

Numerička matematika

2. predavanje — dodatak

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja — dodatka

- Širenje grešaka kod računanja:
 - Uvjetovanost osnovnih operacija — sažetak.
 - Primjer uvjetovanosti višedimenzionalnog problema.
 - Primjer grešaka zaokruživanja — računanje $(x - n)^{10}$.

Relativna uvjetovanost osnovnih operacija — sažetak

Oznake i pretpostavke na ulaz

Egzaktne ulazne vrijednosti:

- Neka su x , y skalari (realni ili kompleksni brojevi) takvi da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

Približne ulazne vrijednosti:

- Neka su \hat{x} , \hat{y} njihove **aproksimacije** s **relativnim** greškama

$$\varepsilon_x := \frac{\hat{x} - x}{x}, \quad \varepsilon_y := \frac{\hat{y} - y}{y}.$$

Dodatno, neka je

$$\varepsilon := \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

maksimum relativnih grešaka aproksimacija na **ulazu** u aritmetičku operaciju.

Oznake i pretpostavke na izlaz

Egzaktni rezultat operacije \circ je $x \circ y$. Uz pretpostavku da je $x \circ y \neq 0$, relativna greška približnog izlaza $\hat{x} \circ \hat{y}$ je

$$\varepsilon_{\circ} := \frac{(\hat{x} \circ \hat{y}) - (x \circ y)}{x \circ y}.$$

Ovu grešku ε_{\circ} želimo ocijeniti u obliku

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{relativna greška} \\ \text{na izlazu} \end{array} \right\} \leq \text{uvjetovanost} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{relativna greška} \\ \text{na ulazu} \end{array} \right\},$$

uz neke razumne pretpostavke na ulazne veličine i grešku ε .
Skraćeni zapis je

$$|\varepsilon_{\circ}| \leq \kappa_{\circ} \cdot \varepsilon,$$

gdje je

κ_{\circ} = relativni broj uvjetovanosti za operaciju \circ .

Relativna uvjetovanost zbrajanja i oduzimanja

Pretpostavimo za egzaktni rezultat vrijedi $x \pm y \neq 0$. Onda je

$$|\varepsilon_{\pm}| \leq \kappa_{\pm} \cdot \varepsilon, \quad \kappa_{\pm} = \frac{|x| + |y|}{|x \pm y|}.$$

Za zbrajanje brojeva istog predznaka (oznaka $+$) vrijedi

$$\kappa_{+} = \frac{|x| + |y|}{|x + y|} = 1.$$

Za zbrajanje brojeva različitog predznaka (oznaka $-$) vrijedi

$$\kappa_{-} = \frac{|x| + |y|}{|x - y|} > 1.$$

Ako je $\kappa_{-} \gg 1$, oduzimanje je loše uvjetovano — katastrofalno kraćenje!

Relativna uvjetovanost množenja

Pretpostavimo da je $\hat{x} \neq 0$ i $\hat{y} \neq 0$, što osigurava i $\hat{x} * \hat{y} \neq 0$.
Onda je

$$|\varepsilon_*| \leq \kappa_* \cdot \varepsilon, \quad \kappa_* = 2 + \varepsilon.$$

Dodatno, ako još pretpostavimo da je $\varepsilon \leq 1$, onda je

$$\kappa_* \leq 3.$$

Dakle, ako približne vrijednosti imaju malu relativnu grešku, onda je množenje dobro uvjetovano u relativnom smislu.

Pretpostavka $\varepsilon \leq 1$ osigurava da približne vrijednosti nemaju suprotan predznak od pravih (što je razumno).

Relativna uvjetovanost dijeljenja

Pretpostavimo da je $\hat{x} \neq 0$ i $\hat{y} \neq 0$, što osigurava i $\hat{x}/\hat{y} \neq 0$.

Za iole **razumnu** ocjenu, ovdje još moramo **pretpostaviti**

- da približni nazivnik \hat{y} **nije** pretjerano pogrešan, tako da ima **korektan** predznak, tj. da je $\varepsilon_y > -1$.

Uz malo **jaču** pretpostavku $\varepsilon < 1$, izlazi

$$|\varepsilon_{\hat{x}}| \leq \kappa_{\hat{x}} \cdot \varepsilon, \quad \kappa_{\hat{x}} = \frac{2}{1 - \varepsilon}.$$

Dodatno, ako još **pretpostavimo** da je $\varepsilon \leq 1/2$, onda je

$$\kappa_{\hat{x}} \leq 4.$$

Dakle, ako približne vrijednosti imaju **malu** relativnu grešku, onda je **dijeljenje dobro** uvjetovano u relativnom smislu.

Primjer uvjetovanosti višedimenzionalnog problema

Primjer — uvjetovanost i uvjetovanost po normi

Primjer. Ispitajmo **relativnu** uvjetovanost problema računanja vrijednosti funkcije $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdje je

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \quad y_2 = f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}.$$

U **finijoj** analizi, **matrica** uvjetovanosti $\Gamma(x)$ ima elemente

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right|, & \gamma_{12} &= \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right|, \\ \gamma_{21} &= \left| \frac{x_2}{x_2 - x_1} \right|, & \gamma_{22} &= \left| \frac{x_1}{x_2 - x_1} \right|, \end{aligned}$$

što ukazuje na **lošu uvjetovanost** (engl. ill-conditioning) za $x_1 \approx \pm x_2$, uz uvjet da $|x_1|$ (a onda i $|x_2|$) **nisu mali**.

Primjer (nastavak)

Za “globalni” broj uvjetovanosti $\|\Gamma(x)\|_F$ dobivamo

$$\|\Gamma(x)\|_F = \sqrt{2} \frac{x_1^2 + x_2^2}{|x_1^2 - x_2^2|},$$

što ponovno pokazuje istu **lošu uvjetovanost** za $x_1 \approx \pm x_2$.

Ako uzmemo **relativnu** uvjetovanost po ∞ -normi, onda je

$$(\text{cond } f)(x) = \frac{\max\{|x_1|, |x_2|\} \cdot (x_1^2 + x_2^2)}{\max\{|x_1 + x_2|, |x_2 - x_1|\} \cdot |x_1 x_2|}.$$

Uvrstimo li $x_1 \approx \pm x_2$, dobivamo da je $(\text{cond } f)(x) \approx 1$, što vodi na **pogrešan** zaključak da je problem **dobro uvjetovan** i neosjetljiv na perturbacije za $x_1 \approx \pm x_2$.

Primjer širenja grešaka zaokruživanja

Primjer širenja grešaka

Primjer. Vrijednost

$$f_n(x) = (x - n)^{10}, \quad n = 0, \dots, 10,$$

računamo u aritmetici računala (**extended**) u **okolini** točke n .

● Točka n je **deseterostruka** nultočka polinoma f_n .

Egzaktno gledano, graf funkcije $(x - n)^{10}$ = translirani graf funkcije x^{10} za n jedinica **udesno**.

Funkcijske vrijednosti $f_n(x)$ možemo izračunati na **više** načina.

- Oni su **matematički ekvivalentni**,
- ali **nisu numerički jednaki** i ne daju iste rezultate.

Primjer širenja grešaka (nastavak)

Vrijednosti $f_n(x)$ računat ćemo na dva načina:

- binarnim potenciranjem vrijednosti $(x - n)$ na desetu potenciju — savršeno stabilno (ovo oduzimanje je dobro),
- razvojem po potencijama od x , korištenjem binomne formule

$$(x - n)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-n)^{10-k} \cdot x^k,$$

s tim da polinom na desnoj strani računamo Hornerovom shemom.

Problem: U okolini točke n , $(x - n)^{10}$ je vrlo mali broj.

Članovi u sumi na desnoj strani su alternirajući po predznaku i rastu s porastom $n \implies$ mora doći do sve većeg kraćenja.

Primjer širenja grešaka (nastavak)

Kako izgledaju **izračunati** grafovi funkcije f_n ?

- 🟡 **zeleno** — graf dobiven **binarnim potenciranjem**,
- 🟡 **crveno** — graf dobiven **Hornerom** iz **binomne formule**.

Za svaki n crtamo **dvije** slike **izračunatih** grafova:

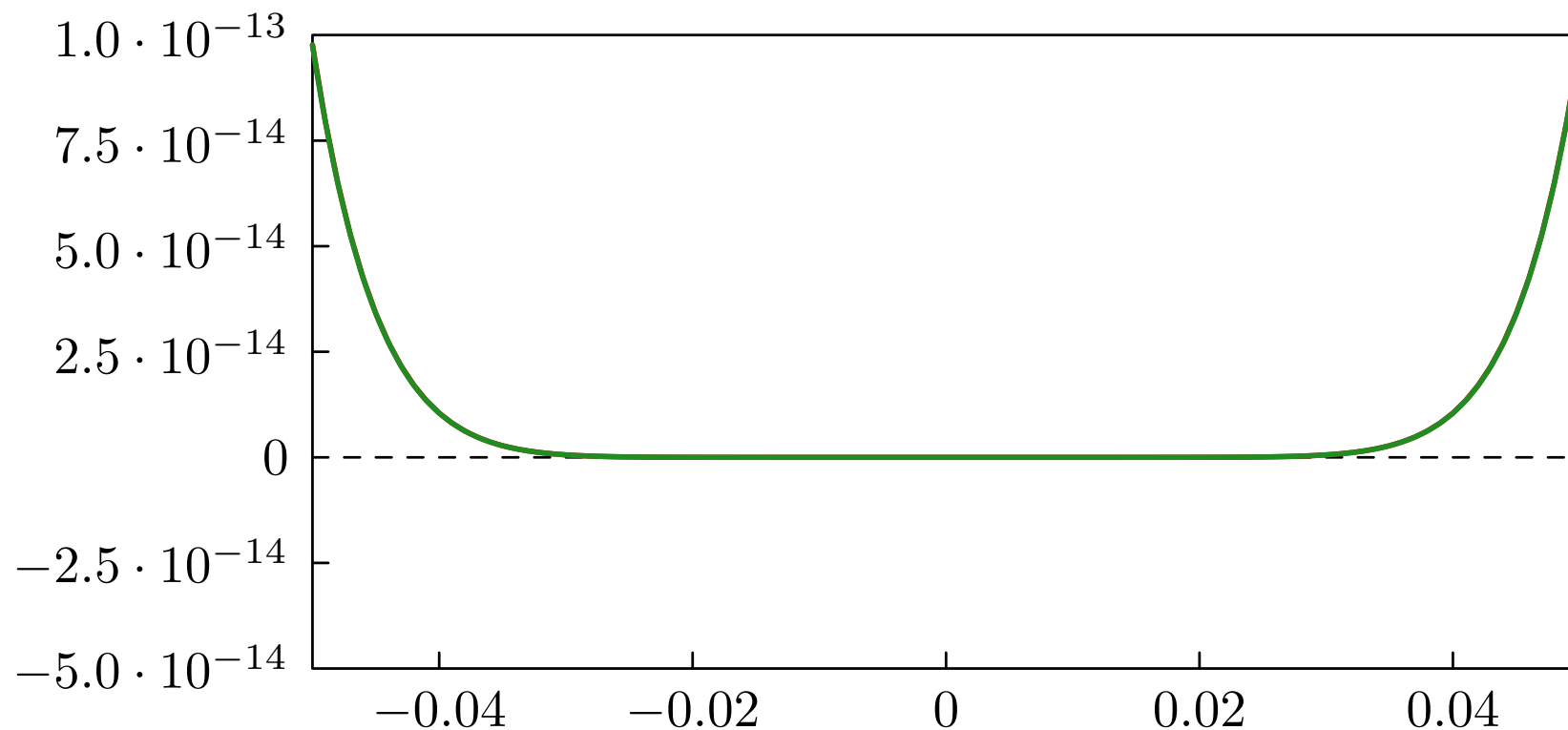
- 🟡 na intervalu $[n - 0.05, n + 0.05]$,
- 🟡 na intervalu $[n - r_n, n + r_n]$, gdje je r_n odabran tako da ovaj interval sadrži **numeričke nultočke** od f_n .

