

Oblikovanje i analiza algoritama

5. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Nehomogene rekurzije i homogenizacija:
 - Opće rješenje homogenizirane rekurzije.
 - Opće rješenje polazne nehomogene rekurzije.
- Primjer “sporog” algoritma — Hanojski tornjevi:
 - Jednostavni model složenosti — broj poteza.
 - Hanojski tornjevi — razne varijante (Pascal).
 - Hanojski tornjevi — Intel C compiler.
 - Prošireni model složenosti.

Informacije — web stranica

Moja web stranica za Oblikovanje i analizu algoritama je

<https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/oaa/>

ili, skraćeno

<https://web.math.hr/~singer/oaa/>

Kopija je na adresi

<http://degiorgi.math.hr/~singer/oaa/>

Službena web stranica za Oblikovanje i analizu algoritama je

<https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/oaa/>

Informacije — kolokviji

Oblikovanje i analiza algoritama je u kolokvijskom razredu **B1**.

Službeni termini svih kolokvija su:

- Prvi kolokvij: srijeda, 22. 11. 2017., u 9 sati.
- Drugi kolokvij: srijeda, 31. 1. 2018., u 9 sati.
- Popravni kolokvij: srijeda, 14. 2. 2018., u 9 sati.

Uputa: “**izbjegnite**” popravni — obavite to **ranije!**

Osnovni model složenosti

Osnovni model = broj osnovnih poteza

Jednostavni model (vremenske) složenosti Hanojskih tornjeva dobivamo tako da gledamo samo

- broj osnovnih poteza = prebacivanja po jednog diska, tj.,
- broj poziva funkcije `prebaci_jednog`.

Dakle, model za složenost, u ovisnosti o broju diskova n , je

$$t_n := \text{broj poteza za } n \text{ diskova} = h_n.$$

Pripadna **rekurzija** za t_n je ista kao i za h_n (v. **Prog2**)

$$t_n = \begin{cases} 0, & \text{za } n = 0, \\ 2t_{n-1} + 1, & \text{za } n > 0. \end{cases}$$

Oblik rekurzije za broj poteza

Za početak, ovo je **nehomogena** rekurzija, sa zadanim (**jednim**) **početnim** uvjetom $t_0 = 0$.

Pripadna **homogena** rekurzija ima oblik, kao u (1),

$$t_n = 2t_{n-1}, \quad \text{za } n > 0,$$

= **linearna** rekurzija **prvog** reda, s **konstantnim** koeficijentima.

Nehomogeni član u rekurziji ima “**standardni**” oblik, kao u (4),

$$g(n) = b^n p_d(n),$$

uz

$$b = 1, \quad p_0(n) = 1.$$

Dakle, treba riješiti “**standardnu**” **nehomogenu** rekurziju **prvog** reda, s **konstantnim** koeficijentima.

Rješenje rekurzije za broj poteza

Rješenje. Karakteristična jednažba **homogenizirane** rekurzije je

$$(x - 2)(x - 1) = 0,$$

s korijenima $r_1 = 1$ i $r_2 = 2$. Opće rješenje **homogenizirane** rekurzije je

$$t_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n.$$

Ovo rješenje **uvrstimo** u **polaznu** rekurziju, zato da dobijemo konstantu c_1 uz onaj **dio rješenja** koji odgovara **nehomogenom** članu. Izlazi

$$c_1 + c_2 \cdot 2^n = 2(c_1 + c_2 \cdot 2^{n-1}) + 1$$

$$c_1 = 2c_1 + 1$$

$$c_1 = -1.$$

Rješenje rekurzije za broj poteza

Dakle, opće rješenje **polazne nehomogene** rekurzije je

$$t_n = c_2 \cdot 2^n - 1, \quad n \geq 0,$$

a konstanta c_2 se računa iz **početnog uvjeta** t_0 .

Početni uvjet je $t_0 = 0$, pa je

$$t_0 = c_2 \cdot 2^0 - 1 = 0 \quad \implies \quad c_2 = 1.$$

Konačno rješenje za **broj poteza** u Hanojskim tornjevima s n diskova je

$$t_n = 2^n - 1, \quad n \geq 0.$$

Model — trajanje jednog poteza

Broj poteza za n diskova:

$$F(n) = 2^n - 1.$$

Ako je izmjereno vrijeme $T(n)$, onda je trajanje jednog poteza

$$c(n) = \frac{T(n)}{F(n)} = \frac{T(n)}{2^n - 1}.$$

Uočiti: $c(n)$ je obratno proporcionalan brzini (inverz brzine).

Hanojski tornjevi u Pascalu

Hanoi — ispis na ekran

```
procedure Hanoi ( n, i, j : integer ) ;  
  
begin  
  
    if n > 0 then  
        begin  
            Hanoi ( n - 1, i, 6 - i - j ) ;  
            writeln ( i, ' -> ', j ) ;  
            Hanoi ( n - 1, 6 - i - j, j ) ;  
        end ; { n > 0 }  
  
end ; { Hanoi }
```

Hanoi — ispis na disk

```
procedure Hanoi ( n, i, j : integer ) ;  
  
begin  
  
    if n > 0 then  
        begin  
            Hanoi ( n - 1, i, 6 - i - j ) ;  
            writeln ( Moves, i, ' -> ', j ) ;  
            Hanoi ( n - 1, 6 - i - j, j ) ;  
        end ; { n > 0 }  
  
end ; { Hanoi }
```

Hanoi — opis varijanti potprograma

Za “normalnije” mjerjenje vremena (i brzine) — bez ispisa, testiramo $2 \times 2 = 4$ varijante potprograma Hanoi.

