OAA 2012/2013 – 1. kolokvij
rješenja

Zad 1.

(A) Broj izvršavanja navedbe $x = x+1$ je $S(n)$, gdje je

$$S(n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} 1 = \sum_{j=1}^{n} i \quad , \text{ s tim da } i \text{ ovisi o } j \to \text{oznaka } i_j$$

$$S(n) = \sum_{j=1}^{n} i_j .$$ Rekurzija za i_j: $i_1 = 1$ (početak prvog prolaza)

$i_j = 2 \cdot i_{j-1}$ (ili $i_{j+1} = 2 \cdot i_j$)

pa je $i_j = 2^{j-1}$, za $j = 1, \ldots, n$.

Onda $$S(n) = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} = 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = \underline{\underline{2^n - 1}}$$

Dakle, $\boxed{S(n) \in \Theta(2^n)}$

(B) Kao gore, neka je $S(n)$ broj izvršavanja navedbe $x = x+1$.

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j} \sum_{k=1}^{i} 1 \quad , \text{ gdje } j \text{ ovisi o } i. \text{ Očito, } \sum_{k=1}^{i} 1 = i.$$

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j} i = (i \text{ ne ovisi o } j, \text{ nego obratno}) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \sum_{j} 1$$

Indeks j ovisi o i ovako (= broj prolaza kroz while, za dani i):
Za dani i, uzmimo da je broj prolaza kroz while jednak m_i.

prolaz:	1	2	3	....	m
pripadni j:	1	$1+i$	$1+2i$		$1+(m-1)\cdot i$

s tim da je $1+(m-1)\cdot i \le n$ (uvjet while), a uvjet za prekid (stop) je

$$1 + m \cdot i > n \quad \Rightarrow \quad m \cdot i > n-1 \quad (\text{ali – cijeli brojevi})$$

$$m \cdot i \geq n$$

odakle slijedi $$m \geq \frac{n}{i}$$ (i m je cijeli broj i najmanji takav)

$$\Rightarrow \quad m_i = \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil .$$

No, onda je $\sum_{j} 1 =$ broj prolaza kroz while $= m_i = \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil$, pa je

$$S(n) = \sum_{j=1}^{n} i \cdot \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil \approx \sum_{j=1}^{n} i \cdot \frac{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} n = n^2$$ (približno) i to s donje strane

Dakle, $\boxed{S(n) = \Theta(n^2)}$

Pedantnija analiza koristi ograde za gornje cijelo

$$\ell \leq \lceil \ell \rceil < \ell + 1$$

Ocjena $S(n)$ odozdo:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil \geq \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} n = n^2.$$

Ocjena $S(n)$ odozgo

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil < \sum_{i=1}^{n} i \cdot \left(\frac{n}{i} + 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} (n+i) = n^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$$

Iz ograda

$$n^2 \leq S(n) \leq \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$$

odmah slijedi

$$\boxed{S(n) = \Theta(n^2)}$$

<u>Napomena</u>: Za fiksnu vrijednost i, broj izvršavanja $x = x + 1$ može se izračunati i izravno iz algoritma.

Uočiti da pomak $j = j + i$ povećava j točno za i = broj puta koliko se izvrši $x = x + 1$ u petlji po k, pa je j brojač. Treba samo oduzeti početnu vrijednost $j = 1$ (prije petlje). Tj. da smo inicijalizirali $j = 0$, onda bi j bio upravo <u>brojač</u>.

$$\sum_{j} \sum_{k=1}^{i} 1 = \underbrace{\text{završni } j}_{1 + (m-1) \cdot i + i} - \underbrace{\text{početni } j}_{1} = \qquad m \cdot i = \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil \cdot i.$$

Onda je:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil \cdot i.$$

Zad 2. Prvo rješavamo uvjetnu rekurziju

$$T(n) = 4\cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n\cdot \lg n, \quad n = \text{potencija od } 4$$

uz početni uvjet $T(1) = d > 0$.

Supstitucija je $n = 4^k$, ili $k = \log_4 n = \frac{\lg n}{\lg 4} = \frac{1}{2}\lg n$

Oznaka $T(4^k) = t_k$. Izlazi

$$T(4^k) = 4\cdot T(4^{k-1}) + 4^k\cdot \log_2 4^k \qquad (\log_2 4^k = \log_2 2^{2k} = 2k)$$

$$t_k = 4t_{k-1} + \underbrace{2k}_{p_1(k),\ tj.\ d=1}\cdot 4^k, \quad \text{za } k > 0$$