Obratite pažnju na **skale** po x i y !

- 🟡 Kako n raste, interval za **nultočke** se **širi** — r_n raste,
- 🟡 a funkcijske vrijednosti u tom intervalu postaju sve **udaljenije** od **nule** — **veće** po apsolutnoj vrijednosti.

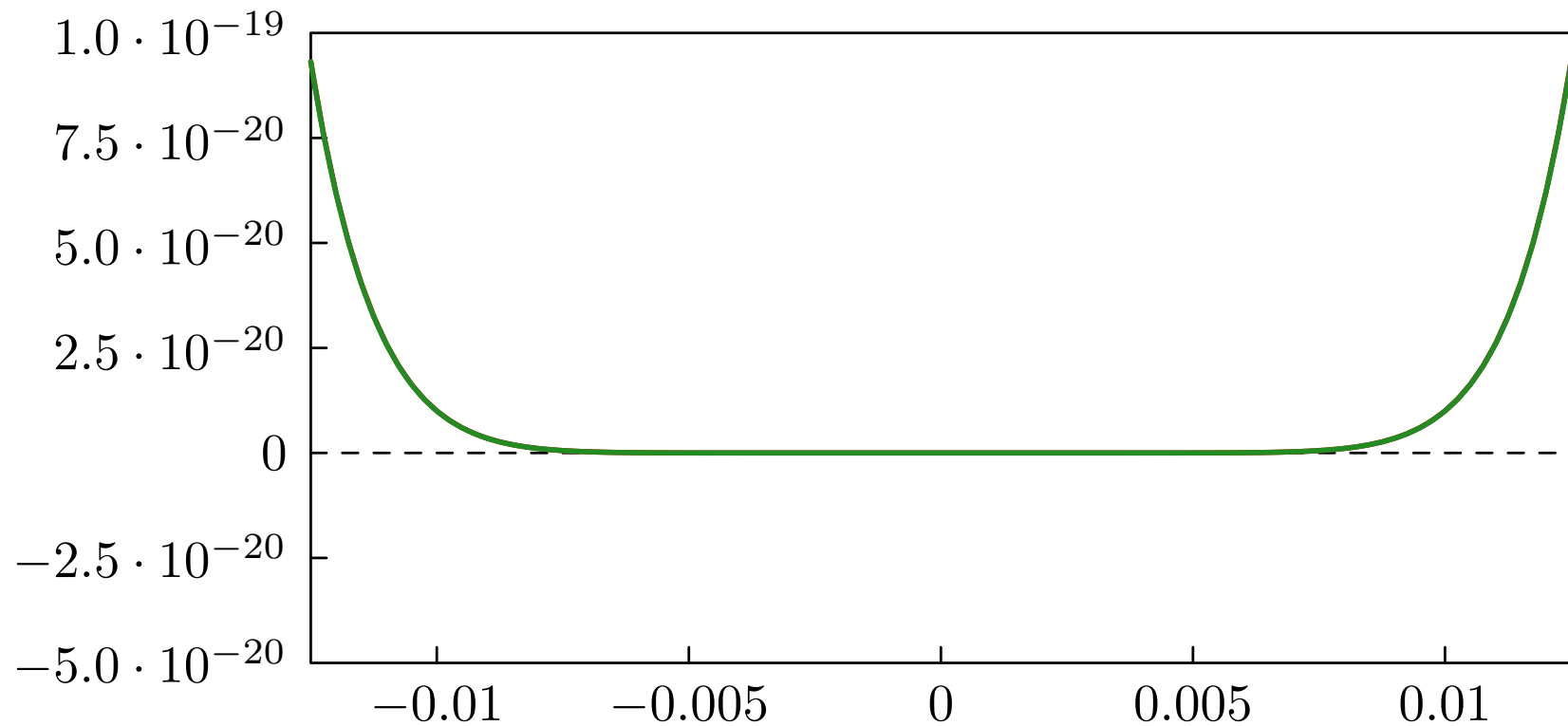
Primjer širenja grešaka — $n = 0, r = 0.05$

$$(x - 0)^{10} = x^{10}$$



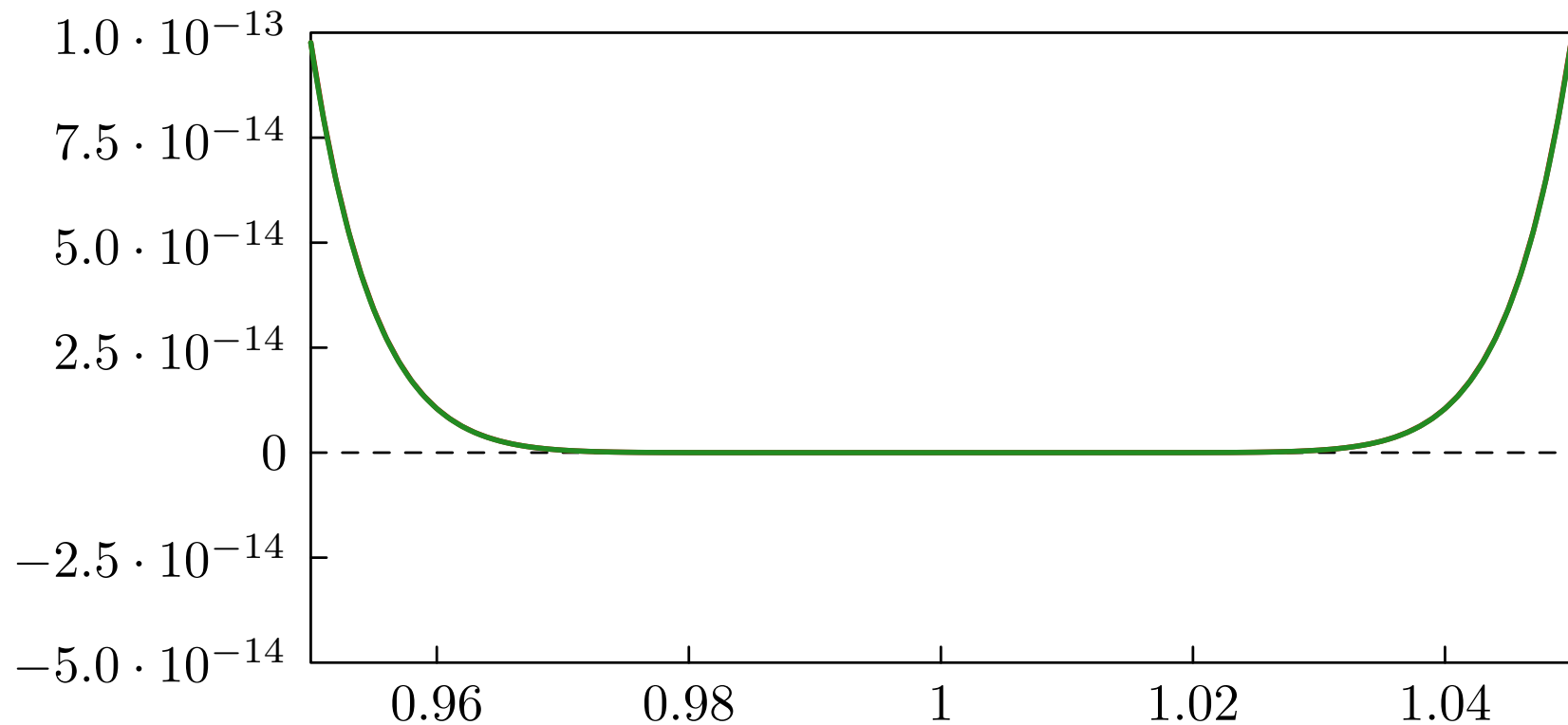
Primjer širenja grešaka — $n = 0$, $r_0 = 0.0125$

$$(x - 0)^{10} = x^{10}$$



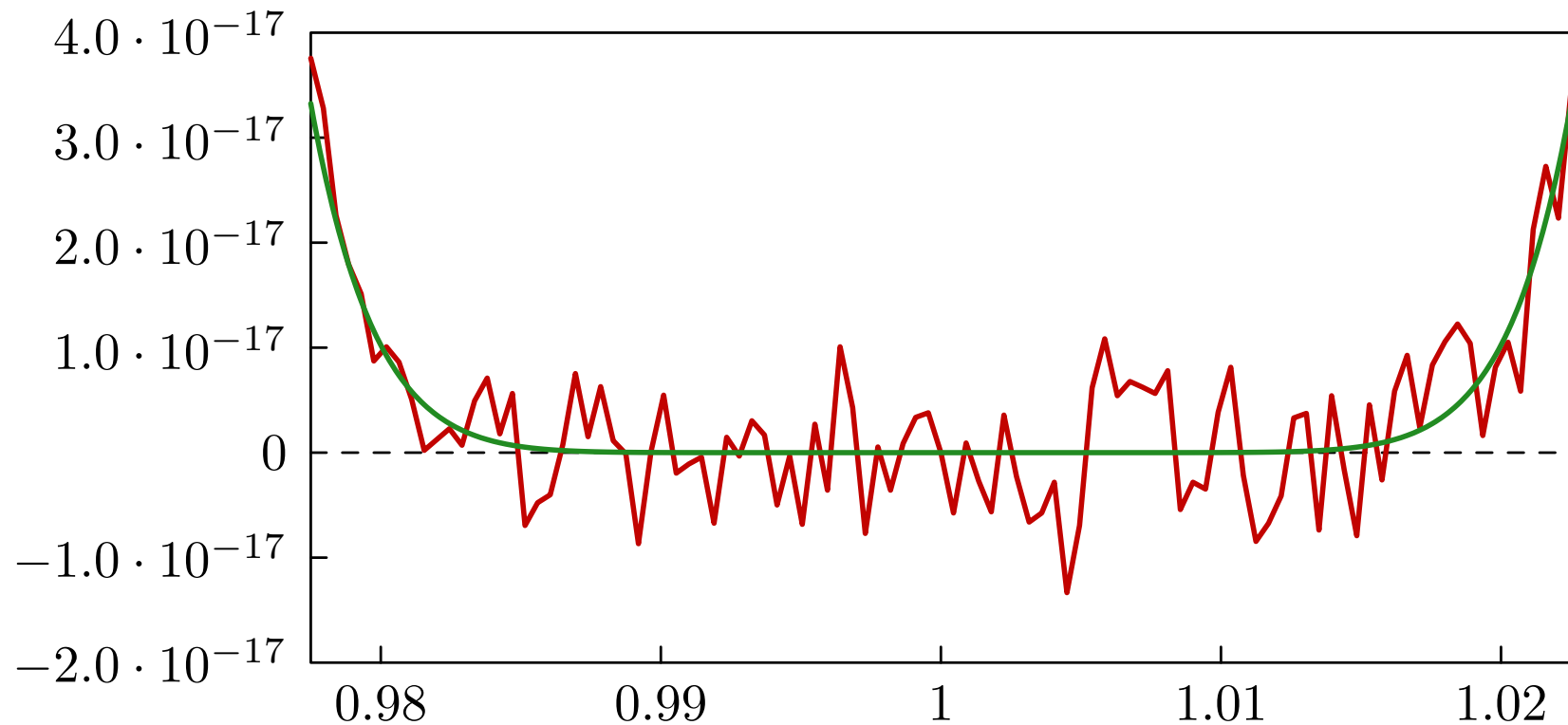
Primjer širenja grešaka — $n = 1, r = 0.05$