Dubina rekurzije:

- varijanta 0 — ima pozive za $n = 0$, koji ništa ne rade,
- varijanta 1 — nema pozive za $n = 0$, s posebnim testom za $n = 1$.

Broj argumenata:

- obična varijanta — ima samo dvije igle kao argumente (odakle, kamo) i računa pomoćnu iglu,
- varijanta a — ima sve tri igle kao argumente, bez računa.

Hanoi — varijanta 0

```
procedure Hanoi ( n, i, j : integer ) ;  
  
begin  
  
    if n > 0 then  
        begin  
            Hanoi ( n - 1, i, 6 - i - j ) ;  
            Prebaci ( i, j ) ;  
            Hanoi ( n - 1, 6 - i - j, j ) ;  
        end ; { n > 0 }  
  
end ; { Hanoi }
```

Hanoi — varijanta 1

```
procedure Hanoi ( n, i, j : integer ) ;  
  
begin  
  
    if n <= 1 then  
        Prebaci ( i, j )  
    else  
        begin  
            Hanoi ( n - 1, i, 6 - i - j ) ;  
            Prebaci ( i, j ) ;  
            Hanoi ( n - 1, 6 - i - j, j ) ;  
        end ; { n > 0 }  
  
end ; { Hanoi }
```


Hanoi — varijanta a0

```
procedure Hanoi ( n, i, j, k : integer ) ;  
  
begin  
  
    if n > 0 then  
        begin  
            Hanoi ( n - 1, i, k, j ) ;  
            Prebaci ( i, j ) ;  
            Hanoi ( n - 1, k, j, i ) ;  
        end ; { n > 0 }  
  
end ; { Hanoi }
```

Hanoi — varijanta a1

```
procedure Hanoi ( n, i, j, k : integer ) ;  
  
begin  
  
    if n <= 1 then  
        Prebaci ( i, j )  
    else  
        begin  
            Hanoi ( n - 1, i, k, j ) ;  
            Prebaci ( i, j ) ;  
            Hanoi ( n - 1, k, j, i ) ;  
        end ; { n > 0 }  
  
end ; { Hanoi }
```

Potprogram prebaci

Potprogram **Prebaci** samo **zbraja** poteze (globalni brojač):

```
procedure Prebaci ( i, j : integer ) ;
```

```
begin
```

```
    { Povecaj globalni brojac poteza.
```

```
    Trajanje je (skoro) konstantno:
```

```
        T(Prebaci) = c.}
```

```
    Broj_poteza := Broj_poteza + 1 ;
```

```
end ; { Prebaci }
```

Sudionici (žrtve) eksperimenta

Test je napravljen 2003. godine, s 2 Pascal kompajlera:

- Turbo Pascal 7 — generira 16-bitni kôd za obični DOS.
- Free Pascal 1.0.4 — generira 32-bitni kôd za tzv. DOS-ekstender GO32v2.

Izvršavanje je kroz DOS prozor na Windowsima (2000, XP).

Računala u eksperimentu su:

- Pentium na 166 MHz, zvani P120_166, rođen 1996., (ranije je imao Pentium na 120 MHz);
- Pentium 2 na 333 MHz, zvani Klamath, rođen 1998., (kasnije je imao Pentium 3 na 500 MHz);
- Pentium 4/660 na 3.6 GHz, zvan(a) BabyBlue, rođen(a) 2005., test iz 2006. godine (isti .exe kao prije);

TP7 — Tablica izmjerenih vremena $T(n)$

Usporedba izmjerenih vremena $T(n)$ (u s) za razna računala i razne varijante:

Varijanta	P120_166	Klamath	BabyBlue
ekran, $n = 15$	47.04	64.43	0.84
disk, $n = 15$	0.35	0.43	0.05
0, $n = 30$	694.82	747.91	305.82
1, $n = 30$	480.39	495.98	202.58
a0, $n = 30$	679.74	757.03	305.16
a1, $n = 30$	465.31	499.48	202.28

Uočiti: Zelena vremena za varijantu 1 (bez poziva za $n = 0$) su oko $2/3$ vremena za varijantu 0.

