [x_1, x_i]$ pa po Štefanovoj lemi f ima periodičnu točku osnovnog perioda 2 u $[x_1, x_i]$.

(2b) Sada ćemo dokazati teorem za $n = 2^s$, $s \in \mathbb{N}$. Neka je $m = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$ i $t < s$. Neka je $g := f^{\frac{m}{2}} = f^{2^{t-1}}$. Prisjetimo se, x je periodična točka od f s osnovnim periodom n, tj. vrijedi

$$f^{2^s}(x) = x.$$

Zato je

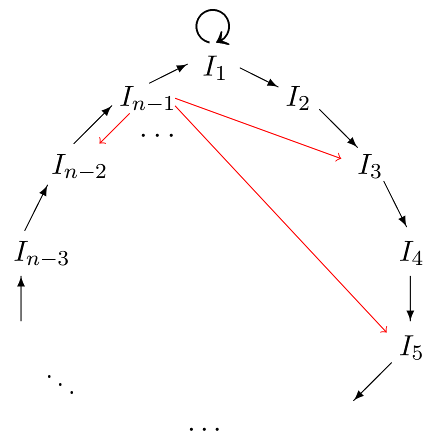
$$(f^{2^{t-1}})^{2^{s-t+1}}(x) = x,$$

odnosno

$$g^{2^{s-t+1}}(x) = x.$$

Dakle, g ima periodičnu točku parnog osnovnog perioda pa po (2a) ima i periodičnu točku osnovnog perioda 2, odnosno

$$g^2(y) = y$$



Slika 3:

za neki y. Zato je

$$(f^{2^{t-1}})^2(y) = y,$$

tj.

$$f^m(y) = y$$

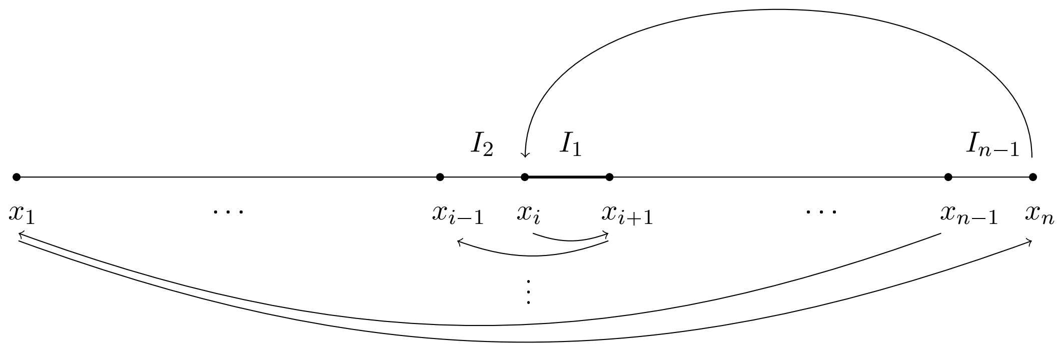
što dokazuje teorem za taj slučaj.

(2c) I na kraju, dokažimo teorem za $n = k \cdot 2^s$, $k, s \in \mathbb{N}$, k neparan. Neka je $g := f^{2^s}$. Tada je

$$x = f^n(x) = g^k(x)$$

pa g ima periodičnu točku osnovnog perioda k pri čemu je k neparan. Iz 1. slučaja slijedi da g ima i periodičnu točku osnovnog perioda ℓ, gdje je ili $\ell > k$ neparan, ili je ℓ proizvoljan paran broj pa f ima periodičnu točku osnovnog perioda $\ell \cdot 2^s$. Iz 1. slučaja također slijedi da g ima fiksnu točku pa iz (2b) slijedi da f ima periodičnu točku osnovnog perioda 2^t, $t < s$. □

Napomena 6.9. (1) Period 3 je najveći mogući period po Šarkovskijevom uređaju i zato postojanje točke osnovnog perioda 3 implicira postojanje periodičnih točaka svih ostalih osnovnih perioda.



Slika 4:

(2) Ako f ima periodičnu točku čiji osnovni period nije potencija od 2, tada f ima beskonačno mnogo periodičnih točaka. Obratno, ako f ima samo konačno mnogo periodičnih točaka, onda svaka ima period koji je potencija od 2.

Obrat Šarkovskijevog teorema također vrijedi.

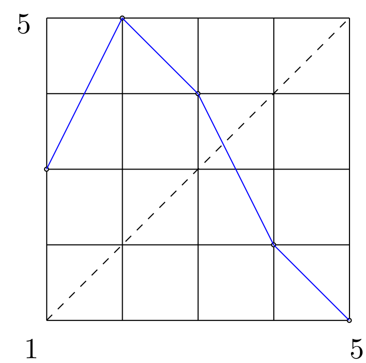
Propozicija 6.10. *Postoji funkcija koja ima periodičnu točku osnovnog perioda n i nema periodičnu točku osnovnog perioda većeg od n po Šarkovskijevom uređaju.*

Dokaz. **(1)** n **neparan.** Prvo ćemo konstruirati funkciju koja ima periodičnu točku osnovnog perioda 5, a nema periodičnu točku osnovnog perioda 3. Neka je $f : [1, 5] \to [1, 5]$ definirana na sljedeći način: $f(1) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$, $f(2) = 5$, $f(5) = 1$ i f je linearna između tih točaka. Očito je 1 periodična točka osnovnog perioda 5. Graf funkcije f dan je na slici 5.

Pokazat ćemo da f nema periodičnu točku osnovnog perioda 3. Budući da je

$$f^3([1, 2]) = [2, 5],$$

$$f^3([2, 3]) = [3, 5],$$



Slika 5:

$$f^3([4,5]) = [1,4],$$

f^3 nema fiksnu točku u niti jednom od tih segmenata. No $f^3([3,4]) = [1,5]$ pa f^3 ima najmanje jednu fiksnu točku u segmentu $[3,4]$. Pokazat ćemo da je ta fiksna točka jedinstvena pa je zato fiksna točka od f, a ne točka osnovnog perioda 3. Primijetimo da je $f : [3,4] \to [2,4]$ monotono padajuća, $f : [2,4] \to [2,5]$ je također monotono padajuća, kao i $f : [2,5] \to [1,5]$. Zato je $f^3|_{[3,4]}$ monotono padajuća pa je fiksna točka jedinstvena. Dakle, f nema periodičnu točku osnovnog perioda 3.

Analogno se mogu konstruirati i funkcije koje imaju periodičnu točku osnovnog perioda n, pri čemu je $n > 3$ neparan, a nemaju periodičnu točku osnovnog perioda $n-2$.

(2) n **paran.** Neka je $I = [0,1]$ i $f : I \to I$ neprekidna funkcija. Konstruiramo novu neprekidnu funkciju $F : I \to I$ čije periodične točke imaju periode duplo veće od perioda periodičnih točaka od f te ima jednu dodatnu fiksnu točku:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} f(3x) + \frac{2}{3}, & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \text{afina}, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ x - \frac{2}{3}, & x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Primijetimo da je $F(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}f(1) + \frac{2}{3}$, $F(\frac{2}{3}) = 0$ i $F(1) = \frac{1}{3}$. F preslikava segment $[0, \frac{1}{3}]$ u $[\frac{2}{3}, 1]$ i segment $[\frac{2}{3}, 1]$ na $[0, \frac{1}{3}]$. Također, koeficijent smijera od $F|_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}$ je manji od -2 (ne nužno strogo manji) pa za $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ koji nije fiksna točka, postoji j takav da je $F^j(x) \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Zato F nema periodične točke u $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ osim fiksne točke.