$$\begin{aligned}(x - 1)^{10} = & x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 \\ & - 252x^5 + 210x^4 - 120x^3 \\ & + 45x^2 - 10x + 1\end{aligned}$$



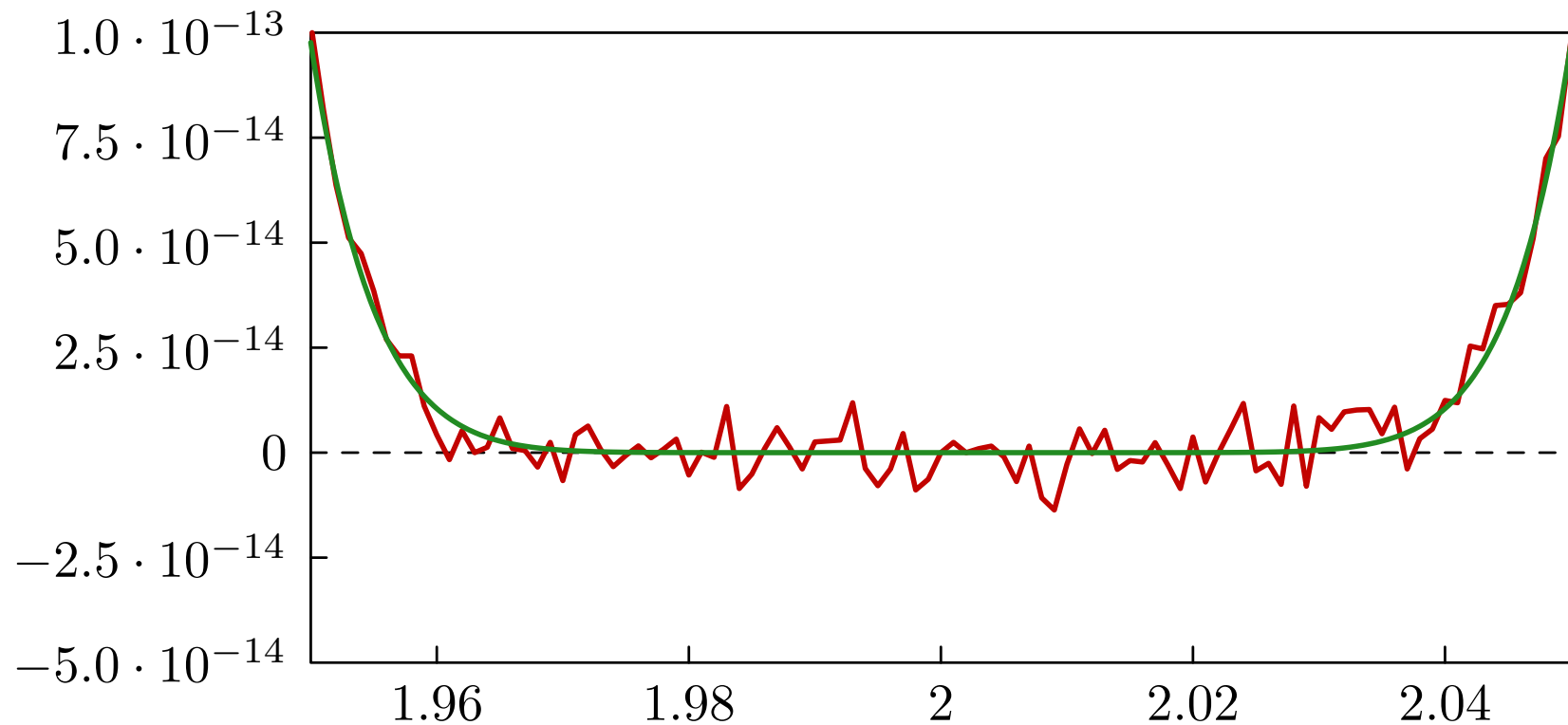
Primjer širenja grešaka — $n = 1, r_1 = 0.0225$

$$\begin{aligned}(x - 1)^{10} &= x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 \\ &\quad - 252x^5 + 210x^4 - 120x^3 \\ &\quad + 45x^2 - 10x + 1\end{aligned}$$



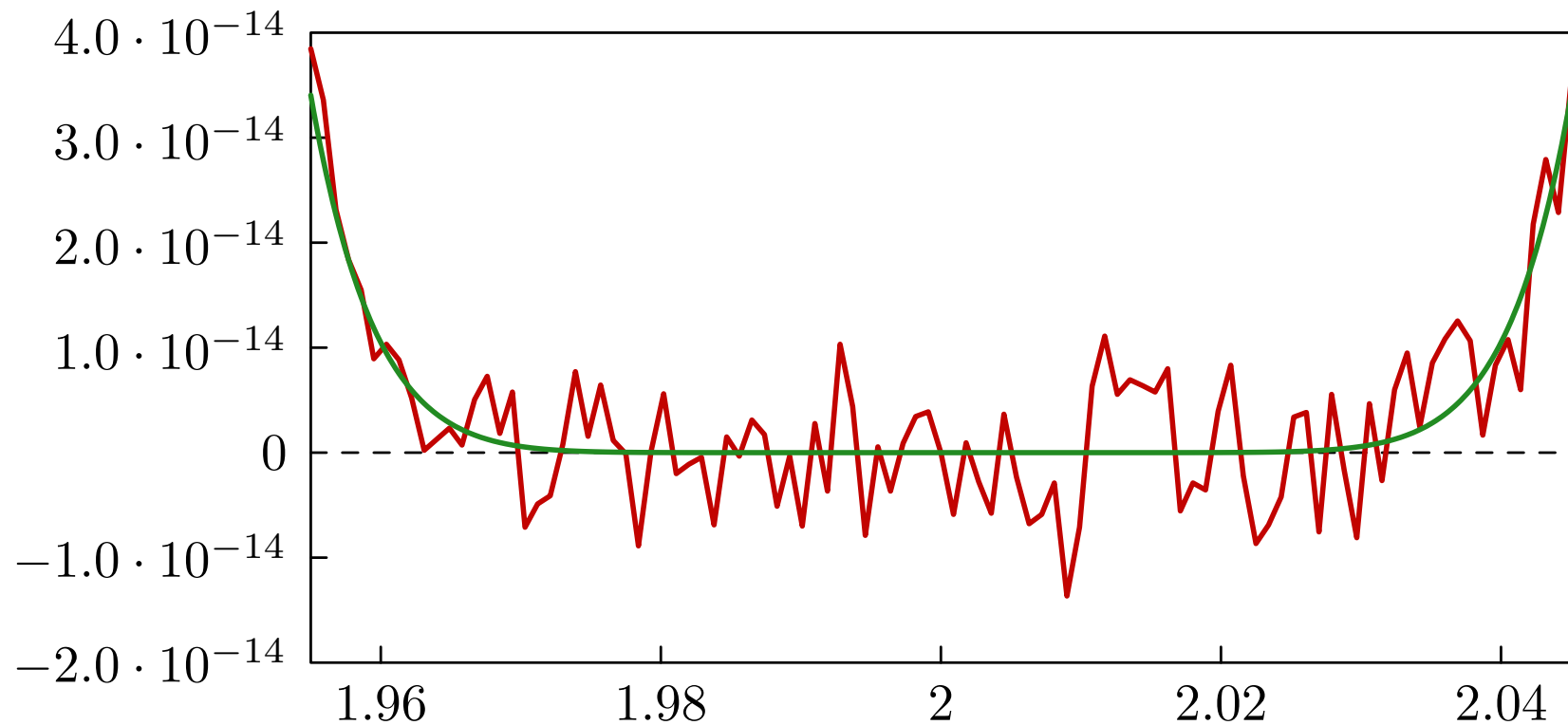
Primjer širenja grešaka — $n = 2, r = 0.05$

$$(x - 2)^{10} = x^{10} - 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 \\ - 8064x^5 + 13440x^4 - 15360x^3 \\ + 11520x^2 - 5120x + 1024$$