TP7 — Tablica trajanja poteza za $n = 30$

Usporedba trajanja jednog poteza (u s) za razna računala i razne varijante:

Varijanta	P120_166	Klamath	BabyBlue
ekran, $n = 15$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	$1.97 \cdot 10^{-3}$	$2.55 \cdot 10^{-5}$
disk, $n = 15$	$1.06 \cdot 10^{-5}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$1.55 \cdot 10^{-6}$
0, $n = 30$	$6.47 \cdot 10^{-7}$	$6.97 \cdot 10^{-7}$	$2.85 \cdot 10^{-7}$
1, $n = 30$	$4.47 \cdot 10^{-7}$	$4.62 \cdot 10^{-7}$	$1.89 \cdot 10^{-7}$
a0, $n = 30$	$6.33 \cdot 10^{-7}$	$7.05 \cdot 10^{-7}$	$2.84 \cdot 10^{-7}$
a1, $n = 30$	$4.33 \cdot 10^{-7}$	$4.65 \cdot 10^{-7}$	$1.88 \cdot 10^{-7}$

FPC 1.0.4 — Tablica izmjerenih vremena $T(n)$

Usporedba izmjerenih vremena $T(n)$ (u s) za razna računala i razne varijante:

Varijanta	P120_166	Klamath	BabyBlue
ekran, $n = 15$	48.53	65.04	0.89
disk, $n = 15$	0.43	0.41	0.02
0, $n = 30$	453.34	193.76	19.12
1, $n = 30$	297.91	160.75	23.43
a0, $n = 30$	466.29	175.76	16.79
a1, $n = 30$	277.67	155.67	22.58

Grubo objašnjenje zelenih i crvenih rezultata za varijantu 1 (bez poziva za $n = 0$) ide malo kasnije!

FPC 1.0.4 — Tablica trajanja poteza za $n = 30$

Usporedba trajanja jednog poteza (u s) za razna računala i razne varijante:

Varijanta	P120_166	Klamath	BabyBlue
ekran, $n = 15$	$1.48 \cdot 10^{-3}$	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$2.70 \cdot 10^{-5}$
disk, $n = 15$	$1.30 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-5}$	$6.11 \cdot 10^{-7}$
0, $n = 30$	$4.22 \cdot 10^{-7}$	$1.80 \cdot 10^{-7}$	$1.78 \cdot 10^{-8}$
1, $n = 30$	$2.77 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$	$2.18 \cdot 10^{-8}$
a0, $n = 30$	$4.34 \cdot 10^{-7}$	$1.64 \cdot 10^{-7}$	$1.56 \cdot 10^{-8}$
a1, $n = 30$	$2.59 \cdot 10^{-7}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$	$2.10 \cdot 10^{-8}$

Objašnjenje rezultata za varijante 0 i 1

Free Pascal 1.0.4 generira loš 32-bitni kôd. Izvršavanje tog kôda (i to kroz DOS-ekstender)

- je sve sporije na modernim 32-bitnim procesorima.

Do Pentium 4—Northwood procesora ponašanje je zeleno,

- isplati se izbaciti pozive za $n = 0$.

Od Pentium 4—Prescott procesora ponašanje je crveno,

- ne isplati se izbaciti pozive za $n = 0$.

Napomena. Rezultate ne treba koristiti za usporedbu računala. Posebno to vrijedi za TP7, jer

- izvršavanje 16-bitnog kôda postaje sve sporije.

Hanojski tornjevi u C-u

Hanoi — početak i štoperica

```
#include <stdio.h>
#include <time.h>

/* Hanojski tornjevi s n diskova.
   Broji poteze i mjeri vrijeme. */

int nmax = 30;
long int broj_poteza;

double dsecnd (void) {
    return (double)( clock( ) ) / CLOCKS_PER_SEC;
}
```

Hanoi — funkcija prebaci_jednog

Funkcija `Prebaci_jednog` samo **zbraja** poteze:

```
void prebaci_jednog(int odakle, int kamo)
{
    /* Umjesto pisanja poteza:

        printf("  %d -> %d\n", odakle, kamo);

    samo povecavamo globalni brojac poteza. */

    ++broj_poteza;

    return;
}
```

Hanoi — opis varijanti potprograma

Za razumno **mjerenje vremena** (i brzine) — **bez ispisa**, testiramo $2 \times 2 = 4$ varijante funkcije **Hanoi**.

Dubina rekurzije:

- varijanta **0** — **ima** pozive za $n = 0$, koji **ništa** ne rade,
- varijanta **1** — **nema** pozive za $n = 0$, s posebnim **testom** za $n = 1$.

Broj argumenata:

- **obična** varijanta — ima samo **dvije** igle kao argumente (odakle, kamo) i **računa** pomoćnu iglu,
- varijanta **a** — ima sve **tri** igle kao argumente, **bez** računa.

Hanoi — varijanta 0

```
void Hanoi(int n, int odakle, int kamo)
{
    if (n > 0) {
        Hanoi(n - 1, odakle, 6 - odakle - kamo);
        prebaci_jednog(odakle, kamo);
        Hanoi(n - 1, 6 - odakle - kamo, kamo);
    }

    return;
}
```

Hanoi — varijanta 1

```
void Hanoi(int n, int odakle, int kamo)
{
    if (n <= 1)
        prebaci_jednog(odakle, kamo);
    else {
        Hanoi(n - 1, odakle, 6 - odakle - kamo);
        prebaci_jednog(odakle, kamo);
        Hanoi(n - 1, 6 - odakle - kamo, kamo);
    }

    return;
}
```

Hanoi — varijanta a0

```
void Hanoi(int n, int odakle, int kamo, int pomocni)
{
    if (n > 0) {
        Hanoi(n - 1, odakle, pomocni, kamo);
        prebaci_jednog(odakle, kamo);
        Hanoi(n - 1, pomocni, kamo, odakle);
    }

    return;
}
```


