Ortog. aproks. imaju tu prednost da koeficijenti za aproks. do nekog stupnja ostaju isti i za slijedeći stupanj - pa treba računati samo jedan novi koef - i to najviši - pri povećanju stupnja polinoma.

Ovo svojstvo važi za sve ortogonalne aproksimacije.

4.1.6. Forsythe-ov algoritam

Vidjeli smo da za ekvidistantnu mrežu ne treba posebno generirati ortogonalne polinome na bazi nekih rekurzivnih formula, jer postoje eksplicitne formule.

Ako mreža nije ekvidistantna, onda treba generirati redom ortogonalne polinome.
Pošto su ortogonalni polinomi zadovoljavaju tročlane homogene rekurzije oblika

$$p_{j+1}(x) = (x - \alpha_{j}) p_j(x) - \beta_j p_{j-1}(x)$$

dovoljno je iz uvjeta ortogonalnosti na zadanoj mreži nalaziti koeficijente β_j, α_{j+1} da nađemo novi polinom.

Za to postoji vrlo elegantan algoritam koji u kombinaciji sa generaliziranom Hornerovom shemom odmah daje vrlo efikasan algoritam za nalaženje polinoma po metodi najmanjih kvadrata.

- Algoritam se zove Forsythe-ov po George E. Forsythe-u koji ga je pronašao 1957. g.

Algoritam se sastoji iz 2 faze:

1. faza: generiranje ortogonalnih polinoma
2. faza: računanje koeficijenata aproksimacije

- Po prvi puta još uvodimo i općenitiji oblik metode najmanjih kvadrata u kome je svakom podatku pridjeljena i određena težina koja govori o tome koliko jaki utjecaj želimo da taj podatak ima na finalni rezultat, a uvodi se iz statističkih razloga da se uključi i sigurnost odn. pouzdanost podatka u aproksimaciju, jer se u praksi podaci najčešće dobivaju mjerenjima i statističkom analizom tih mjerenja.

Težine će p imati posebnu, vrlo bitnu ulogu u neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, pa ih sada uvodimo zbog analogije.

– Zadan je skup podataka – točaka

(1) $$(x_i, y_i) \quad , i = 1, \ldots, n$$

s težinama $$w_i \quad , i = 1, \ldots, n$$

– Taj niz podataka želimo aproksimirati polinomom p stupnja m, kojeg želimo prikazati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma na toj mreži $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uz zadane težine. Dakle, tražimo polinom – funkciju $p \in X$ u formi

(2) $$p = \sum_{j=0}^{m} a_j P_j$$

gdje su $P_0, \ldots, P_m$ ortogonalni polinomi na toj mreži tj. vrijedi:

(3) $$\langle P_k, P_l \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i P_k(x_i) P_l(x_i) = 0$$ ako je $k \neq l$

(tj. težine, naravno, ulaze i u skal. produkt).

– Takav niz polinoma generiran je slijedećom rekurzijom:

(4) $$P_k(x) = (x - \alpha_{k-1}) P_{k-1}(x) - \beta_{k-1} P_{k-2}(x)$$ za $k = 1, 2, \ldots, m$

uz početak $$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1$$

(možemo krenuti od $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - \alpha_0$, ali onda treba prvo naći α_0).

– Za koeficijente $\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}$ vrijede ove formule:

(5) $$\alpha_{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i P_{k-1}^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i P_{k-1}^2(x_i)} \quad , k = 1, \ldots, m$$

ili $$\alpha_{k-1} = \frac{\langle id \cdot P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}$$, gdje je id identiteta $id(x) = x$

(6)
$$\beta_{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i P_{k-1}(x_i) P_{k-2}(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i P_{k-2}^2(x_i)}, \quad k = 2, \dots, m$$

ili
$$\beta_{k-1} = \frac{\langle id \cdot P_{k-1}, P_{k-2} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle}.$$

(Relacije (5), (6) se direktno dobivaju primjenom ortogonalnosti u relaciji (4)).

- Koeficijenti a_j u razvoju aproksimacione funkcije su dani sa:

(7)
$$a_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i P_j(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i P_j^2(x_i)}, \quad j = 0, \dots, m$$

ili
$$a_j = \frac{\langle y, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} \quad \text{(isti kao i ranije !)}.$$

- Kad smo jednom našli sve koeficijente $a_0, \dots, a_m$ onda se računanje aproksimacije $p(x)$ u raznim točkama x provodi generaliziranom Hornerovom shemom, pa nije dovoljno vratiti samo a_j, već treba vratiti i koeficijente α_k, β_k iz rekurzije.

- Pokažimo na primjeru kako ide primjena ovog algoritma

Primjer: (detekcija polinoma)

Uzmimo polinom $y(x) = x^2 + 4x + 7$ i tabeliramo ga u točkama $x_i = 0 + (i-1) \cdot \frac{1}{2}$, $i = 1, \dots, 5$

Tablica je:

x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	7	9.25	12	15.25	19

i perturbiramo malo ove podatke za 0.5 i 1.5 u

x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	7	9.3	12	15.2	19

Za sve težine uzimamo 1, $w_i = 1$, jer su svi polazni podaci bili jednako pouzdani.

Tražimo aproksimacije polinomima po metodi najmanjih kvadrata, s tim da očekujemo da kvadratni polinom više nema grešku Ø, zbog perturbacija.

Redom je: $P_0(x)=1$, i definiramo $\beta_0=0$.