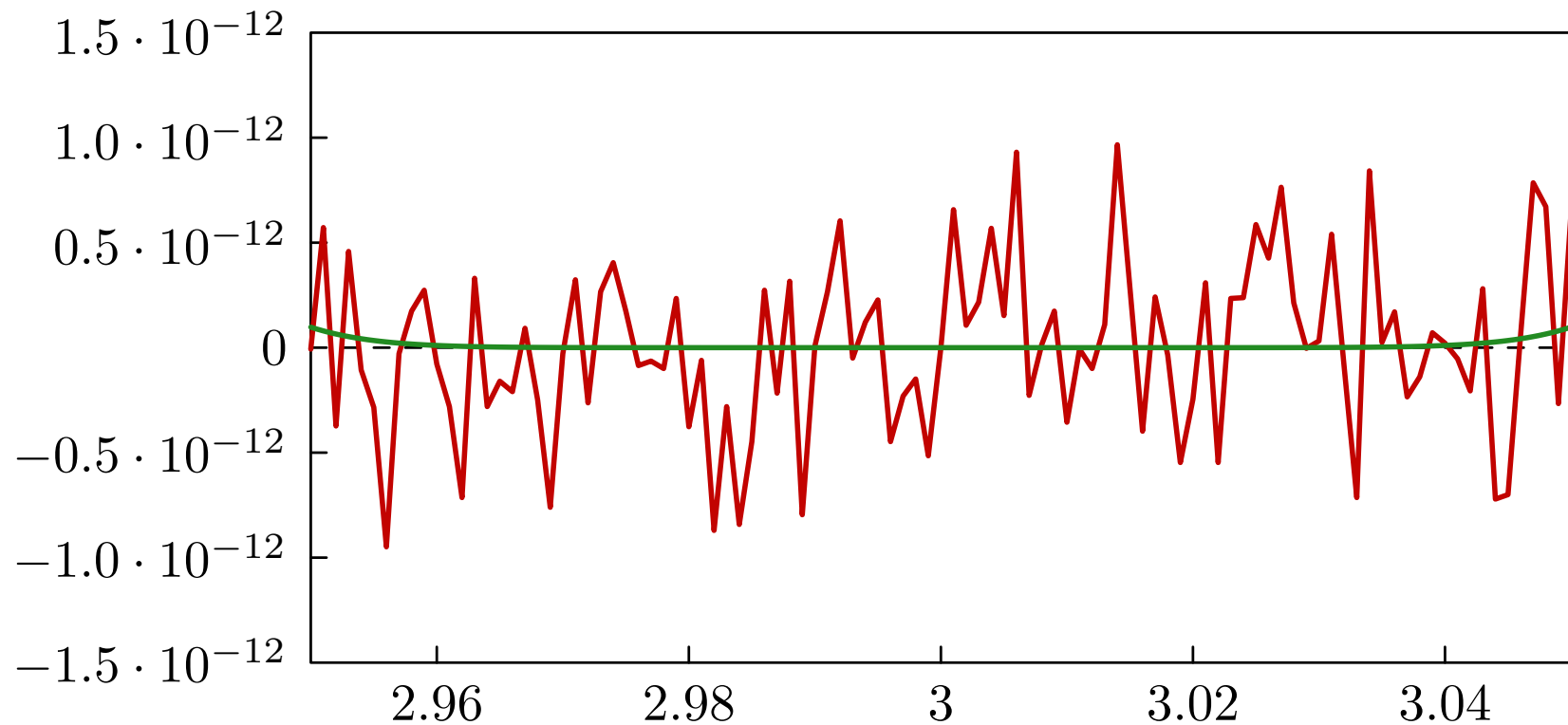
Primjer širenja grešaka — $n = 2, r_2 = 0.045$

$$(x - 2)^{10} = x^{10} - 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 \\ - 8064x^5 + 13440x^4 - 15360x^3 \\ + 11520x^2 - 5120x + 1024$$



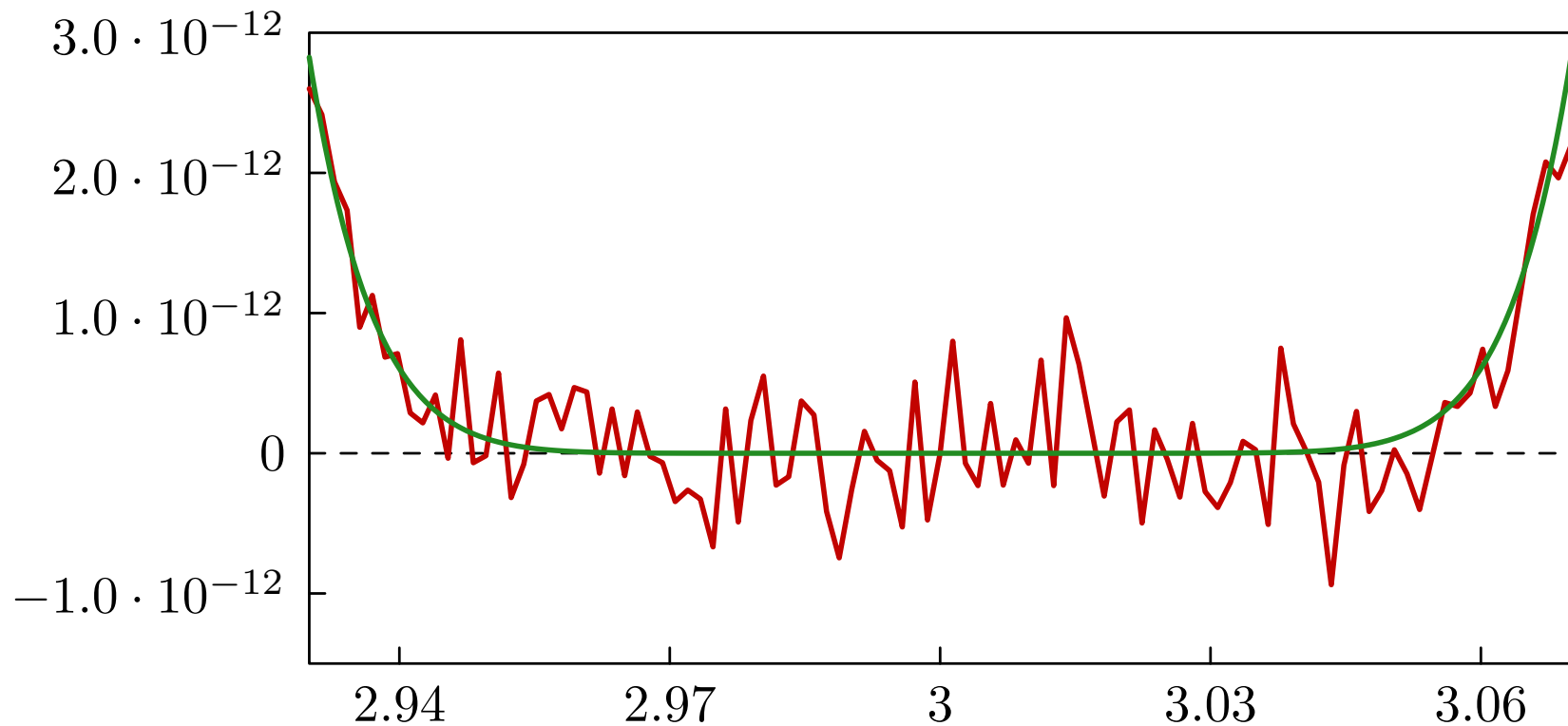
Primjer širenja grešaka — $n = 3, r = 0.05$

$$\begin{aligned}(x - 3)^{10} = & x^{10} - 30x^9 + 405x^8 - 3240x^7 + 17010x^6 \\ & - 61236x^5 + 153090x^4 - 262440x^3 \\ & + 295245x^2 - 196830x + 59049\end{aligned}$$



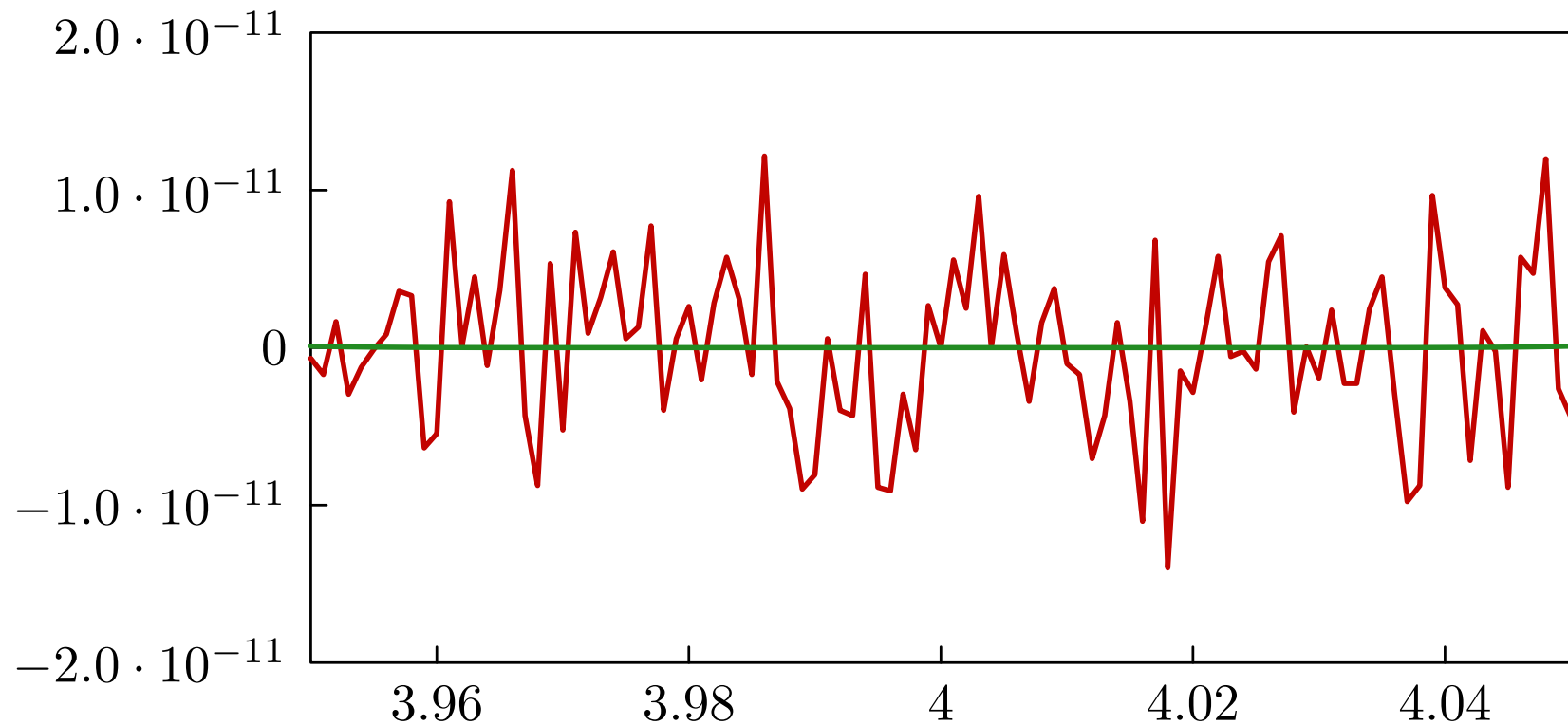
Primjer širenja grešaka — $n = 3$, $r_3 = 0.07$

$$\begin{aligned}(x - 3)^{10} = & x^{10} - 30x^9 + 405x^8 - 3240x^7 + 17010x^6 \\ & - 61236x^5 + 153090x^4 - 262440x^3 \\ & + 295245x^2 - 196830x + 59049\end{aligned}$$