Hanoi — varijanta *a1*

```
void Hanoi(int n, int odakle, int kamo, int pomocni)
{
    if (n <= 1)
        prebaci_jednog(odakle, kamo);
    else {
        Hanoi(n - 1, odakle, pomocni, kamo);
        prebaci_jednog(odakle, kamo);
        Hanoi(n - 1, pomocni, kamo, odakle);
    }

    return;
}
```

Hanoi — funkcija main

```
int main(void) {
    int n;
    double t1, t2, time, c;

    /* Zaglavlje tablice. */

    printf("      n      Broj_Poteza(n)      Vrijeme      "
           "C = T(n) / (2^n - 1)\n");
    printf("      n      2^n - 1      T(n)\n");
    printf("=====\n");
    printf("=====\n");
}
```

Hanoi — funkcija main (nastavak)

```
for (n = 1; n <= nmax; ++n) {  
  
    /* Inicijalizacija brojaca za ovaj n. */  
    broj_poteza = 0;  
  
    t1 = dsecnd( );  
    Hanojski_tornjevi(n, 1, 3);  
    t2 = dsecnd( );  
    time = t2 - t1;  
  
    if (broj_poteza > 0)  
        c = time / broj_poteza;  
    else  
        c = 0.0;
```

Hanoi — funkcija main (*nastavak*)

```
        printf("    %2d      %10ld      %11.6f      "  
              "%15e\n",  
              n, broj_poteza, time, c);  
    }  
  
    return 0;  
}
```

Intel C (2007.g.) — Izmjerena vremena $T(n)$

Usporedba izmjerenih vremena $T(n)$ (u s) za razna računala i razne varijante (Intel C 9.1, /03):

Varijanta	Klamath5	Mali 3.0	Veliki_P	BabyBlue
0, $n = 30$	57.12	7.74	8.55	7.28
1, $n = 30$	28.30	4.17	4.52	3.83
a0, $n = 30$	59.69	8.90	8.62	7.45
a1, $n = 30$	30.66	4.67	4.55	3.83

Na “normalnom” prevoditelju ipak dobivamo očekivano zeleno ponašanje rezultata za varijantu 1 (bez poziva za $n = 0$):

🕒 ušteda u vremenu je skoro 50%!

Tih 50% je i gornja granica za uštedu — v. malo dalje.

Intel C (2007.g.) — Trajanje poteza za $n = 30$

Usporedba trajanja jednog poteza (u s) za razna računala i razne varijante (Intel C 9.1, /O3):

Varijanta	Klamath5	Mali 3.0	Veliki_P	BabyBlue
0, $n = 30$	$5.32 \cdot 10^{-8}$	$7.20 \cdot 10^{-9}$	$7.97 \cdot 10^{-9}$	$6.78 \cdot 10^{-9}$
1, $n = 30$	$2.64 \cdot 10^{-8}$	$3.89 \cdot 10^{-9}$	$4.20 \cdot 10^{-9}$	$3.57 \cdot 10^{-9}$
a0, $n = 30$	$5.56 \cdot 10^{-8}$	$8.29 \cdot 10^{-9}$	$8.03 \cdot 10^{-9}$	$6.94 \cdot 10^{-9}$
a1, $n = 30$	$2.86 \cdot 10^{-8}$	$4.35 \cdot 10^{-9}$	$4.23 \cdot 10^{-9}$	$3.57 \cdot 10^{-9}$

Razlika Mali, Veliki_P na varijantama 0, 1 je “misterij”.

Vjerojatni krivac:

- razlika u arhitekturi procesora (Northwood C, Prescott) i optimizacija te verzije kompilera!

Intel C (2017.g.) — Izmjerena vremena $T(n)$

Usporedba izmjerenih vremena $T(n)$ (u s) za jedno računalo

📍 Sasa-PC = Intel Core i7 4770K (Haswell) na 3.5 GHz,
i razne varijante (Intel C 18.0, ia32 i x64, /fast):

Varijanta	Sasa-PC ia32	Sasa-PC x64
0, $n = 30$	3.072	2.407
1, $n = 30$	1.678	1.601
a0, $n = 30$	2.342	2.590
a1, $n = 30$	1.557	1.573

Očekivano, varijanta 1 (bez poziva za $n = 0$) je bitno brža:

📍 ušteda u vremenu je 30–40%!

Intel C (2017.g.) — Trajanje poteza za $n = 30$

Usporedba trajanja jednog poteza (u s) za jedno računalo (Sasa-PC) i razne varijante (Intel C 18.0, ia32 i x64, /fast):

Varijanta	Sasa-PC ia32	Sasa-PC x64
0, $n = 30$	$2.86 \cdot 10^{-9}$	$2.24 \cdot 10^{-9}$
1, $n = 30$	$1.56 \cdot 10^{-9}$	$1.49 \cdot 10^{-9}$
a0, $n = 30$	$2.18 \cdot 10^{-9}$	$2.41 \cdot 10^{-9}$
a1, $n = 30$	$1.45 \cdot 10^{-9}$	$1.46 \cdot 10^{-9}$

Prošireni model složenosti

Hanojski tornjevi — modeli složenosti

Osnovni model složenosti mjeri samo broj poteza

$t_n :=$ broj poteza za n diskova.