Pokazat ćemo prvo da ako je x periodična točka perioda m za f, tada je $x/3$ periodična točka perioda $2m$ za F. Neka je $f^m(x) = x$. Budući da je $\frac{x}{3} \in [0, \frac{1}{3}]$, vrijedi $F(\frac{x}{3}) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3} \in [\frac{2}{3}, 1]$ i $F^2(\frac{x}{3}) = \frac{1}{3}f(x) \in [0, \frac{1}{3}]$. Induktivno se može dokazati da vrijedi

$$F^{2k}\left(\frac{x}{3}\right) = F^2\left(F^{2k-2}\left(\frac{x}{3}\right)\right) = F^2\left(\frac{1}{3}f^{k-1}(x)\right) = \frac{1}{3}f(f^{k-1}(x)) = \frac{1}{3}f^k(x).$$

Dakle,

$$F^{2m}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}f^m(x) = \frac{1}{3}x.$$

Pokažimo sada da ako je y periodična točka za F, tada ili y ili $F(y)$ pripada segmentu $[0, \frac{1}{3}]$ i ako je to y, tada je $3y$ periodična točka od f, a ako je to $F(y)$, tada je $3F(y)$ periodična točka od f. Neka je $F^m(y) = y$ i $m \neq 1$. Iz toga i prije dokazanog slijedi da $y \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Pretpostavimo da je $y \in [0, \frac{1}{3}]$ (dokaz za $y \in [\frac{2}{3}, 1]$ je analogan). Tada je $f(3y) = 3F^2(y)$. Induktivno se može dokazati da je

$$f^k(3y) = f(f^{k-1}(3y)) = f(3F^{2k-2}(y)) = 3F^2(F^{2k-2}(y)) = 3F^{2k}(y).$$

Dakle,

$$f^{m/2}(3y) = 3F^m(y) = 3y.$$

Iz svega toga slijedi da za konstrukciju funkcije koja ima periodičnu točku osnovnog perioda $10 = 5 \cdot 2$, a nema periodičnu točku perioda $6 = 3 \cdot 2$, prvo treba konstruirati funkciju f koja ima periodičnu točku osnovnog perioda 5, a nema periodičnu točku osnovnog perioda 3. Tražena funkcija je njoj pridružena funkcija F koja duplicira periode.

Analogno se mogu konstruirati i funkcije koje imaju periodičnu točku osnovnog perioda $n = k2^i$, pri čemu je $k > 3$ neparan, $i \in \mathbb{N}$, a nemaju periodičnu točku osnovnog perioda $(k-2)2^i$, ili funkcije koje imaju periodičnu točku osnovnog perioda $3 \cdot 2^i$, a nemaju periodičnu točku osnovnog perioda $k2^{i-1}$ za svaki neparan k. $\square$

7 Podpomak konačnog tipa

Proučimo kvadratnu funkciju F_μ za $\mu \approx 3.839$ i označimo zbog jednostavnosti $F(x) := 3.839\ldots x(1-x)$. Funkcija F ima privlačnu periodičnu orbitu perioda tri i njene točke su približno $a_1 \approx 0.149888$, $a_2 \approx 0.489172$, $a_3 \approx 0.959299$. Također vrijedi $(F^3)'(a_i) \approx -0.78$, tj. $|(F^3)'(a_i)| < 1$. Da su a_i, $i = 1, 2, 3$, privlačne periodične točke može se dokazati nalazeći male intervale oko točaka a_i koje F^3 preslikava unutar sebe, pri čemu je apsolutna vrijednost derivacije od F^3 na tom intervalu manja od jedan. Po Šarkovskijevom teoremu (teorem 6.8) F ima periodične točke svih perioda, a po teoremu 5.5 niti jedna osim a_i, $i = 1, 2, 3$, nije privlačna. Da bismo vidjeli gdje se sve te točke nalaze i koliko ih ima uvest ćemo *podpomak konačnog tipa*

Prvo definiramo *pomak na N simbola.* Neka je Σ_N skup svih nizova prirodnih brojeva između 1 i N,

$$\Sigma_N = \{\overrightarrow{s} = s_0 s_1 \ldots s_j \ldots : s_j \in \mathbb{N},\ s_j \leqslant N\}.$$

Kao na Σ_2, postoji prirodna metrika na Σ_N definirana formulom

$$d_N(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i},$$

gdje su $\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t} \in \Sigma_N$.

Propozicija 7.1. (1) *d_N je metrika na Σ_N.*

(2) *Ako je $s_i = t_i$ za $i = 0, 1, \ldots, k$, tada je $d_N(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}) \leqslant 1/N^k$.*

(3) *Ako je $d_N(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}) < 1/N^k$, tada je $s_i = t_i$ za $i = 0, 1, \ldots, k$.*

Dokaz je analogan dokazima lemi 3.2 i 3.3.

Također, kao u slučaju Σ_2, preslikavanje pomaka definirano je sa

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \ldots) = s_1 s_2 s_3 \ldots$$

i kao u lemi 3.5 može se pokazati da je σ neprekidno preslikavanje. Nas ustvari zanimaju određeni podprostori od Σ_N.

Neka je A kvadratna matrica reda N, $A = [a_{ij}]$, pri čemu su $a_{ij} \in \{0, 1\}$ za sve $i, j = 1, \ldots, N$. Definiramo podskup $\Sigma_A \subseteq \Sigma_N$ na sljedeći način:

$$\Sigma_A = \{\overrightarrow{s} = s_0 s_1 s_2 \ldots : a_{s_i s_{i+1}} = 1 \ \forall i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Primjer 7.2. (a) Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Budući da je $a_{12} = a_{21} = 0$, nizovi u Σ_A ne mogu imati 1 i 2 kao susjedne elemente. Dakle, Σ_A sadrži samo dva niza $111\ldots$ i $222\ldots$.

(b) Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Budući da je $a_{21} = 0$, 1 ne može slijediti iza 2, sve ostalo je dozvoljeno. Dakle, Σ_A sadrži nizove $111\ldots$, $222\ldots$ te nizove tipa $1^k 2^\infty$, $k \in \mathbb{N}$, gdje $a^k = \underbrace{a \ldots a}_{k \,\text{puta}}$ i $a^\infty = \underbrace{aaa \ldots}_{\infty \,\text{puta}}$.

(c) Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Nizovi u Σ_A ne mogu imati dvije uzastopne dvojke, jer je $a_{22} = 0$.

Označimo sa σ_A restrikciju od σ na skup Σ_A. σ_A zovemo *podpomak konačnog tipa.*

Propozicija 7.3. *Σ_A je zatvoren podskup od Σ_N i invarijantan na σ_A.*

Dokaz. Invarijantnost je očigledna. Dokažimo da je Σ_A zatvoren.

Neka je $(\overrightarrow{s}^i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz točaka u Σ_A koji konvergira prema $\overrightarrow{t}$. Pretpostavimo, po kontradikciji, da $\overrightarrow{t} \notin \Sigma_A$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $a_{t_k t_{k+1}} = 0$. Budući da $(\overrightarrow{s}^i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergira prema $\overrightarrow{t}$, postoji $m \in \mathbb{N}_0$ takav da za sve $i > m$ vrijedi $d_N(\overrightarrow{s}^i, \overrightarrow{t}) < 1/N^{k+1}$. Po propoziciji 7.1 to znači da je $t_0 t_1 \ldots t_{k+1} =$

$s_0^i s_1^i \dots s_{k+1}^i$ za sve $i \geqslant m$. Budući da su $\overrightarrow{s}^i \in \Sigma_A$, vrijedi $a_{t_k t_{k+1}} = 1$, kontradikcija. Dakle, Σ_A je zatvoren. $\square$

Vratimo se sada funkciji $F(x) = 3.839\dots x(1-x)$. Funkcija F ima još jednu periodičnu orbitu perioda tri i njene točke su približno $b_1 \approx 0.169040$, $b_2 \approx 0.539247$, $b_3 \approx 0.953837$. Također vrijedi $(F^3)'(b_i) \approx 2.66 > 1$, $i = 1, 2, 3$. Da su b_i odbojne periodične točke može se dokazati izračunavanjem malih intervala oko točaka b_i za koje vrijedi da F^3 od odgovarajućeg intervala sadrži taj interval, pri čemu je apsolutna vrijednost derivacije od F^3 na tom intervalu veća od jedan.