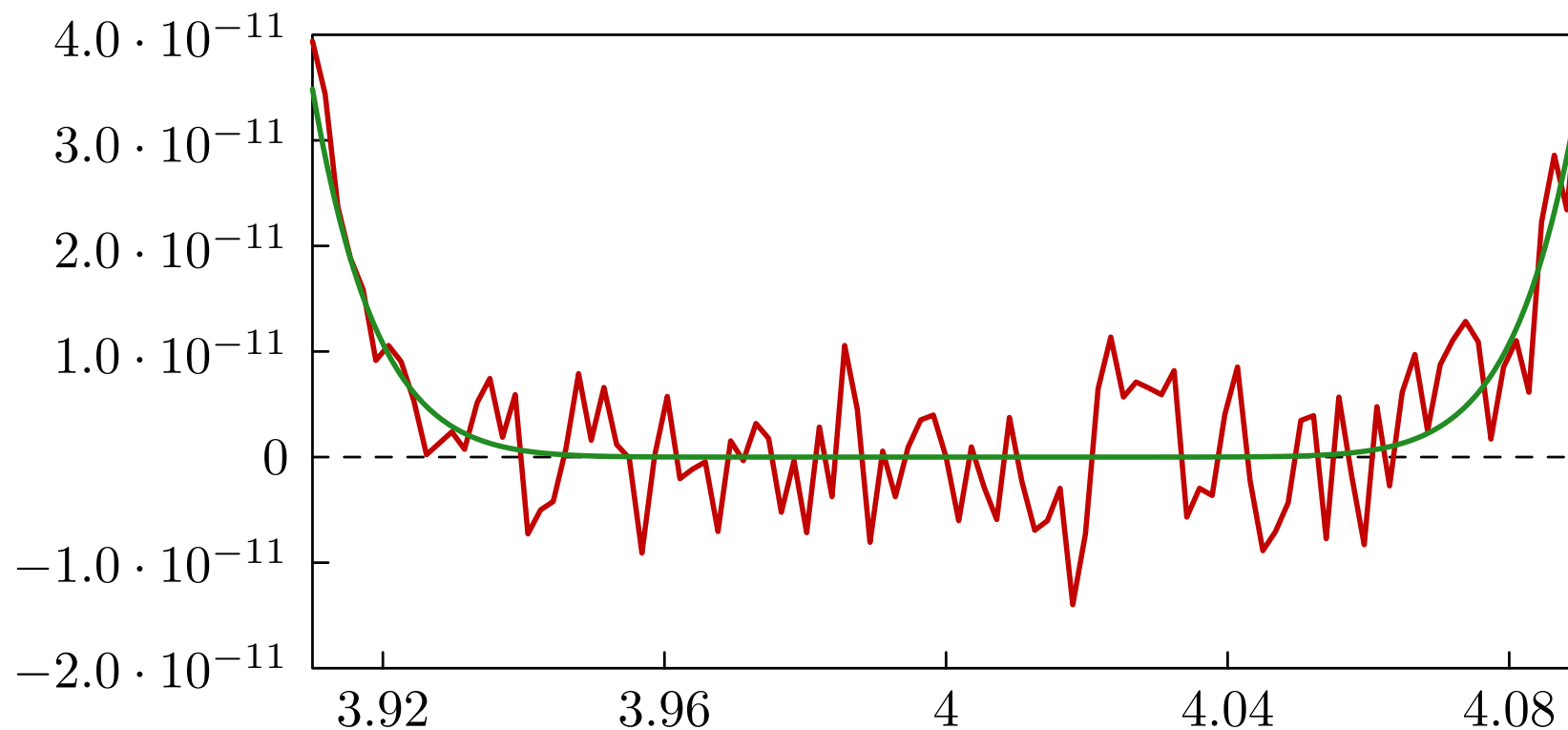
Primjer širenja grešaka — $n = 4, r = 0.05$

$$\begin{aligned}(x - 4)^{10} = & x^{10} - 40x^9 + 720x^8 - 7680x^7 + 53760x^6 \\ & - 258048x^5 + 860160x^4 - 1966080x^3 \\ & + 2949120x^2 - 2621440x + 1048576\end{aligned}$$



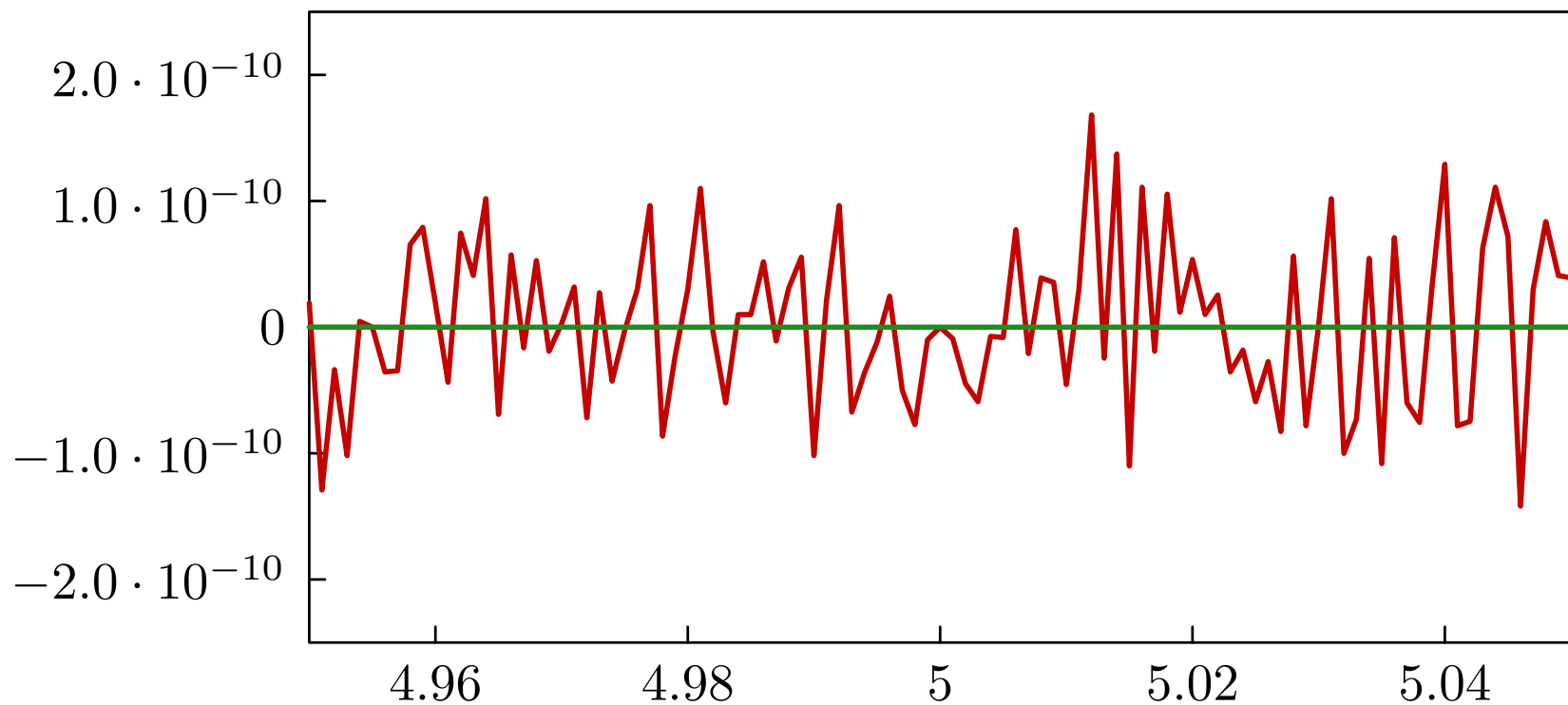
Primjer širenja grešaka — $n = 4, r_4 = 0.09$

$$\begin{aligned}(x - 4)^{10} = & x^{10} - 40x^9 + 720x^8 - 7680x^7 + 53760x^6 \\ & - 258048x^5 + 860160x^4 - 1966080x^3 \\ & + 2949120x^2 - 2621440x + 1048576\end{aligned}$$



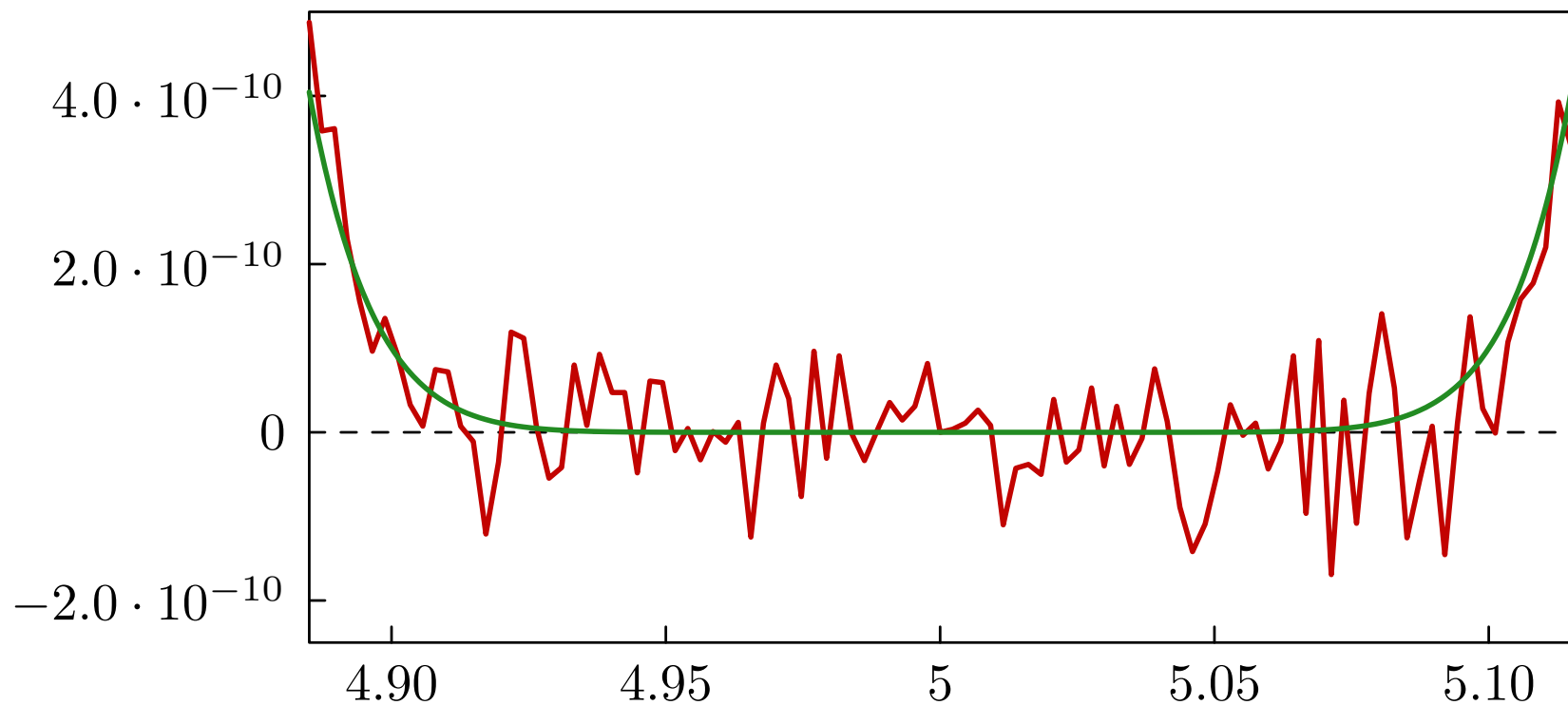
Primjer širenja grešaka — $n = 5, r = 0.05$

$$\begin{aligned}(x - 5)^{10} = & x^{10} - 50x^9 + 1125x^8 - 15000x^7 + 131250x^6 \\ & - 787500x^5 + 3281250x^4 - 9375000x^3 \\ & + 17578125x^2 - 19531250x + 9765625\end{aligned}$$