Pripadna rekurzija za t_n je bila

$$t_n = \begin{cases} 0, & \text{za } n = 0, \\ 2t_{n-1} + 1, & \text{za } n > 0. \end{cases}$$

Rješenje za broj poteza je $t_n = 2^n - 1$, za svaki $n \geq 0$.

U ovom modelu

• nema razlike između varijanti 0 i 1.

Model je prejednostavan — brojimo samo poteze, bez poziva.

Mane osnovnog modela složenosti

Taj model **nije dobar** za procjenu **vremenske** složenosti.

Problem se vidi već u **početnom uvjetu** $t_0 = 0$. Po tom modelu, poziv s $n = 0$ uvijek “traje” **nula** vremena. No,

🔴 znamo da to **nije istina** u varijanti **0**, iako **nema poteza**.

Treba nam model u kojem je $t_0 > 0$. Dovoljno je uzeti da je

$$t_0 = \text{const} > 0.$$

Zadatak. Probajte sami napraviti takav model, sa **samo jednim** parametrom — konstantom **const**.

🔴 Što je značenje tog parametra **const**?

🔴 Testirajte ovaj model, tj. probajte **eksperimentalno** odrediti parametar **const** i pogledajte kolike su **greške**.

Prošireni model složenosti

Još **bolji** model **vremenske** složenosti dobivamo tako da uvedemo dva “parametra” — **dvije konstante** u model.

- Jedna od njih mjeri **samo** trajanje **poteza**, a
- druga mjeri trajanje “**preostatka**” svakog **poziva** rekurzivne funkcije **Hanoi**, tj. sve ostalo, **bez** poteza.

Takav model precizno razlikuje

- **poteze** od **poziva**,

i mora pokazati **razliku** između varijanti **0** i **1**.

Dvoparametarski model složenosti — parametri

Preciznije, neka je:

- c_m = trajanje **jednog poteza** (“move”), tj.
 - trajanje **jednog poziva** funkcije **prebaci_jednog**.

Što god smatrali potezom, “sakriveno” je u pozivu ove funkcije!

- c_0 = trajanje **jednog poziva** funkcije **Hanoi**, **bez poteza** i **bez rekurzivnih poziva** te funkcije. Dakle, c_0 uključuje
 - **poziv** funkcije **izvana**,
 - **ulaz** u funkciju (priprema argumenata na stack),
 - **testiranje** vrijednosti od n u **if** naredbi,
 - **izlaz** iz funkcije (iza **if**), što uključuje povratak i “čišćenje” argumenata sa stacka.

Vremenska složenost za obje varijante

Varijanta **0** ima pozive funkcije **Hanoi** s argumentom $n = 0$.

Rekurzija za pripadnu vremensku složenost $t_n^{(0)}$ je

$$t_n^{(0)} = \begin{cases} c_0, & \text{za } n = 0, \\ c_0 + 2t_{n-1}^{(0)} + c_m, & \text{za } n > 0. \end{cases}$$

Varijanta **1** nema pozive funkcije **Hanoi** s argumentom $n = 0$.

Rekurzija za pripadnu vremensku složenost $t_n^{(1)}$ je

$$t_n^{(1)} = \begin{cases} c_0 + c_m, & \text{za } n = 1, \\ c_0 + 2t_{n-1}^{(1)} + c_m, & \text{za } n > 1. \end{cases}$$

Uočimo da su rekurzije **iste** u **obje** varijante!

Poravnanje početka na $n = 0$ u varijanti 1

Za lakše rješavanje rekurzija, isplati se “poravnati” početak, tako da obje rekurzije počinju s $n = 0$.

Stvarni početak varijante 1 je za $n = 1$, i glasi

$$t_1^{(1)} = c_0 + c_m.$$

Kad umjetno “vratimo” drugu rekurziju za jedan član unatrag

$$t_1^{(1)} = c_0 + c_m = c_0 + 2t_0^{(1)} + c_m,$$

dobivamo da mora biti

$$t_0^{(1)} = 0.$$

To savršeno odgovara pravom stanju stvari, jer poziva s $n = 0$ zaista nema, tj. trajanje im je nula! Točno to smo htjeli.

Zajednička rekurzija za vremensku složenost

Rekurzija za vremensku složenost t_n u obje varijante je ista

$$t_n = 2t_{n-1} + c_0 + c_m, \quad \text{za } n > 0,$$

a početni uvjeti su različiti

$$t_0 = \begin{cases} c_0, & \text{za varijantu 0,} \\ 0, & \text{za varijantu 1.} \end{cases}$$

Rješenje. Nehomogeni član u rekurziji ima standardni oblik

$$g(n) = b^n p_d(n),$$

uz

$$b = 1, \quad p_0(n) = c_0 + c_m.$$

Rješenje rekurzije za vremensku složenost

Karakteristična jednačba **homogenizirane** rekurzije je

$$(x - 2)(x - 1) = 0,$$

s korijenima $r_1 = 1$ i $r_2 = 2$. Opće rješenje **homogenizirane** rekurzije je

$$t_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n.$$

Ovo rješenje **uvrstimo** u **polaznu** rekurziju, zato da dobijemo konstantu c_1 uz onaj **dio rješenja** koji odgovara **nehomogenom** članu. Izlazi

$$c_1 + c_2 \cdot 2^n = 2(c_1 + c_2 \cdot 2^{n-1}) + c_0 + c_m$$

$$c_1 = 2c_1 + c_0 + c_m$$

$$c_1 = -(c_0 + c_m).$$

Rješenja za vremensku složenost

Dakle, opće rješenje **polazne** nehomogene rekurzije je

$$t_n = c_2 \cdot 2^n - (c_0 + c_m), \quad n \geq 0,$$

a konstanta c_2 se računa iz **početnog uvjeta** t_0 .