Neka je $W(a_i)$ maksimalni interval točaka koje konvergiraju prema a_i pod djelovanjem F^3. Iz dokaza teorema 5.5 vidimo da je jedna rubna točka od svakog od $W(a_i)$ fiksna točka za F^3 pa su b_i rubne točke od $W(a_i)$. Označimo sa $\widehat{b}_i$ točke za koje je $F^3(\widehat{b}_i) = F^3(b_i) = b_i$ i koje su na suprotnoj strani od a_i u odnosu na b_i, $i = 1, 2, 3$. Označimo $A_1 = (\widehat{b}_1, b_1)$, $A_2 = (\widehat{b}_2, b_2)$ i $A_3 = (b_3, \widehat{b}_3)$. Primijetimo da F preslikava A_1 monotono na A_2 i A_3 monotono na A_1. Također, F ima kritičnu toču u A_2 pa F nije monotona u A_2. Jer je $\max F \approx 0.95975$, $F(A_2) \subset A_3$ $(F(b_2) = F(\widehat{b}_2) = b_3)$.

Kako smo u primjeru 2.6 (6) pokazali, $F^n(x) \to -\infty$ za $x < 0$ i $x > 1$. Također, $F^n(x)$ teži orbiti od a_i za $x \in A_i$. Zato su sve ostale periodične točke sadržane u komplementu od $\bigcup_{i=1}^3 A_i$ u $[0, 1]$. Taj komplement se sastoji od četiri segmenta, označimo ih sa I_0, I_1, I_2 i I_3.

Propozicija 7.4. *Sve periodične točke od F sadržane su u $I_1 \cup I_2$ s iznimkom fiksne točke 0 i periodičnih točaka a_1, a_2, a_3 perioda tri.*

Dokaz. Primijetimo da je F monotona na svim I_j i vrijedi $I_0 \to I_0 \cup I_1$, $I_1 \to I_2 \to I_1 \cup I_2$, $I_3 \to I_0$. Dakle, za $x \in I_1 \cup I_2$ vrijedi $F(x) \in I_1 \cup I_2$. Za $x \in I_0$, $x \neq 0$, vrijedi $F(x) > x$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $F^n(x) \notin I_0$. Ako $F^n(x) \in A_1$, x nije periodična točka. Ako $F^n(x) \in I_1$, tada $F^{n+i}(x) \in I_1 \cup I_2$ za sve $i \in \mathbb{N}$ pa ne postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $F^k(x) \in I_0$, odnosno x nije periodična točka. Na kraju, ako $x \in I_3$, tada $F(x) \in I_0$ i x opet nije periodična točka. $\square$

Označimo sa Λ skup svih točaka čija cijela orbita leži u $I_1 \cup I_2$. Da bismo razumijeli dinamiku na Λ vraćamo se simboličkoj dinamici. Analogno definiciji 4.2, definiramo *itinerer* točke $x \in \Lambda$ kao niz $\overrightarrow{s} = S(x) = s_0 s_1 \dots s_n \dots$, gdje je $s_n = 1$ ako je $F^n(x) \in I_1$ i $s_n = 2$ ako je $F^n(x) \in I_2$. Budući da je $F(I_1) = I_2$, u nizu $\overrightarrow{s}$ iza simbola 1 ne moze opet slijediti simbol 1. Pokazat ćemo da je to jedino ograničenje, odnosno da $\overrightarrow{s}$ poprima vrijednosti u Σ_A, gdje je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorem 7.5. *Funkcije $F : \Lambda \to \Lambda$ je topološki konjugirana podpomaku konačnog tipa σ_A, pri čemu je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.*

Dokaz. Dokaz da je $S : \Lambda \to \Sigma_A$ neprekidna i surjektivna je isti kao u dokazu teorema 4.3, a da je $S \circ F = \sigma_A \circ S$ kao u dokazu teorema 4.4. Jedina razlika je u dokazu da je S injektivna pa ćemo se sada fokusirati na taj dio. Razlika nastaje jer ovdje ne vrijedi da je $|F'(x)| > 1$ za sve $x \in I_1 \cup I_2$. No vrijedi $|F'(x)| > \nu = F'(\widehat{b}_2) \approx 0.3$ za sve $x \in I_1 \cup I_2$, jer je $F'' < 0$ i interval $(\widehat{b}_2, b_2)$ koji sadrži kritičnu točku nije sadržan u $I_1 \cup I_2$. Dakle, $|F'|$ je omeđen odozdo na $I_1 \cup I_2$ strogo pozitivnim brojem.

Pokazat ćemo sada da postoji $\lambda > 1$ takav da za svaki $x \in \Lambda$ vrijedi $|(F^3)'(x)| > \lambda$. Primijetimo prvo da postoje tri segmenta B_1, B_2 i B_3 u $I_1 \cup I_2$ takva da je $|(F^3)'(x)| \leqslant 1$ za x iz ta tri segmenta. Dva od njih, B_1 i B_2, su simetrično smješteni u odnosu na $1/2$, a treći, B_3, leži u I_2. Primijetimo da je $F^3(B_3) \subset (\widehat{b}_1, b_1)$ pa $B_3 \cap \Lambda = \varnothing$. Također, lako se provjeri da za svaki $x \in B_2$ vrijedi $0.661 < x < 0.683$, $(F^3)'(0.661) > 1$ i $(F^3)'(0.683) < -1$ te $F^3((0.661, 0.683)) \subset (b_3, \widehat{b}_3)$. Po simetriji dobivamo $F^3(B_1) \subset (b_3, \widehat{b}_3)$ pa je $B_1 \cap \Lambda = \varnothing$ i $B_2 \cap \Lambda = \varnothing$.

Sada ćemo pokazati da je Λ hiperboličan skup. Neka je K takav da je $\nu^2 \lambda^K > 1$. Neka je $N = 3K + 2$. Za $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ možemo pisati

$n = 3(K+M)+i$, gdje su $M > 0$ i $0 \leqslant i \leqslant 2$ nenegativni cijeli brojevi. Dakle, za $x \in \Lambda$ vrijedi

$$|(F^n)'(x)| = |(F^i)'(F^{3(K+M)}(x)| \cdot |(F^{3(K+M)})'(x)| > \nu^2 \lambda^{K+M} > 1$$

pa je Λ odbojni hiperbolični skup

Sada, kada imamo hiperboličnost, ostatak dokaza je sličan dokazu teorema 4.3. $\square$

Napomena 7.6. Tehnike u gornjem dokazu možemo primijeniti za dokaz propozicije 2.7 za $4 < \mu \leqslant 2 + \sqrt{5}$.

Iz svega dobivenog slijedi da je jednostavno pronaći periodične točke svih perioda, čiju egzistenciju daje Šarkovskijev teorem. Periodična točka osnovnog perioda k u Σ_A je, na primjer, niz $(\underbrace{22\ldots 2}_{k-1\,\text{puta}}1)^\infty$. Naravno, postoje i druge periodične točke perioda k. Pitanje je koliko ih ima.