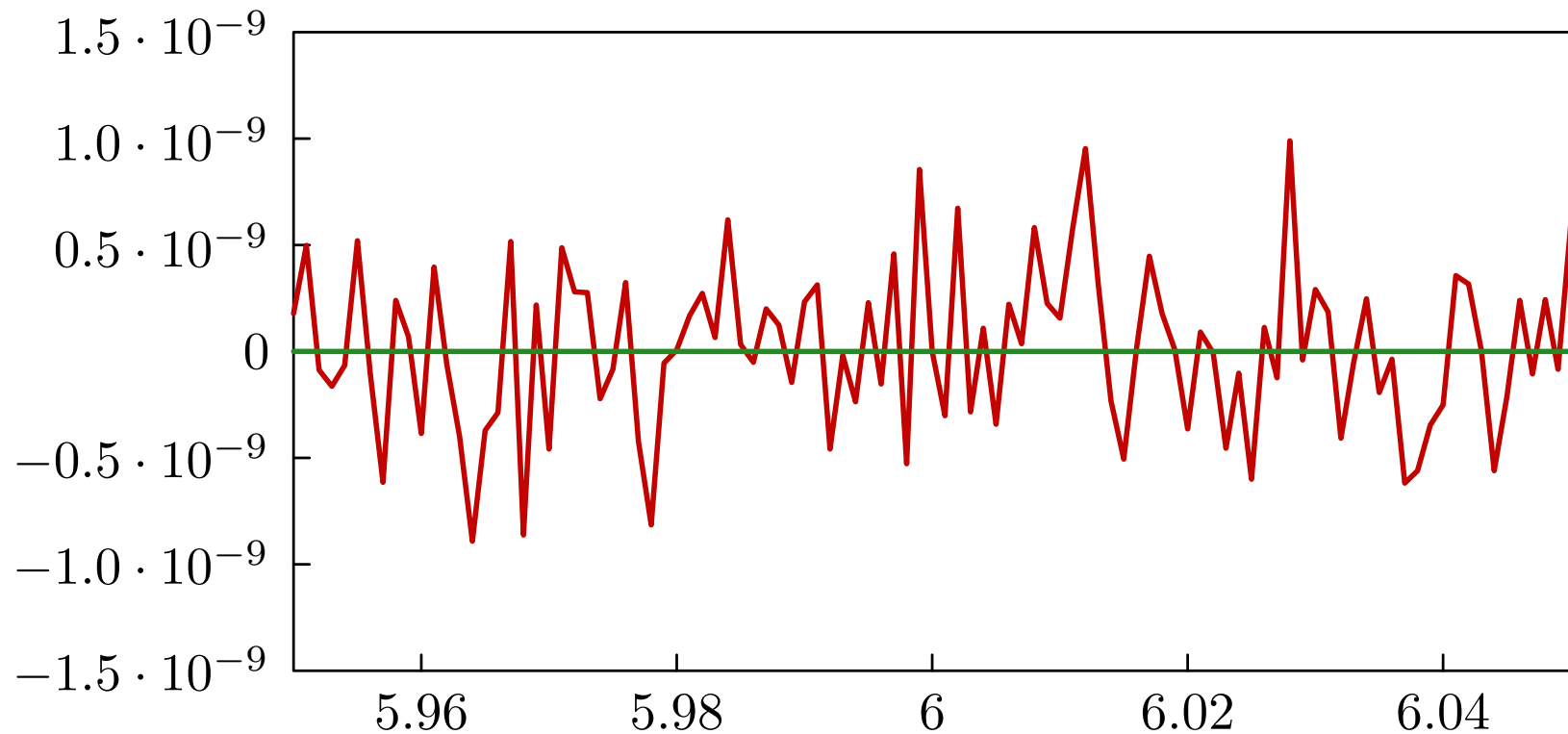
Primjer širenja grešaka — $n = 5, r_5 = 0.115$

$$\begin{aligned}(x - 5)^{10} = & x^{10} - 50x^9 + 1125x^8 - 15000x^7 + 131250x^6 \\ & - 787500x^5 + 3281250x^4 - 9375000x^3 \\ & + 17578125x^2 - 19531250x + 9765625\end{aligned}$$



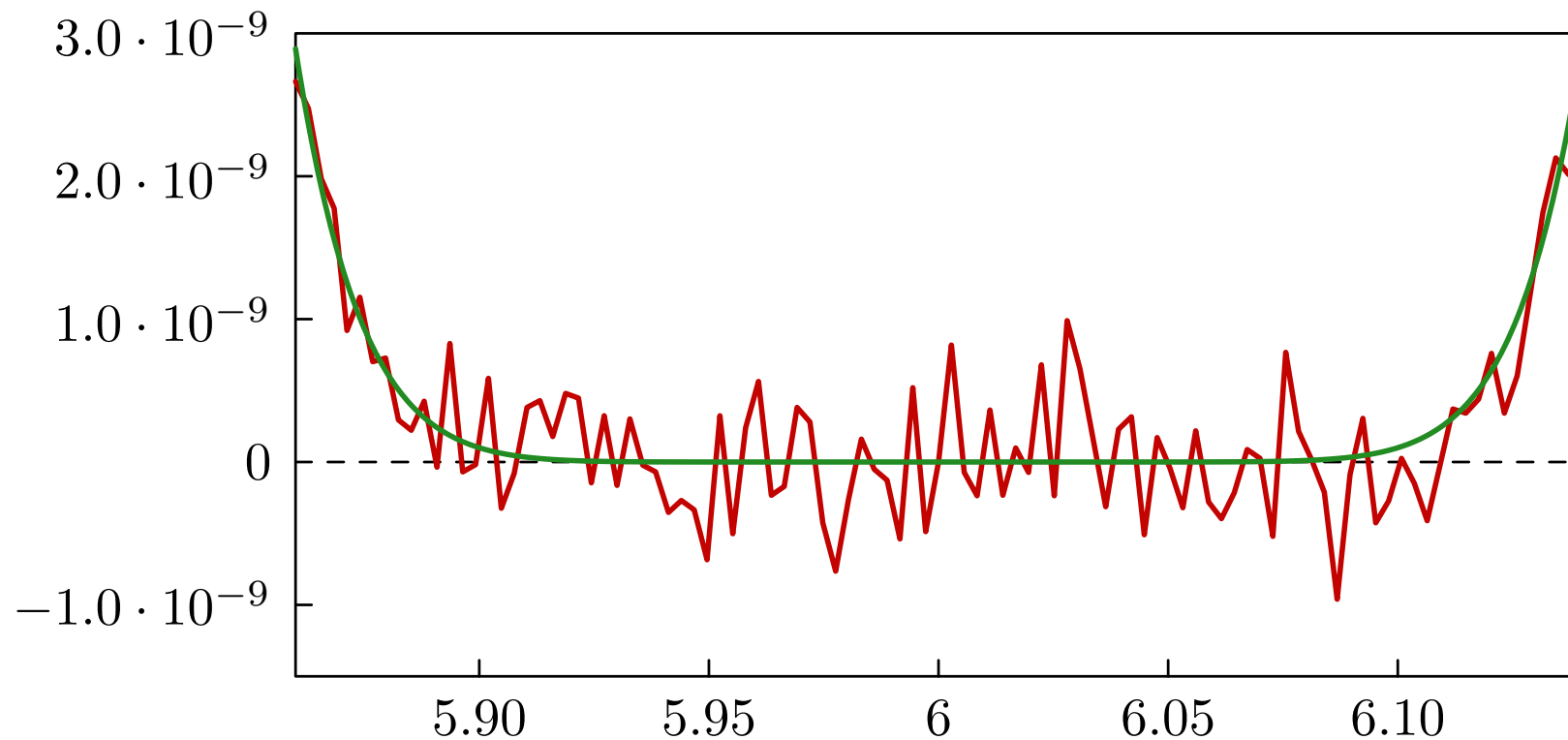
Primjer širenja grešaka — $n = 6, r = 0.05$

$$\begin{aligned}(x - 6)^{10} = & x^{10} - 60x^9 + 1620x^8 - 25920x^7 + 272160x^6 \\ & - 1959552x^5 + 9797760x^4 - 33592320x^3 \\ & + 75582720x^2 - 100776960x^1 + 60466176\end{aligned}$$



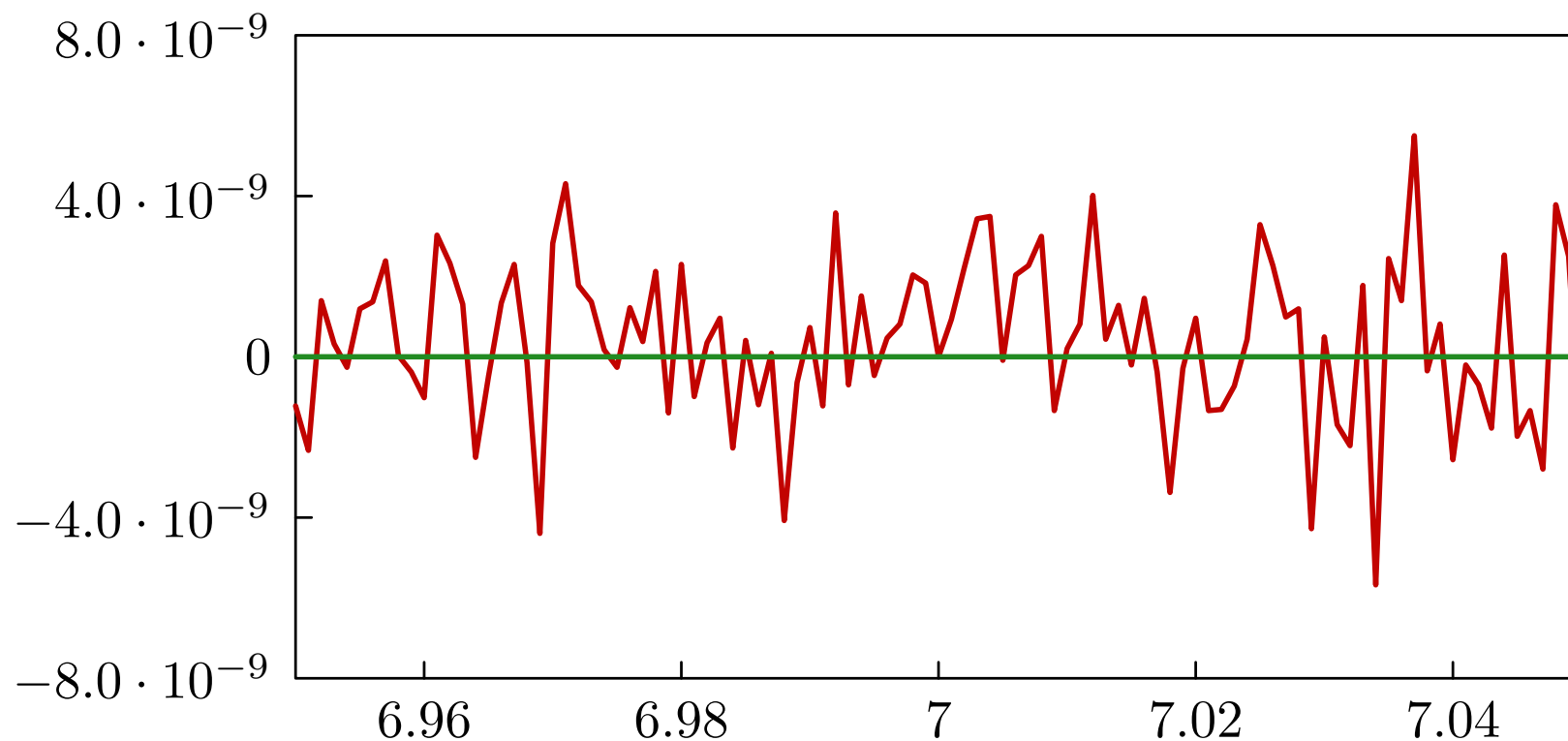
Primjer širenja grešaka — $n = 6$, $r_6 = 0.14$

$$\begin{aligned}(x - 6)^{10} = & x^{10} - 60x^9 + 1620x^8 - 25920x^7 + 272160x^6 \\ & - 1959552x^5 + 9797760x^4 - 33592320x^3 \\ & + 75582720x^2 - 100776960x^1 + 60466176\end{aligned}$$