🔴 Za varijantu **0**, početni uvjet je $t_0 = c_0$, pa je

$$t_0 = c_2 \cdot 2^0 - (c_0 + c_m) = c_0 \quad \implies \quad c_2 = 2c_0 + c_m.$$

🔴 Za varijantu **1**, početni uvjet je $t_0 = 0$, pa je

$$t_0 = c_2 \cdot 2^0 - (c_0 + c_m) = 0 \quad \implies \quad c_2 = c_0 + c_m.$$

Rješenja za vremensku složenost (nastavak)

Konačna rješenja za vremensku složenost obje varijante algoritma, uz polazne oznake, možemo napisati ovako:

● Varijanta 0

$$\begin{aligned}t_n^{(0)} &= (2c_0 + c_m) \cdot 2^n - (c_0 + c_m) \\ &= (c_0 + c_m) \cdot (2^n - 1) + c_0 \cdot 2^n, \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

● Varijanta 1

$$\begin{aligned}t_n^{(1)} &= (c_0 + c_m) \cdot 2^n - (c_0 + c_m) \\ &= (c_0 + c_m) \cdot (2^n - 1), \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

Drugo rješenje $t_n^{(1)}$ je “skalirani” broj poteza. U pripadnoj rekurziji piše $c_0 + c_m$, umjesto 1, a početni uvjeti su isti.

Vremenska složenost — usporedba

Uz pretpostavku da su konstante c_0 i c_m

- jednake za obje varijante algoritma,

- što je skoro “očito” — usporedbom tih algoritama, smijemo usporediti dobivena rješenja. Dobivamo da je

$$t_n^{(0)} = (c_0 + c_m) \cdot (2^n - 1) + c_0 \cdot 2^n = t_n^{(1)} + c_0 \cdot 2^n.$$

Zaključak:

- trajanje varijante 0 je veće za $c_0 \cdot 2^n$,

što točno odgovara trajanju

- 2^n bespotrebnih rekurzivnih poziva s $n = 0$ diskova.

Dakle, ovaj model, bar u teoriji, radi!

Korektnost modela za vremensku složenost

Naravno, ovaj dvoparametarski model je korektan u praksi,

- ako i samo ako vrijede osnovne pretpostavke tog modela.

Te pretpostavke treba provjeriti — verificirati u praksi.

Osnovna pretpostavka našeg modela je

- da su parametri c_m i c_0 zaista konstante,
- tj. da ovi parametri ne ovise o broju diskova n .

Sada, kad imamo izraze za vremensku složenost t_n u obje varijante algoritma, to se lako može

- eksperimentalno provjeriti,
- tako da iskoristimo izmjerena vremena trajanja $T(n)$.

Verifikacija modela za vremensku složenost

No, i tu treba biti oprezan — da ne tražimo **previše**.

Za **verifikaciju** pretpostavki i modela — “striktno” govoreći, trebalo bi eksperimentalno **provjeriti dvije** stvari. **Prvo**,

- jesu li c_m i c_0 “**skoro**” **konstante**, gledano u funkciji od n ,
- i to za **svaku** varijantu algoritma — **posebno**.

Zatim treba vidjeti dobivamo li u **obje** varijante

- “**približno**” **iste** vrijednosti za **odgovarajuće** konstante.

To bi značilo da,

- na početku, **svaka** varijanta ima **svoje** parametre c_m i c_0 ,
- a onda provjeravamo jesi li oni **isti** u **raznim** varijantama.

Takav pristup **ne valja** — dobivamo **previše** parametara.

Previše parametara za pouzdanu verifikaciju

Za naše **dvije** varijante algoritma, imamo čak **4** parametra. To je **previše**, u smislu da ih je

- **nemoguće pouzdano** odrediti iz mjerenja.

U čemu je problem?

Kako bismo, za svaku **pojedinu** varijantu, provjerili jesu li pripadni c_m i c_0 “**konstantni**”? Recimo, ovako:

- izmjerimo vremena $T(n)$ za neke vrijednosti od n ;
- postavimo odgovarajući “**model**” $T(n) = t_n$, s **dva nepoznata konstantna** parametra, i parametre odredimo diskretnom metodom najmanjih kvadrata;
- ako su dobivene **greške** dovoljno **male**, možemo uzeti da su nađeni parametri zaista “**konstantni**”.