Propozicija 7.7. $\operatorname{card}(\operatorname{Per}_k \sigma_A) = \operatorname{tr}(A^k)$

Dokaz. Prisjetimo se, niz $\overrightarrow{s} \in \Sigma_A$ je fiksan za σ^k ako i samo ako je oblika $\overrightarrow{s} = (s_0 s_1 \ldots s_{k-1})^\infty$. Taj niz pripada prostoru Σ_A ako i samo ako vrijedi $a_{s_0 s_1} a_{s_1 s_2} \cdots a_{s_{k-1} s_0} = 1$ (inače je taj produkt 0). Zato je

$$\sum_{s_0,\ldots,s_{k-1}} a_{s_0 s_1} a_{s_1 s_2} \cdots a_{s_{k-1} s_0}$$

broj periodičnih točaka perioda k od σ_A. No ta suma je u stvari trag matrice A^k, to jest vrijedi

$$\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{s_0,\ldots,s_{k-1}} a_{s_0 s_1} a_{s_1 s_2} \cdots a_{s_{k-1} s_0} = \operatorname{card}(\operatorname{Per}_k \sigma_A).$$

$\square$

8 Kaos

Postoji puno definicija kaosa. Naš pristup će biti topološki.

Definicija 8.1. Neka je $J \subset \mathbb{R}$ segment. Kažemo da je funkcija $f : J \to J$ **topološki tranzitivna** ako za svaki par otvorenih skupova $U, V \subset J$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Intuitivno, za topološki tranzitivnu funkciju postoje točke koje se pod iteracijama gibaju od bilo kojeg proizvoljno malog otvorenog skupa do bilo kojeg drugog proizvoljno malog otvorenog skupa. Stoga, dinamički sustav ne može biti dekomponiran u dva disjunktna otvorena skupa koji su invarijantni za danu funkciju. Primijetimo da ako preslikavanje ima gustu orbitu, tada je topološki tranzitivno. Obrat je također točan na kompaktnim podskupovima od $\mathbb{R}$ i S^1 bez izoliranih točaka, ali ga nećemo dokazivati (dokaz koristi teorem o Baireovoj kategoriji).

Definicija 8.2. Neka je $J \subset \mathbb{R}$ segment. Kažemo da je funkcija $f : J \to J$ **osjetljiva na početne uvjete** ako postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in J$ i svaku okolinu U od x postoji $y \in U$ i $n \in \mathbb{N}$ takav da je $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Intuitivno, funkcija je osjetljiva na početne uvjete ako za svaku točku x postoje točke koje su proizvoljno blizu x i čije se iteracije razdvajaju od iteracija od x za najmanje δ. Pri tome se ne trebaju separirati od x sve točke blizu x, ali mora postojati barem jedna takva točka u svakoj okolini od x. Ako je funkcija osjetljiva na početne uvjete, onda se svaka mala pogreška u računu, nastala npr. zaokruživanjem, iteriranjem može uvećavati.

Definicija 8.3 (1986., Devaney)**.** Neka je (X, d) metrički prostor. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to X$ **kaotično** na X ako vrijede slijedeća tri uvjeta:

(K1) f je topološki tranzitivna.

(K2) Skup periodičnih točaka je gust podskup od X.

(K3) f je osjetljiva na početne uvjete.

Teorem 8.4 (1992., Banks – Brooks – Cairns – Davis – Stacey)**.** *Neka je (X, d) metrički prostor i $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje. Ako je f topološki tranzitivna i skup periodičnih točaka je gust u X, tada je f osjetljiva na početne uvjete.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f tranzitivna i da je skup periodičnih točaka gust u X.

Pokažimo prvo da postoji $\delta_0 > 0$ takav da za svaki $x \in X$ postoji periodična točka $q \in X$ čija orbita $\mathcal{O}(q)$ je udaljena najmanje $\delta_0/2$ od x. Izaberimo dvije proizvoljne periodične točke q_1 i q_2 s disjunktnim orbitama $\mathcal{O}(q_1)$ i $\mathcal{O}(q_2)$. Označimo s δ_0 udaljenost između $\mathcal{O}(q_1)$ i $\mathcal{O}(q_2)$. Tada je po nejednakosti trokuta svaka točka $x \in X$ udaljena najmanje $\delta_0/2$ od jedne od dvije izabrane orbite.

Pokazat ćemo da je f osjetljiva na početne uvjete s konstantom $\delta = \delta_0/8$. Neka je $x \in X$ proizvoljan i neka je W neka okolina od x. Budući da je skup periodičnih točaka gust u X, postoji periodična točka p u presjeku $U = W \cap B_\delta(x)$ od W i kugle $B_\delta(x)$ radijusa δ sa središtem u x. Označimo sa n period od p. Kao što smo prvo pokazali, postoji periodična točka $q \in X$ čija je orbita $\mathcal{O}(q)$ udaljena od x najmanje $\delta_0/2 = 4\delta$. Neka je

$$V = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(B_\delta(f^i(q))).$$

V je neprazan, jer je $q \in V$, i otvoren, jer je konačan presjek otvorenih skupova. Budući da je f tranzitivna, postoji $y \in U$ i $k \in \mathbb{N}$ takvi da je $f^k(y) \in V$.

Neka je j cijeli dio (najveće cijelo) od $\frac{k}{n} + 1$ ($j = \lfloor \frac{k}{n} + 1 \rfloor$). Dakle, $\frac{k}{n} < j \leqslant \frac{k}{n} + 1$ pa je $1 \leqslant nj - k \leqslant n$. Po konstrukciji vrijedi:

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subseteq B_\delta(f^{nj-k}(q)).$$

Primijetimo da je $f^{nj}(p) = p$ i po nejednakosti trokuta vrijedi:

$$\begin{aligned} d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) &= d(p, f^{nj}(y)) \\ &\geqslant d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(p, x). \end{aligned}$$

Zato, i jer je $\mathcal{O}(q)$ udaljena od x najmanje 4δ, $f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$ i $p \in B_\delta(x)$, vrijedi

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Ponovnom primjenom nejednakosti trokuta

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) \geqslant d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 2\delta$$

dobivamo da je ili $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$, ili $d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta$. U svakom slučaju pronašli smo točku u W čija nj-a iteracija je udaljena od $f^{nj}(x)$ za više od δ. $\square$

Propozicija 8.5 (1994., Vellekoop – Berglund)**.** *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (ne nužno konačan) i $f : I \to I$ neprekidna topološki tranzitivna funkcija. Tada vrijedi:*

(1) Skup periodičnih točaka je gust u I.

(2) f je osjetljiva ne početne uvjete.

Za dokaz propozicije treba slijedeća lema.

Lema 8.6. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (ne nužno konačan) i $f : I \to I$ neprekidna funkcija. Ako je $J \subseteq I$ interval koji ne sadrži niti jednu periodičnu točku od f, $z, f^m(z), f^n(z) \in J$ i $0 < m < n$, tada je ili $z < f^m(z) < f^n(z)$, ili $z > f^m(z) > f^n(z)$.*

Dokaz leme 8.6. Pretpostavimo da je $J \subseteq I$ interval koji ne sadrži niti jednu periodičnu točku od f i da postoji $z \in J$ takav da su $f^m(z), f^n(z) \in J$, $0 < m < n$ i $z < f^m(z) > f^n(z)$.