Karakteristična jednadžba homogenizirane rekurzije je

$$(x-4)\cdot(x-4)^2 = (x-4)^3 = 0$$

pa opće rješenje homogenizirane rekurzije ima oblik

$$t_k = c_1\cdot 4^k + c_2\cdot k\cdot 4^k + c_3\cdot k^2 4^k$$

odnosno,

$$T(n) = c_1\cdot n + c_2\cdot n\cdot \log_4 n + c_3\cdot n\cdot \log_4^2 n.$$

Odredimo još konstante c_2, c_3 (uz dio rješenja koji dolazi od nehomogenog dijela polazne rekurzije), uvrštavanjem u polaznu rekurziju (kraće se piše u terminima "k"):

$$c_1\cdot 4^k + c_2\cdot k\cdot 4^k + c_3\cdot k^2\cdot 4^k = 4\left[c_1\cdot 4^{k-1} + c_2\cdot(k-1)\cdot 4^{k-1} + c_3\cdot(k-1)^2\cdot 4^{k-1}\right] + 2k\cdot 4^k$$

$$= c_1\cdot 4^k + c_2\cdot(k-1)\cdot 4^k + c_3(k-1)^2\cdot 4^k + 2k\cdot 4^k$$

Dijeljenjem s 4^k i razvojem po potencijama od k, dobivamo:

$$\cancel{c_1} + \cancel{c_2 k} + \cancel{c_3 k^2} = \cancel{c_1} + c_2(k-1) + c_3(k-1)^2 + 2k$$

$$= \cancel{c_2 k} - c_2 + \cancel{c_3 k^2} - c_3\cdot 2k + c_3 + 2k$$

pa je:

$$(c_3 - c_2) + (c_3 - 1)\cdot 2k = 0, \quad \text{za } \forall k \geq 1$$

Odavde slijedi $\boxed{c_3 = 1}$ i $c_3 = c_2$, pa je i $\boxed{c_2 = 1}$

– Konačno opće rješenje polazne (uvjetne) nehomogene rekurzije je:

$$T(n) = c_1\cdot n + n\cdot\log_4 n + n\cdot \log_4^2 n \qquad \left(\text{ili, uz } \log_4 = \tfrac{1}{2}\lg\right)$$

$$= c_1\cdot n + \frac{1}{2} n\cdot \lg n + \frac{1}{4} n\cdot \lg^2 n$$

– Iz početnog uvjeta $T(1) = d > 0$ izlazi $(\log_4 1 = \log_2 1 = 0)$

$$\boxed{c_1 = d}$$

Dakle, rješenje polazne uvjetne rekurzije je:

$$\boxed{\begin{aligned} T(n) &= d\cdot n + n\cdot \log_4 n + n\cdot \log_4^2 n \\ &= d\cdot n + \frac{1}{2} n \lg n + \frac{1}{4} n\cdot \lg^2 n \end{aligned}}$$

Odavde je očito

$$T(n) \sim n\cdot \log_4^2 n = \frac{1}{4} n\cdot \lg^2 n$$

ili

$$T(n) \in \Theta(n\cdot \log_4^2 n),\ \Theta(n \lg^2 n)$$

uvjetno, za $n=4^k$ $(k\in\mathbb{N})$

(baza logaritma nije bitna, jer su logaritmi u raznim bazama međusobno proporcionalni).

— · —

Sad promatramo zadanu bezuvjetnu rekurziju

$$T(n) = 2\cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{4}\right\rfloor\right) + 2\cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{4}\right\rceil\right) + n\cdot \lg n\ ,\quad n\geq 2$$

uz početne uvjete $T(0)=0$ i $T(1)=d>0$.

Znamo da vrijedi uvjetna asimptotska relacija za $b=4$

$$T(n) \in \Theta(n\cdot \log_4^2 n) \quad = \Theta(n \lg^2 n)$$

Za bezuvjetno proširenje treba pokazati sljedeće dvije stvari

(a) T je asimptotski rastuća (bezuvjetno),

(b) funkcija $g(n) = n\cdot \log_4^2 n$ je 4-glatka (može i 2-glatka).

Za (b), odmah vidimo da je $g(n)$ asimptotski rastuća (preciznije rastuća, čim je $n>1$ – ima dvostruku nultočku za $n=1$), pa je dovoljno dokazati da je

$$g(b\cdot n) \in O(g(n)) \qquad \text{za } b\leq 4.$$

– Ako uzmemo $b=4$ i $g(n) = n\cdot \log_4^2 n$, onda je:

$$g(4n) = 4n\cdot \log_4^2 (4n) = 4\cdot n\cdot (\log_4 4 + \log_4 n)^2 \leq \left\{\begin{matrix}\text{za } n\geq 4 \text{ je} \\ \log_4 4 \leq \log_4 n\end{matrix}\right\}$$

$$\leq 4\cdot n\cdot (2\cdot \log_4 n)^2 = 16\cdot n\cdot \log_4^2 n = 16\cdot g(n) \in O(g(n))\ \text{W}.$$

– Ako uzmemo $b=2$ i $g(n) = n\cdot \lg^2 n$, onda je

$$g(2n) = 2n\cdot \lg^2(2n) = 2n\cdot (\lg 2 + \lg n)^2 \leq \left\{\begin{matrix}\text{za } n\geq 2 \text{ je} \\ \lg 2 \leq \lg n\end{matrix}\right\}$$

$$\leq 2n\,(2\lg n)^2 = 8\cdot n \lg n = 8\cdot g(n) \in O(g(n))\ \text{W}.$$

Još treba dokazati (a) – da je T (bezuvjetno) asimptotski rastuća. To, naravno, ide indukcijom. No, prvo pogledajmo što izlazi (bezuvjetno) za prvih nekoliko vrijednosti od n.