Tablica vremena za varijantu a0

Na primjer, za varijantu a0 (Intel C 9.1, BabyBlue računalo) dobivamo sljedeći izlaz:

n	$2^n - 1$	$T(n)$	$T(n)/(2^n - 1)$
1	1	0.000	0.000000e+000
⋮	⋮	⋮	⋮
19	524287	0.000	0.000000e+000
20	1048575	0.015	1.430513e-008
21	2097151	0.016	7.629398e-009
22	4194303	0.015	3.576280e-009
23	8388607	0.063	7.510186e-009
24	16777215	0.109	6.496907e-009
25	33554431	0.235	7.003546e-009
26	67108863	0.453	6.750226e-009
27	134217727	0.906	6.750226e-009
28	268435455	1.828	6.809831e-009
29	536870911	3.688	6.869435e-009
30	1073741823	7.453	6.941147e-009

Model složenosti za varijantu a0

Pripadni model vremenske složenosti za varijantu 0 je

$$\begin{aligned}t_n^{(0)} &= (2c_0 + c_m) \cdot 2^n - (c_0 + c_m) \\ &= (c_0 + c_m) \cdot (2^n - 1) + c_0 \cdot 2^n, \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

Iz ova dva zapisa odmah dobivamo dva različita modela za trajanje $T_0(n)$ — razlika je samo u izboru funkcija baze.

● Model (a):

$$T_0(n) = a_1 \cdot 2^n + a_2 \cdot 1,$$

s koeficijentima $a_1 = 2c_0 + c_m$ i $a_2 = c_0 + c_m$.

● Model (b):

$$T_0(n) = b_1 \cdot (2^n - 1) + b_2 \cdot 2^n,$$

s koeficijentima $b_1 = c_0 + c_m$ i $b_2 = c_0$.

Nestabilnost računanja dva parametra

Oba modela su linearna i imaju dva nepoznata koeficijenta. Kad ih izračunamo, lako nađemo parametre c_0 i c_m za varijantu a_0 (linearni sustav reda 2).

- Koeficijente u modelu računamo diskretnom metodom najmanjih kvadrata, iz tablice izmjerenih vremena.

I tu je problem. Tablica je vrlo netočna za male vrijednosti n . Izmjerena vremena $T(n)$ imaju neku točnost tek za $n \geq 23$.

- U modelu (a), član $a_2 \cdot 1$ ima utjecaja samo za male n , tj. koeficijent a_2 se ne može dobro odrediti iz mjerenja.
- U modelu (b), funkcije baze $2^n - 1$ i 2^n se “iole razlikuju” samo za male n . Inače su “skoro” linearno zavisne, pa b_1 i b_2 ne možemo nezavisno dobro odrediti.


Dakle, dva koeficijenta su previše. Jedan bi “prošao” (v. iza).

Model složenosti za varijantu **a1**

Isti problem imamo i u varijanti **1**. Tu se još **bolje** vidi!

Model **vremenske** složenosti za varijantu **1** je

$$\begin{aligned}t_n^{(1)} &= (c_0 + c_m) \cdot 2^n - (c_0 + c_m) \\ &= (c_0 + c_m) \cdot (2^n - 1), \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

Složenost ovisi samo o **zbroju** parametara c_0 i c_m , tj. stvarno,  imamo samo **jedan** parametar.

Jedini razumni **model** za trajanje $T_1(n)$ je

$$T_1(n) = C_1 \cdot (2^n - 1),$$

s **jednim** koeficijentom $C_1 = c_0 + c_m$.

Stvarna ideja dvoparametarskog modela

Naš dvoparametarski model vremenske složenosti, s parametrima c_m i c_0 , smišljen je zato da

- pokaže razliku između dviju varijanti 0 i 1,

a ne zato da dobijemo “precizniji” model složenosti za svaku pojedinu varijantu.

Dakle, na samom početku, u “izvodu” modela,

- koji je napravljen na osnovu obje varijante algoritma, pretpostavljamo da za obje varijante

- vrijede iste vrijednosti parametara c_m i c_0 .

(Očito je da c_m mora biti isti — zovemo istu funkciju.)

Zato, u verifikaciji, treba iskoristiti izmjerena vremena za obje varijante, da bismo odredili/provjerili te parametre c_m i c_0 .

Verifikacija modela za vremensku složenost

Za **dvije** varijante algoritma sad imamo “**samo**” **2** parametra.

Bitno: Njih je **lako pouzdano odrediti** i verificirati!

Najlakši način za to je:

- za **obje** varijante algoritma uzmemo **jednoparametarski** model **trajanja** — s **jednim nepoznatim** koeficijentom,
- koji **dobro** opisuje trajanje za **velike n** — tamo gdje su izmjerene vrijednosti dovoljno **točne**.

Taj model **ne mora** biti **egzaktan**,

- možemo koristiti i **asimptotsko** ponašanje **vremenske** složenosti za **velike** vrijednosti **n** .

Kad odredimo ta **dva** koeficijenta, **provjerimo** njihovu “**konstantost**” (grešku modela) i **nađemo** parametre **c_m** i **c_0** .

Jednoparametarski modeli trajanja

Za trajanje $T_1(n)$ varijante **1** već imamo takav model

$$T_1(n) = C_1 \cdot (2^n - 1),$$

s **jednim** koeficijentom $C_1 = c_0 + c_m$. Ovaj model je **egzaktan**.

