Imam $n!$ jednako vjeroj. perm. $(p_1, \dots, p_n)$ skupa $\{1, \dots, n\}$.

Izaberem elem. j s vjeroj. $p_{j,n}$.

Sad je $j \in \{1, \dots, n\}$ fiksan, i on ide na $A[j]$.

Obzirom na to da je j mogao biti $p_1 = j, p_2 = j, \dots, p_n = j$ (na n mog. mjesta) imam n polaznih perm. koje generiraju ostatak bez j

$p_1', \dots, p_{n-1}'$

$p_k' \neq j$, $k = 1, \dots, n-1$

Svaka od njih ima vjeroj. $\frac{1}{(n-1)!}$

$$q_1, \dots, q_{j-1} \qquad q_{j+1}, \dots, q_n$$

q iz p' može nastati s

$k = 0$ zamjena

$k = 1$ zamjenom

$\vdots$

$k = \min\{j-1, n-j\}$ zamjena.

Tih k mjesta zamjene mogu odabrati na

$\binom{j-1}{k}$ načina u prvom bloku $\to \{i_1, \dots, i_k\} \in \{1, \dots, j-1\}$ uzlazno $i_1 < \dots < i_k$

$\binom{n-j}{k}$ — " — drugom bloku $(i_1', \dots, i_k') \in \{j+1, \dots, n\}$ $i_1' > \dots > i_k'$

Zbog načina kako radi partition zamjene su $i_1 \Leftrightarrow i_1'$, $i_2 \Leftrightarrow i_2'$, ..., $i_k \Leftrightarrow i_k'$

(Fiksiram k i ta 2 skupa $\to$ jednoznačno restauriram p')

Dakle, ovoj perm. q odgovara

$$\sum_{k=0}^{\min\{j-1, n-j\}} \binom{j-1}{k}\binom{n-j}{k}$$

<u>različitih</u> polaznih perm. p'.

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

No,
$$\sum_{k=0}^{\min\{j-1, n-j\}} \binom{j-1}{k}\binom{n-j}{k} \overset{*}{=} \binom{n-1}{j-1}$$
ili $n-j$

Dakle, 1 perm. q odgovara $\binom{n-1}{j-1} = \binom{n-1}{n-j}$ perm. p' ②

Različitih q perm. ima $\underbrace{(j-1)!}_{\text{prvi dio}} \cdot \underbrace{(n-j)!}_{\text{drugi dio}}$

pa pripadnih p' ima

$$(j-1)!\,(n-j)! \cdot \binom{n-1}{j-1} =$$
$$(j-1)!\,(n-j)! \frac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-j)!} = \underline{\underline{(n-1)!}}$$

točno kako i treba.

- Finale : SVAKI $q \Longleftrightarrow \binom{n-1}{j-1}$ polaznih p', a svi oni su jednako vjerojatni

$\Rightarrow$ svi q su jednako vjerojatni.

Komb. interpretacija

U preostalih $n-1$ elem. je
točno $j-1$ manjih od j (M) $\quad M + \check{Z} = n-1$
točno $n-j$ većih od j ($\check{Z}$)

Uzmem bilo koji podskup od $j-1$ elemenata
Iz njega napravim podskup koji ima jednak broj
onih manjih od j (M) i onih većih od j ($\check{Z}$)

- Ako sam izabrao k većih od j ($\check{Z}$) [ti su krivi u prvom dijelu]
onda imam $j-1-k$ manjih od j (M) [pravi u prvom]
- To znači da u moj skup od $j-1$ elem. NISAM izabrao (ostalo je VANI) $\underset{\substack{\text{uk. br.}\\ \text{manjih}\\ \text{(M)}}}{(j-1)} - \underbrace{(j-1-k)}_{\substack{\text{izabrani}\\ \text{manji}\\ \text{(M)}}} = \underset{\substack{\text{neizabrani}\\ \text{M}}}{k}$
- Sad vežem:
k izabranih većih ($\check{Z}$) s k neizabranih manjih (M)
i to je ono što particiju mijenja !!