OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — 2. kolokvij

24. 1. 2011.

1. (25) Astronomski laboratorij treba napraviti raspored zahtjeva za korištenjem novog teleskopa "Velike Okice". U svakom trenutku, teleskop može koristiti samo jedan korisnik. Prikupljeno je ukupno n zahtjeva, a svaki zahtjev ima oblik vremenskog intervala $[p_i, k_i]$, gdje je p_i početak, a k_i kraj korištenja. Pretpostavljamo da su intervali korektno zadani, tj. da je $p_i < k_i$, za $i = 1, \ldots, n$. Naravno, razni intervali se mogu međusobno preklapati, tako da se može dogoditi da nije moguće zadovoljiti sve zahtjeve. Uprava laboratorija želi da u probnom pogonu što više korisnika upozna mogućnosti nove opreme, bez obzira na iskoristivost i ukupno vrijeme korištenja. Zato, od pristiglih n zahtjeva, treba izabrati podskup s najvećim **brojem** zahtjeva koje je moguće zadovoljiti.

Zahtjevi i, j su **kompatibilni** ako se traženi intervali ne preklapaju, tj. ako vrijedi $k_i \leq p_j$ ili $k_j \leq p_i$. Podskup zahtjeva A je **kompatibilan** ako za svaki par zahtjeva $i, j \in A$, uz $i \neq j$, vrijedi da su kompatibilni. Najveći kompatibilni podskup zahtjeva zovemo **optimalnim**. Sastavite **pohlepni** algoritam koji nalazi optimalni podskup zahtjeva, dokažite korektnost algoritma i nađite njegovu složenost.

(a) Pokažite primjerom da pohlepa po kriteriju "izaberi dozvoljeni interval koji najranije počinje", tj. uzlazno po vremenu početka p_i, ne mora biti optimalna.

(b) Pokažite primjerom da pohlepa po kriteriju "izaberi dozvoljeni interval koji najkraće traje", tj. uzlazno po vremenu trajanja $k_i - p_i$, ne mora biti optimalna.

(c) Nađite "pravi" kriterij za pohlepu i dokažite njegovu optimalnost, tj. da ponovljenom primjenom tog kriterija dobivamo kompatibilni podskup s najvećim brojem intervala.

(d) Sastavite algoritam koji nalazi optimalni podskup i nađite njegovu složenost.

OKRENITE!

2. (20) Velike prirodne brojeve $u \in \mathbf{N}$ prikazujemo pozicionim zapisom u nekoj fiksnoj bazi $b \geq 2$. Poznato je da za svaki realni broj $\alpha > 1$, postoji algoritam $M_\alpha(u, v)$ koji množi dva n-znamenkasta broja u i v u vremenu $T_\alpha(n) \in O(n^\alpha)$. Zadan je slijedeći algoritam za množenje velikih prirodnih brojeva u i v, gdje je n_0 neka unaprijed zadana konstanta, neovisna o u i v.

> **function** *SuperMul* (u, v) {
>   dopuni manjeg od brojeva u i v nulama sprijeda, ako treba,
>   tako da oba broja imaju točno po n znamenki;
>   **if** $n \leq n_0$ **then**
>   pomnoži u i v standardnim algoritmom M_2 ;
>   **else** {
> $\alpha := 1 + (\lg \lg n)/\lg n$;
>   pomnoži u i v algoritmom M_α ;
>   }
>   **return** izračunati produkt ;
> }

Množi li algoritam *SuperMul* n-znamenkaste brojeve u vremenu $T(n) \in O(n \log n)$? Precizno obrazložite!

3. (20) Neka je $(A, \cdot)$ algebarska struktura polugrupe obzirom na binarnu operaciju množenja $\cdot : A \times A \to A$, tj. množenje je asocijativno i ima neutralni element $e \in A$. Za svaki element $a \in A$, korektno su definirane potencije a^n, za svaki $n \geq 0$. Složenost takvog potenciranja mjerimo brojem potrebnih množenja elemenata iz A.

(a) Napišite algoritam koji računa a^n, za zadane a i n, koristeći tzv. **binarno** potenciranje (pozicioni zapis broja n u bazi 2). Kolika je složenost tog algoritma, u ovisnosti o n?

(b) Pokažite primjerom da binarno potenciranje **ne mora** biti optimalno u pogledu broja množenja, tj. nađite neki n za koji se a^n može izračunati sa strogo manje množenja.

(c) Zadana je linearna homogena rekurzivna relacija reda k, s konstantnim koeficijentima

$$t_n = a_{k-1}t_{n-1} + \cdots + a_0 t_{n-k}, \quad n \geq k,$$

uz zadane početne uvjete $t_0, \ldots, t_{k-1}$. Ukratko opišite kako se binarno potenciranje može iskoristiti za **brzo** računanje n-tog člana t_n. Kolika je složenost u ovisnosti o n?

REZULTATI: četvrtak, 27. 1. 2011. u 11:30 sati. Saša Singer