Zbog jednostavnosti, definiramo $g(x) := f^m(x)$. Dakle, $z < g(z)$. Pokazat ćemo prvo da to po indukciji povlači da je $z < g(z) < g^{k+1}(z)$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $g(z) > g^{k+1}(z)$ i neka je k najmanji od svih s tim svojstvom. Tada je funkcija $g^k(x) - x$ neprekidna i ima pozitivnu vrijednost u z i negativnu vrijednost u $g(z)$ pa postoji $y \in (z, g(z)) \subset J$ takav da je $g^k(y) - y = 0$, odnosno $g^k(y) = y$. No to znči da je $y \in J$ periodična točka od f s periodom km, što je u suprotnosti s pretpostavkom da J ne sadrži niti jednu periodičnu točku od f. Dakle, $z < g^k(z)$ za sve $k \in \mathbb{N}$ pa i za $k = n - m$, tj. $z < f^{(n-m)m}(z)$.

Definirajmo sada $g(x) := f^{n-m}(x)$ i označimo $v := f^m(z)$. Tada je $v > g(v)$. Analogno kao u gornjem paragrafu može se induktivno pokazati da vrijedi $v > g(v) > g^{k+1}(v)$ za sve $k \in \mathbb{N}$ pa onda i za $k + 1 = m$, odnosno vrijedi $f^{(n-m)m}(f^m(z)) < f^m(z)$.

Iz svega gore slijedi da je funkcija $f^{(n-m)m}(x) - x$ neprekidna i ima pozitivnu vrijednost u točki z, a negativnu vrijednost u točki $f^m(z)$. No to implicira da f ima periodičnu točku perioda $(n - m)m$ u J, kontradikcija.

Slučaj $z > f^m(z) < f^n(z)$ dokazuje se analogno. □

Dokaz propozicije 8.5. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna i topološki tranzitivna. Iz teorema 8.4 slijedi da trebamo pokazati samo da je skup periodičnih točaka od f gust u I.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji interval $J \subseteq I$ koji ne sadrži niti jednu periodičnu točku od f. Neka je $x \in J$. Jer je J otvoren skup, postoje intervali $U, V \subset J$ takvi da je $x \in U$ i $U \cap V = \emptyset$. Jer je f topološki tranzitivna, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$, tj. postoji $y \in U$ takav da je $f^m(y) \in V$. Jer je f neprekidna, postoji interval $W \subset U$ takav da je $f^m(W) \subset V$ i zato $f^m(W) \cap W = \emptyset$. Jer je W otvoren skup i f topološki tranzitivna, postoji $n > m$ i $z \in W$ takav da je $f^n(z) \in W$. No tada imamo $0 < m < n$, $z, f^n(z) \in W$ i $f^m(z) \notin W$ što je u kontradikciji s lemom 8.6. □

Primijetimo da se dokaz ne može generalizirati na prostore više dimenzije, ili na kružnicu, jer lema 8.6 koristi uređaj na $\mathbb{R}$ na bitan način.

Definicija 8.7. Neka je X Hausdorffov prostor i $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje. Kažemo da je f **Hausdorff osjetljivo na početne uvjete** ako postoji konačan otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X takav da za svaku točku $x \in X$ i svaki otvoreni podskup $V \subseteq X$ koji sadrži x, $x \in V$, postoji $v \in V$ i $k \in \mathbb{N}$ takav da je $|\{f^k(x), f^k(v)\} \cap U| \leqslant 1$ za sve $U \in \mathcal{U}$, gdje $|S|$ označava broj elemenata skupa S.

Teorem 8.8 (2018., Good – Macias)**.** *Neka je (X, d) kompaktni metrički prostor. Neprekidno preslikavanje $f : X \to X$ je Hausdorff osjetljivo na početne uvjete ako i samo ako je osjetljivo na početne uvjete.*

Da bismo dokazali teorem, podsjetimo se Lebesqueovog broja pokrivača.

Lema 8.9. *Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač metričkog prostora (X, d). Ako je X kompaktan, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki podskup od X dijametra manjeg od δ, postoji element pokrivača $\mathcal{U}$ koji ga sadrži. Broj δ se zove* **Lebesgueov broj pokrivača** *$\mathcal{U}$.*

Dokaz teorema 8.8. Pretpostavimo da je f osjetljiva na početne uvjete s konstantom $\delta > 0$. Primijetimo da je $\{B_{\frac{\delta}{2}}(x) : x \in X\}$ otvoreni pokrivač od X. Jer je X kompaktan, postoje $x_1, \dots, x_n \in X$ takvi da je $\mathcal{U} = \{B_{\frac{\delta}{2}}(x_j) : j = 1, \dots, n\}$ konačan potpokrivač. Pokazat ćemo da $\mathcal{U}$ zadovoljava definiciju Hausdorffove osjetljivosti na početne uvjete za f. Neka je $y_1 \in X$ točka i $V \subseteq X$ podskup od X koji sadrži y_1, $y_1 \in V$. Jer je V otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $B_\varepsilon(y_1) \subseteq V$. Jer je f osjetljiva na početne uvjete, postoje $y_2 \in B_\varepsilon(y_1)$ i $k \in \mathbb{N}$ takvi da je $d(f^k(y_1), f^k(y_2)) \geqslant \delta$. Pokazat ćemo da je za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$, $|\{f^k(y_1), f^k(y_2)\} \cap B_{\frac{\delta}{2}}(x_j)| \leqslant 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $m \in \{1, \dots, n\}$ takav da $\{f^k(y_1), f^k(y_2)\} \subset B_{\frac{\delta}{2}}(x_m)$. Tada bi vrijedilo $d(f^k(y_1), f^k(y_2)) \leqslant d(f^k(y_1), x_m) + d(x_m, f^k(y_2)) < \delta$, kontradikcija.

Pretpostavimo da je f Hausdorff osjetljiva na početne uvjete s konačnim pokrivačem $\mathcal{U}$ od X kao u definiciji. Neka je $\delta > 0$ Lebesgueov broj za pokrivač $\mathcal{U}$. Neka je $x_1 \in X$ točka i $\varepsilon > 0$. Budući da je f Hausdorff osjetljiva na početne uvjete, postoje $x_2 \in B_\varepsilon(x_1)$ i $k \in \mathbb{N}$ takvi da je $|\{f^k(x_1), f^k(x_2)\} \cap U| \leqslant 1$ za svaki $U \in \mathcal{U}$. Jer je δ Lebesgueov broj za $\mathcal{U}$, vrijedi $d(f^k(x_1), f^k(x_2)) \geqslant \delta$. $\square$

I na kraju ovog poglavlja razmotrit ćemo jedan zanimljiv primjer. Preslikavanja koja imaju gustu orbitu su topološki tranzitivna. Na početku poglavlja smo konstatirali (bez dokaza) da je obrat također točan na kompaktnim podskupovima od $\mathbb{R}$ i S^1 bez izoliranih točaka, a sada ćemo dokazati da obrat općenito ne vrijedi.

Propozicija 8.10. *Postoji kompaktan Hausdorffov prostor X i tranzitivno preslikavanje $f : X \to X$ takvo da niti jedna točka od X nema gustu orbitu za f. Uz to, skup periodičnih točaka od f je gust u X pa je f kaotična.*

Da bismo dokazali propoziciju, tj. konstruirali prostor X i preslikavanje f s traženim svojstvima, trebaju nam slijedeće dvije tvrdnje:

Teorem 8.11 (Tihonovljev teorem)**.** *Produkt beskonačno kompaktnih prostora je kompaktan (u produktnoj topologiji).*

Po definiciji, bazu topologije u produktu $X = \prod_{a \in A} X_a$ tvore svi skupovi oblika $U_{a_1} \times \cdots \times U_{a_n} \times \prod_{a \in A \setminus \{a_1, \dots a_n\}} X_a$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $U_{a_i} \subseteq X_{a_i}$, $i = 1, \dots, n$, su otvoreni skupovi od X_{a_i}. Primijetimo da je $U_{a_1} \times \cdots \times U_{a_n} \times \prod_{a \in A \setminus \{a_1, \dots a_n\}} X_a = \bigcap_{i=1}^n \pi_{a_i}^{-1}(U_{a_i})$.