- Računamo P_1:

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot 1}{\sum 1} = \frac{1}{5}\cdot \sum x_i = \frac{5}{5} = \underline{1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{P_1(x) = x-1}\,.$$

- Računamo P_2:

$$\beta_1 = \frac{\sum x_i P_1(x_i)\cdot 1}{\sum 1^2} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i(x_i-1)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\left(0\cdot(-1) + \underbrace{0.5\cdot(-0.5)}_{-0.25} + 1\cdot 0 + \underbrace{1.5\cdot(0.5)}_{0.75} + \underbrace{2\cdot 1}_{2}\right)$$

$$= \frac{2.5}{5} = \underline{\underline{0.5}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i P_1^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{5} P_1^2(x_i)} = \frac{\overbrace{0\cdot 1}^{0} + \overbrace{0.5\cdot(0.25)}^{0.125} + \overbrace{1\cdot 0}^{0} + \overbrace{1.5\cdot(0.25)}^{0.375} + \overbrace{2\cdot 1}^{2}}{1 + 0.25 + 0 + 0.25 + 1}$$

$$= \frac{2.5}{2.5} = \underline{\underline{1}}$$

$$\Rightarrow \quad P_2(x) = (x-1)\cdot \underbrace{P_1(x)}_{(x-1)} - 0.5\cdot \underbrace{P_0(x)}_{1} = x^2-2x+1-0.5$$

$$\underline{\underline{P_2(x) = x^2-2x+0.5}}$$

Pogledajmo ~~greške~~ vrijednosti ovih polinoma u čvorovima

x_i	$p_0(x_i)$	$p_1(x_i)$	$p_2(x_i)$
0	1	-1	0.5
0.5	1	-0.5	-0.25
1	1	0	-0.5
1.5	1	0.5	-0.25
2	1	1	0.5

pa vidimo simetričnost raspodjele, a suma grešaka je Ø.

Nađimo još koeficijente u razvoju a_0, a_1, a_2

$$a_0 = \frac{\sum y_i}{\sum 1} = \frac{1}{5}\sum y_i = \frac{62.5}{5} = \underline{\underline{12.5}}$$

$$a_1 = \frac{\sum y_i P_1(x_i)}{\sum P_1^2(x_i)} = \frac{-7 - \overset{4.65}{9.3/2} + 0 + \overset{7.6}{15.2/2} + 19}{2.5 \quad \text{(već imali)}} = \frac{14.95}{2.5}$$

$$= \underline{\underline{5.98}}$$

$$a_2 = \frac{\sum y_i P_2(x_i)}{\sum P_2^2(x_i)} = \frac{\overset{3.5}{\frac{7}{2}} - \overset{2.325}{\frac{9.3}{4}} - \overset{6}{\frac{12}{2}} - \overset{3.8}{\frac{15.2}{4}} + \overset{9.5}{\frac{19}{2}} = 0.875}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8} = 0.875}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

$\Rightarrow$ Aproksimacija:

0. stupnja je: $p_0 = a_0 P_0 = \underline{\underline{12.5}}$

1. stupnja je: $p_1 = p_0 + a_1 P_1 = 12.5 + 5.98(x-1) = \underline{\underline{5.98x + 6.52}}$

2. stupnja je: $p_2 = p_1 + a_2 P_2 = 5.98x + 6.52 + 1(x^2 - 2x + 0.5) = \underline{\underline{x^2 + 3.98x + 7.02}}$

pa je p_2 i po koeficijentima vrlo točno.

– Pripadne sume kvadrata aps. grešaka su:

$S_0 = 91.155$

$S_1 = 0.879$

$S_2 = 0.004$ → odavde zaključujemo da je nješ o blago perturb. podacima u kvad pol.

a tablice funkcijskih vrijednosti:

x_i	y_i	$p_0(x_i)$	$p_1(x_i)$	$p_2(x_i)$
0	7	12.5	6.52	7.02
0.5	9.3	12.5	9.51	9.26
1	12	12.5	12.5	12.00
1.5	15.2	12.5	15.49	15.24
2	19	12.5	18.48	18.98

jer je S naglo pao. Za S_3 dobili bi ~~pojav~~ još manje ali ne bitno i koef. a_3 bi bio vrlo mali pa stajemo.

Nap. Za S-ove smo mogli koristiti i formulu iz Zad 5.

Ovaj algoritam je vrlo pogodan za iterativno korištenje i testiranje – tj. idemo tako daleko podizati stupanj dok nam S ne padne dovoljno nisko – i onda stajemo, a prava pogodnost je i opet to što za novi stupanj treba izračunati samo jedan koeficijent – onaj uz najviši (tj. novi) polinom u razvoju, a svi ostali su isti.

Zadatak 6. Formuliraj algoritam i potprogram za Forsythe-ov algoritam u varijanti sa fiksnim stupnjem, i u varijanti sa podizanjem stupnja sve dok S ne padne ispod zadanog praga. (tada treba vratiti i stupanj!) (tzv. delecija polinoma)
Obrati pažnju na to da treba vratiti i koef. α, β za kasnije izvrednjavanje.
Također organiziraj efikasno korištenje memorije za vrijednosti $P_k(x_i)$. Koliko polja je neophodno potrebno.

Zadatak 7. Usporedi broj operacija za MLS direktno polinomom (na pr. uz Gauss-eliminaciju sa ili bez pivotiranja) i za MLS diskretnom ortogonalnošću. Posebno usporedi broj operacija za pravac i parabolu ($m = 1, 2$).

Napomena: MLS se vrlo često koristi i za tzv. izglađivanje podataka – ~~dobi~~ originalni podaci se zamjenjuju izračunatima po MLS. Treba paziti na preciznost aproksimacije – da zaista izgladimo nebitne oscilacije u podacima (tj. šum), a ne i bitni dio pojave.

na pr.