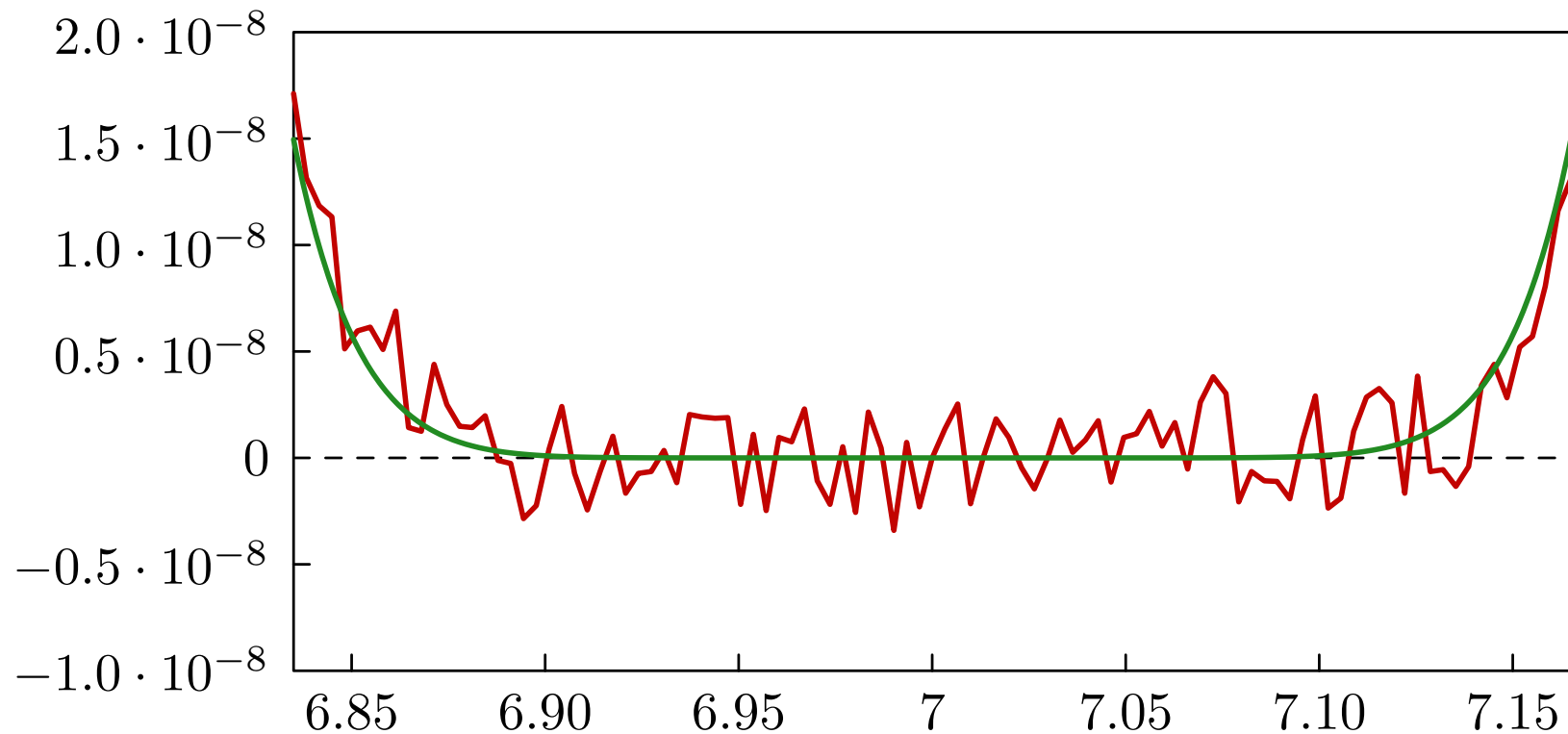
Primjer širenja grešaka — $n = 7, r = 0.05$

$$\begin{aligned}(x - 7)^{10} = & x^{10} - 70x^9 + 2205x^8 - 41160x^7 + 504210x^6 \\ & - 4235364x^5 + 24706290x^4 - 98825160x^3 \\ & + 259416045x^2 - 403536070x^1 + 282475249\end{aligned}$$



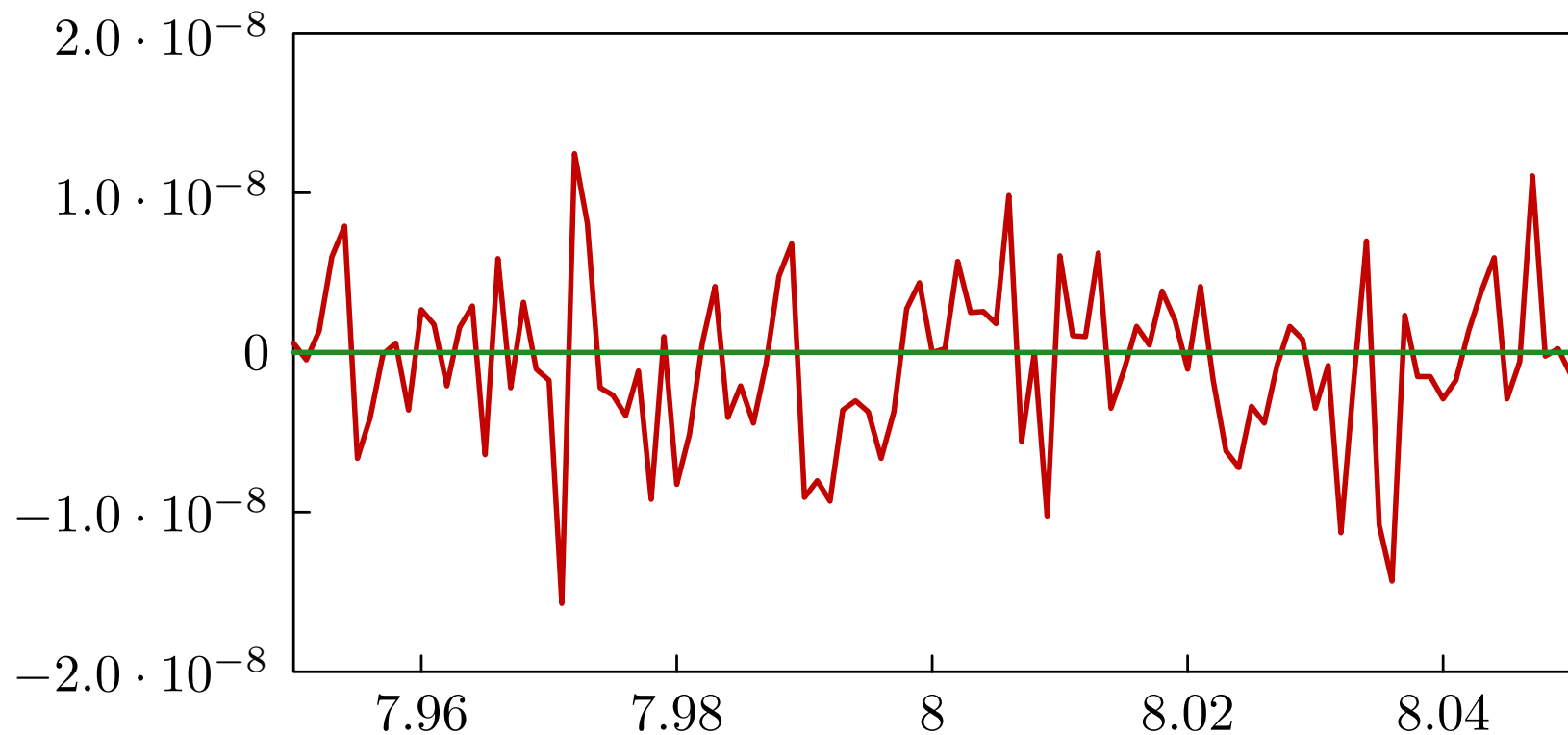
Primjer širenja grešaka — $n = 7, r_7 = 0.165$

$$\begin{aligned}(x - 7)^{10} = & x^{10} - 70x^9 + 2205x^8 - 41160x^7 + 504210x^6 \\ & - 4235364x^5 + 24706290x^4 - 98825160x^3 \\ & + 259416045x^2 - 403536070x^1 + 282475249\end{aligned}$$