Lema 8.12. *Ako skup A ima kardinalitet veći od $\mathfrak{c}$, tada produkt $\mathbb{R}^A$ nije separabilan, tj. nema prebrojiv gust podskup.*

Dokaz propozicije 8.10. Neka je $T : [0, 1] \to [0, 1]$ šatorska funkcija s nagibom 2, tj. $T(t) = \min\{2t, 2(1 - t)\}$. Lako se vidi da je T tranzitivna. Neka je κ bilo koji kardinalni broj veći od $\mathfrak{c}$ (kontinuum). Neka je $X = [0, 1]^\kappa$ s produktnom topologijom i $f = \prod_{a \leqslant \kappa} f_a$, gdje je $f_a = T$ za svaki $a \leqslant \kappa$. Budući da je T tranzitivna, lako se vidi da je i f tranzitivna. Prostor X je Hausdorffov i kompaktan (po Tihonovljevom teoremu), ali nije separabilan (po lemi 8.12), tj. ne postoji prebrojiv gust podskup od X. Budući da je svaka orbita prebrojiv skup, ne postoji točka u X čija orbita za f je gusta u X.

Pokažimo na kraju da je skup periodičnih točaka od f gust u X. Neka je U element baze topologije od X (pa i otvoren skup). Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $a_1, \dots, a_n \leqslant \kappa$ takvi da je $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{a_i}^{-1}(I_{a_i})$, pri čemu su $I_{a_i} \subset [0,1]$ otvoreni podskupovi od $[0,1]$. Budući da je skup periodičnih točaka od T gust u $[0,1]$, za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ postoji periodična točka t_{a_i} od T u I_{a_i}. Neka je $(x_a)_{a \leqslant \kappa}$ točka od X definirana kao $x_{a_i} = t_{a_i}$ za $i \in \{1, \dots, n\}$ i $x_a = 0$ za $a \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, $a \leqslant \kappa$. Tada je $(x_a)_{a \leqslant \kappa}$ periodična točka od f i leži u skupu U. □

Definicija 8.13. Preslikavanje $f : X \to X$ zove se **egzaktno** ili **lokalno završno surjektivno** ako za svaki otvoreni skup $U \subseteq X$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f^n(U) = X$.

Jednostavno se vidi da je egzaktno preslikavanje tranzitivno. Primijetimo da su šatorsko preslikavanje T i preslikavanje f iz dokaza propozicije 8.10 ustvari egzaktna.

9 Teorija tiještenja

Definicija 9.1. Neka je $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ i $f : I \to I$ neprekidna funkcija. Za funkciju f kažemo da je **unimodalna** ako je $f(0) = f(1) = 0$ i postoji jedinstvena točka $c \in (0,1)$ takva da je $f|_{[0,c]}$ rastuća i $f|_{[c,1]}$ padajuća.

Funkcije F_μ kvadratne familije su unimodalne za $0 < \mu \leqslant 4$. Primijetimo da je za unimodalne funkcije orbita točke c sadržana u I.

Definicija 9.2. Neka je $f : I \to I$ unimodalna funkcija i $x \in I$ točka. **Itinerer od** x **za** f je niz $S(x) = s_0 s_1 \dots s_n \dots$ za koji je

$$s_n = \begin{cases} 0, & f^n(x) < c, \\ 1, & f^n(x) > c, \\ C, & f^n(x) = c. \end{cases}$$

Definicija 9.3. Neka je $f : I \to I$ unimodalna funkcija. Itinerer točke $f(c)$ zove se **niz tiještenja** i označava $K(f)$, tj. $K(f) = S(f(c))$.

Primjer 9.4. Za sve unimodalne funkcije kvadratne familije vrijedi $c = \frac{1}{2}$.

Za $F_4(x) = 4x(1-x)$ vrijedi $F_4(c) = 1$ i $F^n(c) = 0$ za sve $n > 1$. Zato je $K(F_4) = 10^\infty$.

Za $F_2(x) = 2x(1-x)$ vrijedi $F_2^n(c) = c$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Zato je $K(F_2) = C^\infty$.

Za $\mu \in (1,2)$ vrijedi $K(F_\mu) = 0^\infty$. Za svaki $x \in [0,c)$ vrijedi $S(x) = 0^\infty$, a za svaki $x \in (c,1]$ vrijedi $S(x) = 10^\infty$.

Za $\mu \in (2,3)$ vrijedi $K(F_\mu) = 1^\infty$. Za svaki $x \in [0,c)$ vrijedi

$$S(x) \in \{0^\infty, 0^n 1^\infty, 0^n C 1^\infty : n \in \mathbb{N}\},$$

a za svaki $x \in (c,1]$ vrijedi

$$S(x) \in \{1^\infty, 10^\infty, 10^n 1^\infty, 10^n C 1^\infty, 1C1^\infty : n \in \mathbb{N}\}.$$

Primijetimo da itinerer $S(x)$ točke $x \in I$ za unimodalnu funkciju f ima slijedeće svojstvo: Ako je $s_n = C$, onda je $s_{n+i} = k_i$ za sve $i \in \mathbb{N}$, pri čemu je $K(f) = k_1 k_2 k_3 \ldots$.

Definicija 9.5. Neka su $\overrightarrow{s} = s_0 s_1 s_2 \ldots$ i $\overrightarrow{t} = t_0 t_1 t_2 \ldots$ nizovi. Kažemo da $\overrightarrow{s}$ i $\overrightarrow{t}$ imaju **odstupanje** ili **neslaganje** n ako je $s_i = t_i$ za $0 \leqslant i < n$ i $s_n \neq t_n$.

Neka je $\overrightarrow{s} = s_0 s_1 s_2 \ldots$ niz i $n \in \mathbb{N}$. Broj jedinica u početnom dijelu $s_0 \ldots s_n$ označavamo $\tau_n(\overrightarrow{s})$.

Neka je f unimodalna funkcija, $x \in I$ i $\overrightarrow{s} = S(x) = s_0 s_1 s_2 \ldots$. Ako je $s_0 = 1$ onda je $x \in (c,1]$ i $f|_{(c,1]}$ je padajuća, a ako je $s_0 = 0$ onda je $x \in [0,c)$ i $f|_{[0,c)}$ je rastuća. Budući da je kompozicija dvije padajuće ili dvije rastuće funkcije rastuća funkcija, a kompozicija padajuće i rastuće funkcije padajuća funkcija, lako se vidi da ako je $\tau_{n-1}(\overrightarrow{s})$ paran, onda postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $f^n|_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}$ rastuća, a ako je $\tau_{n-1}(\overrightarrow{s})$ neparan, onda postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $f^n|_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}$ padajuća.

Definicija 9.6. Definiramo $0 \prec C \prec 1$. Neka su $\overrightarrow{s}$ i $\overrightarrow{t}$ nizovi. Pretpostavimo da je odstupanje od $\overrightarrow{s}$ i $\overrightarrow{t}$ jednako n. Kažemo da je $\overrightarrow{s} \prec \overrightarrow{t}$ ako je ili $\tau_{n-1}(\overrightarrow{s})$ paran i $s_n < t_n$ ili $\tau_{n-1}(\overrightarrow{s})$ neparan i $s_n > t_n$. Kažemo da je $\overrightarrow{s} \preceq \overrightarrow{t}$ ako je ili $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{t}$ ili $\overrightarrow{s} \prec \overrightarrow{t}$.

Teorem 9.7. *Neka je $f : I \to I$ unimodalna funkcija i $x, y \in I$.*

(1) Ako je $S(x) \prec S(y)$, tada je $x < y$.