Početni uvjeti su $T(0) = 0$ i $T(1) = d > 0$.

– Za $n = 2, 3$ je $\lfloor n/4 \rfloor = 0$, $\lceil n/4 \rceil = 1$, a za $n = 4$ je $\lfloor n/4 \rfloor = \lceil n/4 \rceil = 1$.

Kad to uvrstimo u bezuvjetnu rekurziju,

$$T(n) = 2 \cdot T(\lfloor n/4 \rfloor) + 2 \cdot T(\lceil n/4 \rceil) + n \cdot \lg n$$

dobivamo:

(dovoljno v. niže) $T(2) = 2 \cdot T(0) + 2 \cdot T(1) + 2 \lg 2 = 2d + 2 \lg 2 > d = T(1)$

ne treba $\begin{cases} T(3) = 2 \cdot T(0) + 2 \cdot T(1) + 3 \lg 3 = 2d + 3 \lg 3 > 2d + 2\lg 2 = T(2) \\ T(4) = 4 \cdot T(1) + 4 \cdot \lg 4 = 4d + 4 \lg 4 > 2d + 3 \lg 3 = T(3). \end{cases}$

Dakle, za $n \leq 4$ sigurno vrijedi $T(n) > T(n-1)$, što je baza ind.

– <u>Korak</u> indukcije: Neka je $n \geq 4$ i pretpostavimo da za svaki m vrijedi:

$$m < n \quad \Rightarrow \quad T(m) \leq T(m+1)$$
$$(\text{ili } m \leq n-1)$$

što je ekvivalentno s: $T(0) \leq \ldots \leq T(n-1) \leq T(n)$.

(Baš ovo imamo u bazi indukcije do $n = 4$, tj. za $m = 0, 1, 2, 3$).

– Cilj je dokazati da onda mora vrijediti i $T(n) \leq T(n+1)$.

Prema bezuvjetnoj rekurziji je

$$T(n+1) = 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor\right) + 2 \cdot T\left(\left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil\right) + (n+1) \cdot \lg(n+1).$$

Prvo "svedimo" zadnji član. Za $n \geq 1$ je očito $(n+1) \cdot \lg(n+1) > n \cdot \lg n$.

Sad gledamo prva dva člana. Već za $\boxed{n \geq 2 \text{ je:}}$

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \underset{\text{uvijek}}{\leq} \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil < n \quad (\text{odnosno}, \leq n-1)$$

pa smijemo koristiti pretpostavku indukcije za $m = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$, čim je $n \geq 2$.

Dakle, za bazu indukcije treba samo $T(0) \leq T(1) \leq T(2)$

Još nam treba:

$$\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor, & \text{za } n = 0, 1, 2 \bmod 4 \\ \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1, & \text{za } n = 3 \bmod 4 \end{cases}$$

pa je $T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor\right) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right)$ za $n = 0, 1, 2 \bmod 4$

a za $n = 3 \bmod 4$ je

$$T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor\right) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1\right) \geq \underbrace{\left\{\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor < n\right\}}_{+\text{Pretp. ind s } m = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \geq T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right)$$

Dakle, za svaki $n \geq 2$ sigurno vrijedi

$$T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor\right) \geq T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right)$$

s tim da za $n = \emptyset, 1, 2 \bmod 4$ imamo jednakost, a za $n = 3 \bmod 4$ imamo (čak strogu) nejednakost.

- Analogno, za gornje cijelo:

$$\left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil, & \text{za } n = 1,2,3 \bmod 4 \\ \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1, & \text{za } n = 0 \bmod 4 \end{cases}$$

pa je za $n = 1,2,3 \bmod 4$

$$T\left(\left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil\right) = T\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil\right)$$

a za $n = \emptyset \bmod 4$ je

$$T\left(\left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil\right) = T\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1\right) \geq \left\{ \begin{array}{l} \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil < n \text{ i} \\ \text{pretp. ind. s } m = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \end{array} \right\} \geq T\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil\right)$$

Dakle, za svaki $n \geq 2$ vrijedi i

$$T\left(\left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil\right) \geq T\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil\right)$$

uz jednakost za $n = 1,2,3 \bmod 4$ i (strogu) nejednakost za $n = \emptyset \bmod 4$

- Na kraju, sad iskoristimo ove dvije tvrdnje (nejednakosti) pa je

$$T(n+1) = 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor\right) + 2 \cdot T\left(\left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil\right) + (n+1) \lg (n+1)$$

$$\geq 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + 2 \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil\right) + n \cdot \lg n = T(n).$$

Time je i korak indukcije dokazan.

Uočimo da je nejednakost stvarno stroga ($>$), jer je sigurno stroga za zadnji član (čim je $n \geq 1$, a iz poč. uvjeta je i $T(1) > T(\emptyset)$).

- Zaključak – za svaki dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$, bezuvjetno vrijedi

$$T(n) \in \Theta(n \cdot \log_4^2 n), \text{ odn., } \Theta(n \lg^2 n).$$