Jednoparametarski model za trajanje $T_0(n)$ varijante **0**, izlazi **aproksimacijom** iz modela **vremenske složenosti**

$$\begin{aligned} t_n^{(0)} &= (2c_0 + c_m) \cdot 2^n - (c_0 + c_m) \\ &= (2c_0 + c_m) \cdot (2^n - 1) + c_0, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Za iole **veći** n , zadnji član c_0 postaje zanemariv, pa je

$$T_0(n) \approx C_0 \cdot (2^n - 1),$$

s **jednim** koeficijentom $C_0 = 2c_0 + c_m$.

Određivanje parametara i verifikacija modela

Koeficijente C_0 i C_1 možemo odrediti na dva načina.

- Dijeljenjem izmjerenog vremena i broja poteza,

$$C_i(n) = \frac{T_i(n)}{2^n - 1},$$

za svaki n u tablici za pojedinu varijantu $i = 0, 1$.

Tako dobivamo “profil” koeficijenta $C_i(n)$ u ovisnosti o n , odakle se lako vizuelno provjerava “konstantnost”.

Usput, točno to je zadnji stupac izlaza u programima.

- Diskretnom metodom najmanjih kvadrata s jednim parametrom — traženim koeficijentom, uz provjeru grešaka takve aproksimacije izmjerenih podataka.

Probajte sami!

Primjer određivanja parametara i verifikacije

Primjer. Pogledajmo rezultate programa za varijante **a0** i **a1** (Intel C 9.1, **BabyBlue**), za $n \geq 25$ (vrlo slično je za **0** i **1**):

n	$2^n - 1$	$T_0(n)$	$T_0(n)/(2^n - 1)$	$T_1(n)$	$T_1(n)/(2^n - 1)$
25	33554431	0.235	7.003546e-009	0.109	3.248453e-009
26	67108863	0.453	6.750226e-009	0.250	3.725290e-009
27	134217727	0.906	6.750226e-009	0.484	3.606081e-009
28	268435455	1.828	6.809831e-009	0.953	3.550202e-009
29	536870911	3.688	6.869435e-009	1.907	3.552064e-009
30	1073741823	7.453	6.941147e-009	3.828	3.565103e-009

Vidimo da su koeficijenti $C_0(n)$ i $C_1(n)$ skoro **konstantni** i **stabiliziraju** se, kako n raste, približno na sljedeće vrijednosti

$$C_0 = 2c_0 + c_m \approx 6.9 \cdot 10^{-9},$$

$$C_1 = c_0 + c_m \approx 3.6 \cdot 10^{-9}.$$

Primjer određivanja parametara i verifikacije

Oдавде dobivamo približne vrijednosti za **parametre** modela

$$c_0 \approx 3.3 \cdot 10^{-9} \text{ s}, \quad c_m \approx 0.3 \cdot 10^{-9} \text{ s}.$$

Jedinice su **sekunde** — parametri su **trajanje poziva** i **poteza**.

Komentar.

- Naši “**potezi**” su jako **brzi** — **jedno** povećanje globalnog brojača u funkciji **prebaci_jednog**.

Brzina približno odgovara frekvenciji računala (**3.6 GHz**).

- Jedan **poziv** traje **11 puta** dulje. Zato je **ušteta** u varijanti **1** skoro **50%** (c_0 prema $2c_0 + c_m$, uz **mali** c_m).

Uz veću **točnost štoperice** (ili na **sporijem** računalu), dobili bismo **veću** točnost parametara.

Novi parametri (2017.g.) — velike razlike!?

Napomena. U novim testovima, na jednom računalu

● Sasa-PC, Intel C 18.0, ia32 i x64, /fast,

za odgovarajuće varijante algoritma (0 i 1, odnosno, a0 i a1) dobivamo sljedeće rezultate (sva vremena su u 10^{-9} s):

Test \ Parametar	C_0	C_1	c_0	c_m
ia32 (0 i 1)	2.86	1.56	1.30	0.26
ia32 (a0 i a1)	2.18	1.45	0.73	0.72
x64 (0 i 1)	2.24	1.49	0.75	0.74
x64 (a0 i a1)	2.41	1.46	0.95	0.51

Dobivamo ogromne razlike u trajanjima jednog poziva (c_0), odnosno, jednog poteza (c_m).

Asimptotski jednoparametarski modeli trajanja

Napomena. Mogli smo koristiti i jednoparametarske modele na bazi **asimptotskog** ponašanja **vremenske** složenosti

$$T_0(n) \sim C_0 \cdot 2^n,$$

$$T_1(n) \sim C_1 \cdot 2^n,$$

s istim značenjima koeficijenata C_0 i C_1 .

Dobivamo **minijaturno veću** grešku nego prije, zbog zamjene funkcije baze $2^n - 1 \mapsto 2^n$.

Završni komentar o modelu složenosti

Završni komentar o modelu složenosti i parametrima.

- Za parametar c_m zaista očekujemo da je isti u obje varijante, jer zovemo istu funkciju.
- Trajanje poziva — parametar c_0 , bi mogao, eventualno, biti različit, jer algoritmi ipak nisu sasvim isti.

Tako bismo za dvije varijante dobili model s tri parametra,

- ali njih, opet, nije lako pouzdano odrediti!