(2) Ako je $x < y$, tada je $S(x) \preceq S(y)$.

Primijetimo da se jednakost u dijelu (2) ne može izbjeći, jer postojanje privlačne periodične točke obični implicira postojanje intervala čije sve točke imaju isti itinerer.

Dokaz. Dokazat ćemo dio (1), a dio (2) onda slijedi direktno.

Neka je $S(x) = s_0s_1s_2\dots$ i $S(y) = t_0t_1t_2\dots$. Teorem dokazujemo indukcijom po n, pri čemu je n odstupanje od $S(x)$ i $S(y)$.

Ako je $n = 0$, tvrdnja slijedi, jer je $0 \prec C \prec 1$ i $0 < c = \frac{1}{2} < 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za odstupanje $n-1$ i dokažimo ju za odstupanje n.

Pretpostavimo da je $S(x) \prec S(y)$. Razmotrimo $S(f(x)) = s_1s_2s_3\dots$ i $S(f(y)) = t_1t_2t_3\dots$. Općento možemo imati tri slučaja: $s_0 = C$, $s_0 = 0$ i $s_0 = 1$. Ukoliko je $s_0 = C$, jer je $n > 0$ vrijedi $t_0 = C$ pa su $x = y = c$ i $S(x) = S(y)$, što je u suprotnosti s pretpostavkom $S(x) \prec S(y)$. Dakle, imamo dva slučaja: $s_0 = 0$ i $s_0 = 1$.

Pretpostavimo da je $s_0 = 0$. Tada je $S(f(x)) \prec S(f(y))$, jer se broj jedinica prije odstupanja nije promijenio. Budući da je odstupanje od $S(f(x))$ i $S(f(y))$ jednako $n-1$, po pretpostavci indukcij vrijedi $f(x) < f(y)$. Jer je $f|_{[0,c)}$ rastuća, vrijedi $x < y$.

Ako je $s_0 = 1$, tada je $S(f(y)) \prec S(f(x))$, jer je u $s_1 \dots s_n$ jedna jedinica manje nego u $s_0s_1\dots s_n$. Zato je, po pretpostavci indukcije, $f(y) < f(x)$, no kako je $f|_{(c,1]}$ padajuća, vrijedi $x < y$. □

Definicija 9.8. Neka je $f : I \to I$ unimodalna funkcija. Kažemo da je niz $\overrightarrow{s}$ **dopustiv** za f ako postoji $x \in I$ takav da je $S(x) = \overrightarrow{s}$. Skup svih dopustivih nizova za f označavat ćemo Σ_f.

Cilj nam je naći metodu koja daje sve nizove u Σ_f. Ključ metode je niz tiještenja.

Budući da je $f(c)$ maksimum od f, vrijedi $f^n(x) \leqslant f(c)$ za sve $x \in I$ i za sve $n \in \mathbb{N}$. Zato za $\overrightarrow{s} \in \Sigma_f$ vrijedi $\sigma^n(\overrightarrow{s}) \preceq K(f)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, to je nužni uvijet koji mora zadovoljavati svaki niz u Σ_f. Taj uvijet nije dovoljan, što možemo vidjeti iz slijedećeg primjera:

Primjer 9.9. Za $F_4(x) = 4x(1-x)$ vrijedi $K(F_4) = 10^\infty$. Jedina praslika točke 1 je c pa je jedini niz koji se preslika u 10^∞ niz $C10^\infty$. Dakle, nizovi oblika $\overrightarrow{t^n} = 0^n10^\infty$, $n \in \mathbb{N}$, nisu dopustivi iako vrijedi $\sigma^i(\overrightarrow{t^n}) \preceq K(F_4)$.

Definicija 9.10. Itinerer $S(x)$ zovemo **regularan** ako je $s_n \neq C$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Primijetimo da ako c nije periodična točka za unimodalnu funkciju f, onda je $K(f)$ regularan, a ako je c periodična osnovnog perioda k, onda $K(f) = (s_0 \dots s_{k-2}C)^\infty$ nije regularan.

Modificirat ćemo definiciju niza tiještenja tako da $K(f)$ bude regularan i u slučaju kada je c periodična točka za f.

Prvo primijetimo da ako je $f(c) \leqslant c$, tada je dinamika unimodalne funkcije f veoma jednostavna, kao što smo mogli vidjeti na primjerima F_μ za $0 < \mu \leqslant 2$. Pretpostavimo da je $f(c) > c$ i da je c periodična za f s osnovnim periodom k. Neka je $\mathcal{O}(c) = \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$, pri čemu je $x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} = f(c)$. Označimo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k-2$. Jer je $c = x_j$ za neki $j \in 0, \dots, k-2$, $f|_{I_i}$ je monotona za svaki $i = 0, \dots, k-2$. Također, postoji $\varepsilon > 0$ takav da za $I_\varepsilon = [f(c) - \varepsilon, f(c)]$ vrijedi:

1. $I_\varepsilon \subset I_{k-2}$,

2. $\forall\ j \in \{1, \dots, k-1\}$, $\exists\ m_j \in \{0, \dots, k-3\}$ takav da $f^j(I_\varepsilon) \subset I_{m_j}$,

3. $f^k(I_\varepsilon) \subset I_{k-2}$.

Jer je $f^k(f(c)) = f(c)$ veća krajnja točka i od $f^k(I_\varepsilon)$ i od I_{k-2}, f^k čuva uređaj na I_ε. Zato za svaki $x \in \operatorname{Int} I_\varepsilon$ i $S(x) = s_0 \dots s_{k-1}s_k \dots$ vrijedi da je $\tau_{k-1}(S(x))$ paran. Jer je $K(f) = S(f(c))$, modificirana definicija niza tiještenja je $K'(f) = (s_0 \dots s_{k-1})^\infty$. Primijetimo da ako je $K(f) = (s_0 \dots s_{k-2}C)^\infty$, tada za $K'(f)$ treba samo simbol C zamijeniti simbolom $s_{k-1} \in \{0,1\}$ tako da je broj jedinica u riječi $s_0 \dots s_{k-1}$ paran. Na taj način smo dobili niz tiještenja koji je regularan niz. Analogno, za svaki $x \in I$ za koji postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f^n(x) = c$ i zato $S(x) = s_0 \dots s_{n-1}C(s_{n+1} \dots s_{n+k-1}C)^\infty$, modificiramo njegov itinerer da bude $S'(x) = s_0 \dots s_{n-1}C(s_{n+1} \dots s_{n+k-1}s_{n+k})^\infty$, pri čemu je $(s_{n+1} \dots s_{n+k-1}s_{n+k})^\infty = K'(f)$. Ukoliko je $x \in I$ takav da je $S(x)$ regularan, tada $S'(x) = S(x)$.

U nastavku ćemo zbog jednostavnosti sve itinerere i nizove tiještenja označavati sa $S(x)$ i $K(f)$, redom, a podrazumijevat ćemo da je $K(f)$ regularan i da $S(x)$ ima najviše na jednoj koordinati simbol C, tj. da su svi nizovi modificirani.

Teorem 9.11. *Neka je $f : I \to I$ unimodalna funkcija. Ako je $\overrightarrow{t}$ niz za koji je $\sigma^n(\overrightarrow{t}) \prec K(f)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada postoji $x \in I$ takav da je $S(x) = \overrightarrow{t}$, tj. $\overrightarrow{t} \in \Sigma_f$.*

Da bismo dokazali teorem, trebaju nam slijedeće dvije leme:

Lema 9.12. *(1) Neka je $\overrightarrow{u} = u_0u_1 \dots u_n \dots$ i $u_i \neq C$ za $i = 0, \dots, n$. Tada je skup $\{x \in I : s_i(x) = u_i, i = 1, \dots, n\}$ otvoren u I, gdje je $S(x) = s_1(x)s_2(x) \dots s_n(x) \dots$.*

(2) Neka je $\overrightarrow{u} = u_0u_1 \dots u_n \dots$, $0 \leqslant m \leqslant n$ i $u_m = C$. Tada je skup $\{x \in I : s_m(x) \in \{0, C, 1\},\ s_i(x) = u_i, i = 1, \dots, n,\ i \neq m\}$ otvoren u I.

Dokaz. (1) Neka je $y \in I$ takav da je $S(y) = \overrightarrow{u}$. Za svaki $i = 0, \dots, n$, neka je V^i najveća otvorena okolina od y za koju $f^i(V^i)$ ne sadrži c. Takve okoline postoje, jer su $u_i \neq C$ za sve $i = 0, \ldots, n$. Neka je $V = \bigcap_{i=0}^{n} V^i$. Skup V je neprazan (jer svaki V^i sadrži y) i otvoren (kao konačan presjek otvorenih skupova) te je V traženi skup.

(2) Primijetimo da ako postoji $y \in I$ takav da je $S(y) = \overrightarrow{u}$ (tj. dani skup je neprazan), tada je $s_i(x) \neq C$ za $i = 1, \ldots, n$, $i \neq m$, pa možemo definirati skupove V^i, $i \neq m$, kao u prvom dijelu dokaza. Budući da je $s_m(x) \in \{0, C, 1\}$, možemo definirati $V^m = I$. Tada je skup $V = \bigcap_{i=0}^{n} V^i$ traženi skup koji je neprazan i otvoren. □

Lema 9.13. *Neka su $\overrightarrow{s}$ i $\overrightarrow{t}$ dva niza s odstupanjem $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\overrightarrow{s} \prec \overrightarrow{t}$ ako i samo ako je $s_0 \ldots s_n$ paran.*

Dokaz. Budući da je odstupanje n vrijedi $s_0 \ldots s_{n-1} = t_0 \ldots t_{n-1}$ i $s_n \neq t_n$. $\overrightarrow{s} \prec \overrightarrow{t}$ je ekvivalentno sa slijedećom tvrdnjom: Ili je $s_0 \ldots s_{n-1}$ paran i $s_n = 0$, ili je $s_0 \ldots s_{n-1}$ neparan i $s_n = 1$. U oba slučaja je $s_0 \ldots s_n$ paran. □

Dokaz teorema 9.11. Ako je $\overrightarrow{t} = 0^\infty$ ili $\overrightarrow{t} = 10^\infty$, tada tvrdnja očigledno vrijedi, jer $S(0) = 0^\infty$ i $S(1) = 10^\infty$. Pretpostavimo zato $\overrightarrow{t} \neq 0^\infty$ i $\overrightarrow{t} \neq 10^\infty$. Definiramo $L_t = \{x \in I : S(x) \prec \overrightarrow{t}\}$ i $R_t = \{x \in I : \overrightarrow{t} \prec S(x)\}$. Jer je $0 \in L_t$ i $1 \in R_t$, L_t i R_t su neprazni. Dokazat ćemo da su L_t i R_t otvoreni u I, tj. dokazat ćemo da je L_t otvoren, a dokaz za R_t je sličan.

Neka je $z \in L_t$ i $S(z) = \overrightarrow{s} = s_0 s_1 s_2 \cdots \prec \overrightarrow{t}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ odstupanje od $\overrightarrow{s}$ i $\overrightarrow{t}$, $s_n \neq t_n$. Primijetimo da $t_i \neq C$ za svaki $i \in \mathbb{N}_0$, jer $t_i = C$ povlači $\sigma^{i+1}(\overrightarrow{t}) = K(f)$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je $\sigma^j(\overrightarrow{t}) \prec K(f)$, za svaki $j \in \mathbb{N}$. Dakle, $t_n \neq C$. Pretpostavimo da je $t_n = 1$ (dokaz za slučaj $t_n = 0$ je sličan).

Budući da je $s_n \neq t_n$, vrijedi ili $s_n = 0$, ili $s_n = C$. Pretpostavimo prvo $s_n = 0$. Jer $s_i = t_i \neq C$ za $i = 0, \ldots, n-1$ i $s_n \neq C$, po lemi 9.12 (1) je skup $V = \{x \in I : s_i(x) = s_i,\ i = 0, \ldots, n\}$ otvoren u I i za svaki $x \in V$ vrijedi $S(x) \prec \overrightarrow{t}$. Dakle $V \subseteq L_t$ pa je L_t otvoren.

Pretpostavimo sada da je $s_n = C$. Tada je $\sigma^{n+1}(\overrightarrow{s}) = s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3} \cdots = K(f)$. Jer je $\sigma^{n+1}(\overrightarrow{t}) \neq K(f)$, postoji odstupanje $n + m \in \mathbb{N}$ od $\sigma^{n+1}(\overrightarrow{s})$

i $\sigma^{n+1}(\overrightarrow{t})$, tj. $s_{n+m} \neq t_{n+m}$. Primijetimo da je $s_{n+i} \neq C$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, jer je $K(f)$ regularan. Neka je $V = \{x \in I : s_n(x) \in \{0, C, 1\},\ s_i(x) = s_i,\ i = 0, \ldots, n+m,\ i \neq n\}$. Primijetimo prvo da V sadrži z, jer s_n može biti C, i da je otvoren po lemi 9.12 (2). Još želimo dokazati da je $S(x) \prec \overrightarrow{t}$ za svaki $x \in V$.

Neka je $x \in V$ i $S(x) = s_0 s_1 \ldots s_{n-1} v_n s_{n+1} \ldots s_{n+m} v_{n+m+1} \ldots$, pri čemu je $v_n \in \{0, C, 1\}$, $s_{n+1} \ldots s_{n+m} = k_1 \ldots k_m$ uz $K(f) = k_1 k_2 \ldots$ i $v_{n+m+i} \in \{0, 1\}$ za $i \in \mathbb{N}$. Jer je $s_0 \ldots s_{n-1} = t_0 \ldots t_{n-1}$, $C = s_n \neq t_n = 1$ i $\overrightarrow{s} \prec \overrightarrow{t}$, iz leme 9.13 zaključujemo da je $s_0 \ldots s_{n-1}$ paran. Zato za $v_n \in \{0, C\}$ zaista vrijedi $S(x) \prec \overrightarrow{t}$. Pretpostavimo sada da je $v_n = 1$. Tada je $s_0 \ldots s_{n+m-1} = t_0 \ldots t_{n+m-1}$ i $s_{n+m} \neq t_{n+m}$. Jer je $t_{n+1} \ldots t_{n+m-1} t_{n+m} t_{n+m+1} \cdots = \sigma^{n+1}(\overrightarrow{t}) \prec K(f) = s_{n+1} \ldots s_{n+m-1} s_{n+m} s_{n+m+1} \ldots$, opet iz leme 9.13 zaključujemo da je $s_{n+1} \ldots s_{n+m-1} s_{n+m}$ neparan. Iz toga slijedi da je $s_0 s_1 \ldots s_{n-1} v_n s_{n+1} \ldots s_{n+m}$ paran pa je $S(x) \prec \overrightarrow{t}$. Dakle, $V \subseteq L_t$ pa je L_t otvoren.

Slično možemo dokazati i da je R_t otvoren. Jer je $L_t \cap R_t = \emptyset$, postoji neprazan zatvoren skup u I (može biti i degeneriran, tj. koji se sastoji od samo jedne točke) čije sve točke imaju itinerer $\overrightarrow{t}$ pa je teorem dokazan. $\square$