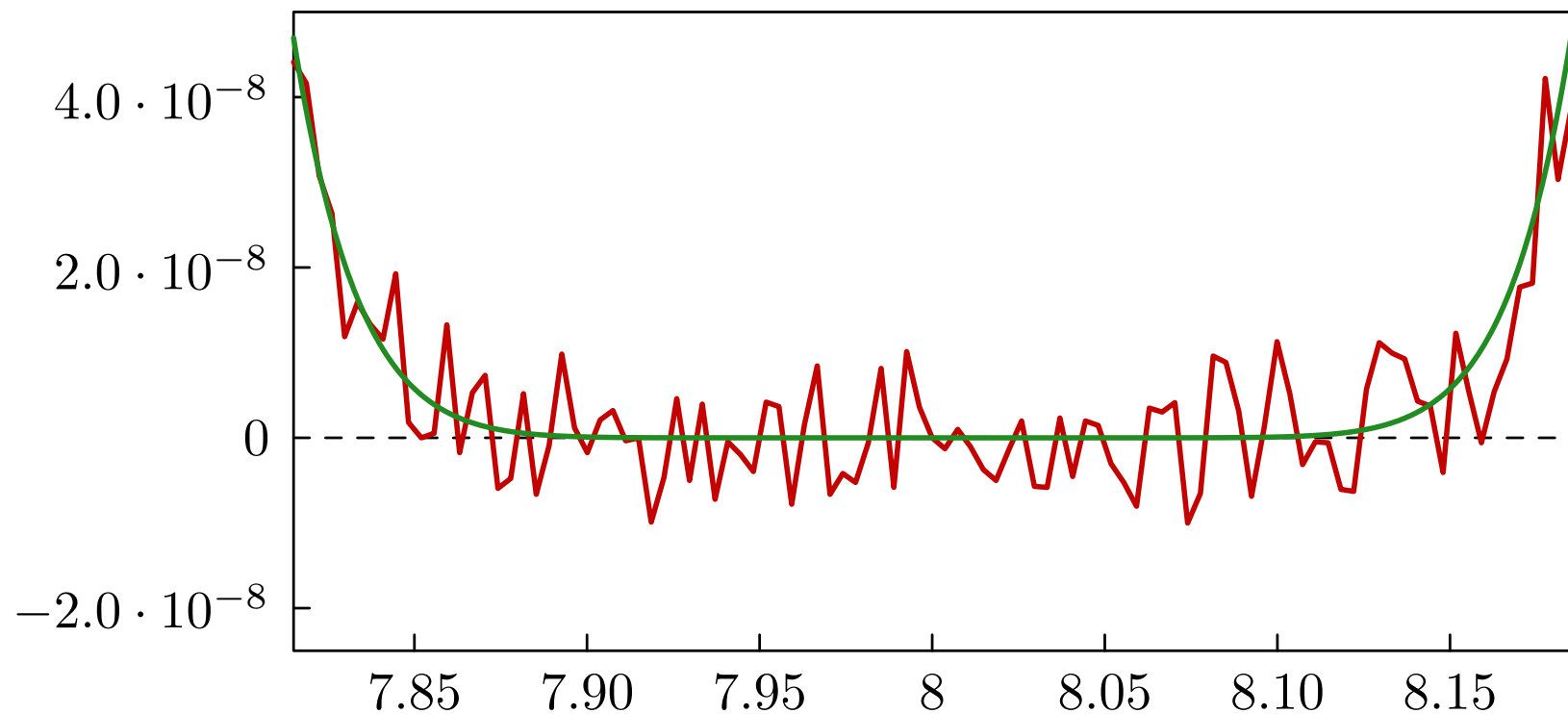
Primjer širenja grešaka — $n = 8, r = 0.05$

$$\begin{aligned}(x - 8)^{10} = & x^{10} - 80x^9 + 2880x^8 - 61440x^7 + 860160x^6 \\ & - 8257536x^5 + 55050240x^4 - 251658240x^3 \\ & + 754974720x^2 - 1342177280x^1 + 1073741824\end{aligned}$$



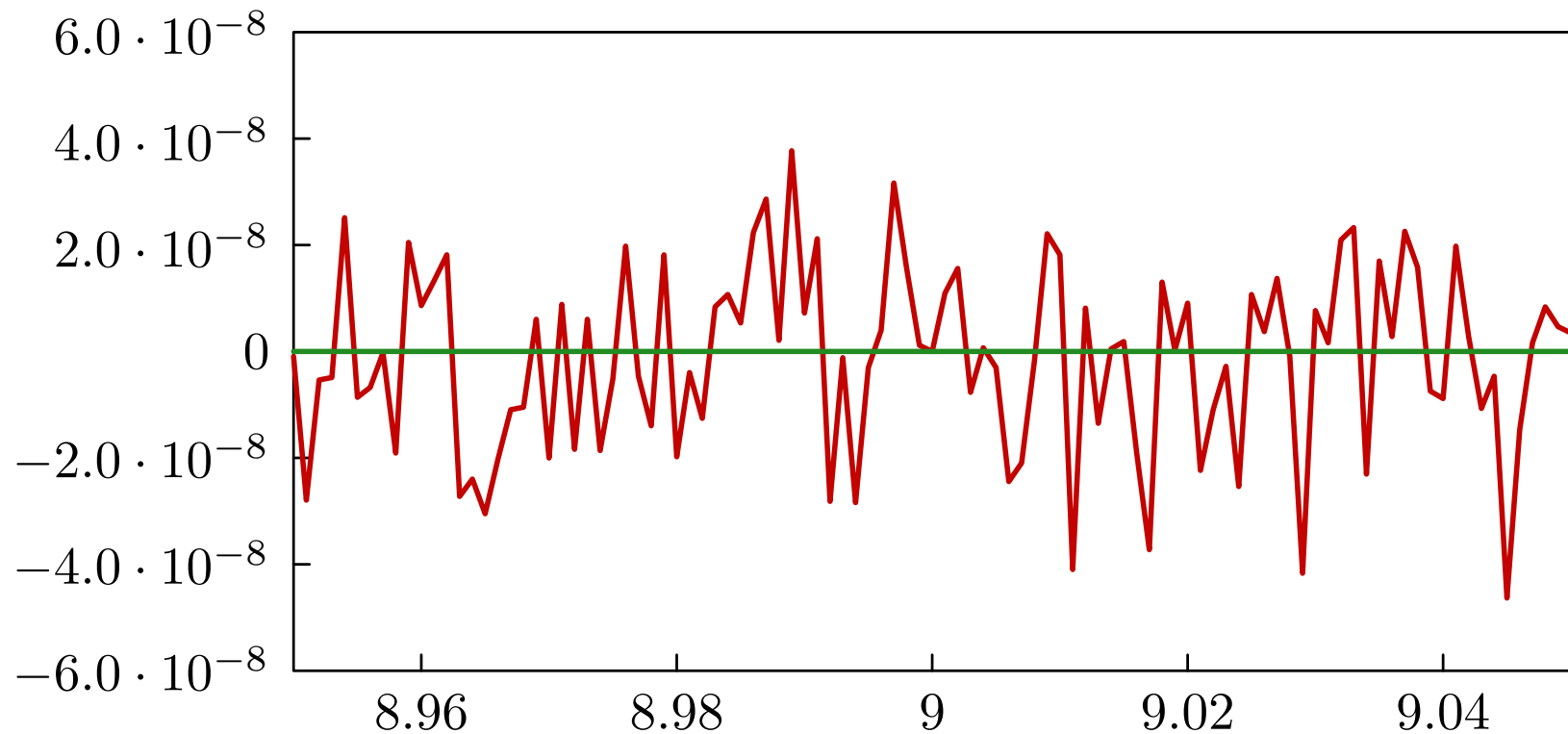
Primjer širenja grešaka — $n = 8$, $r_8 = 0.185$

$$\begin{aligned}(x - 8)^{10} = & x^{10} - 80x^9 + 2880x^8 - 61440x^7 + 860160x^6 \\ & - 8257536x^5 + 55050240x^4 - 251658240x^3 \\ & + 754974720x^2 - 1342177280x^1 + 1073741824\end{aligned}$$



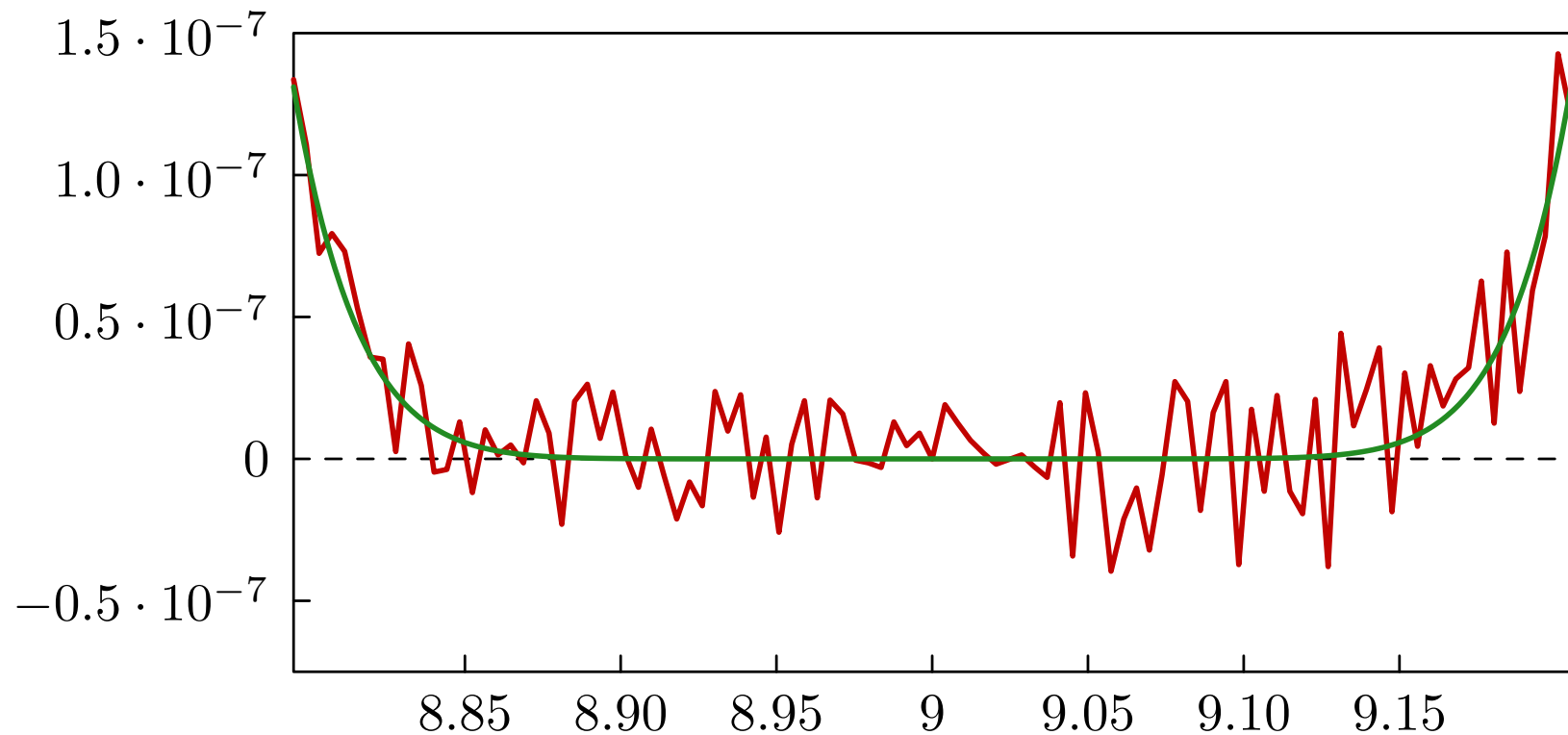
Primjer širenja grešaka — $n = 9, r = 0.05$

$$\begin{aligned}(x - 9)^{10} = & x^{10} - 90x^9 + 3645x^8 - 87480x^7 + 1377810x^6 \\ & - 14880348x^5 + 111602610x^4 - 573956280x^3 \\ & + 1937102445x^2 - 3874204890x^1 + 3486784401\end{aligned}$$



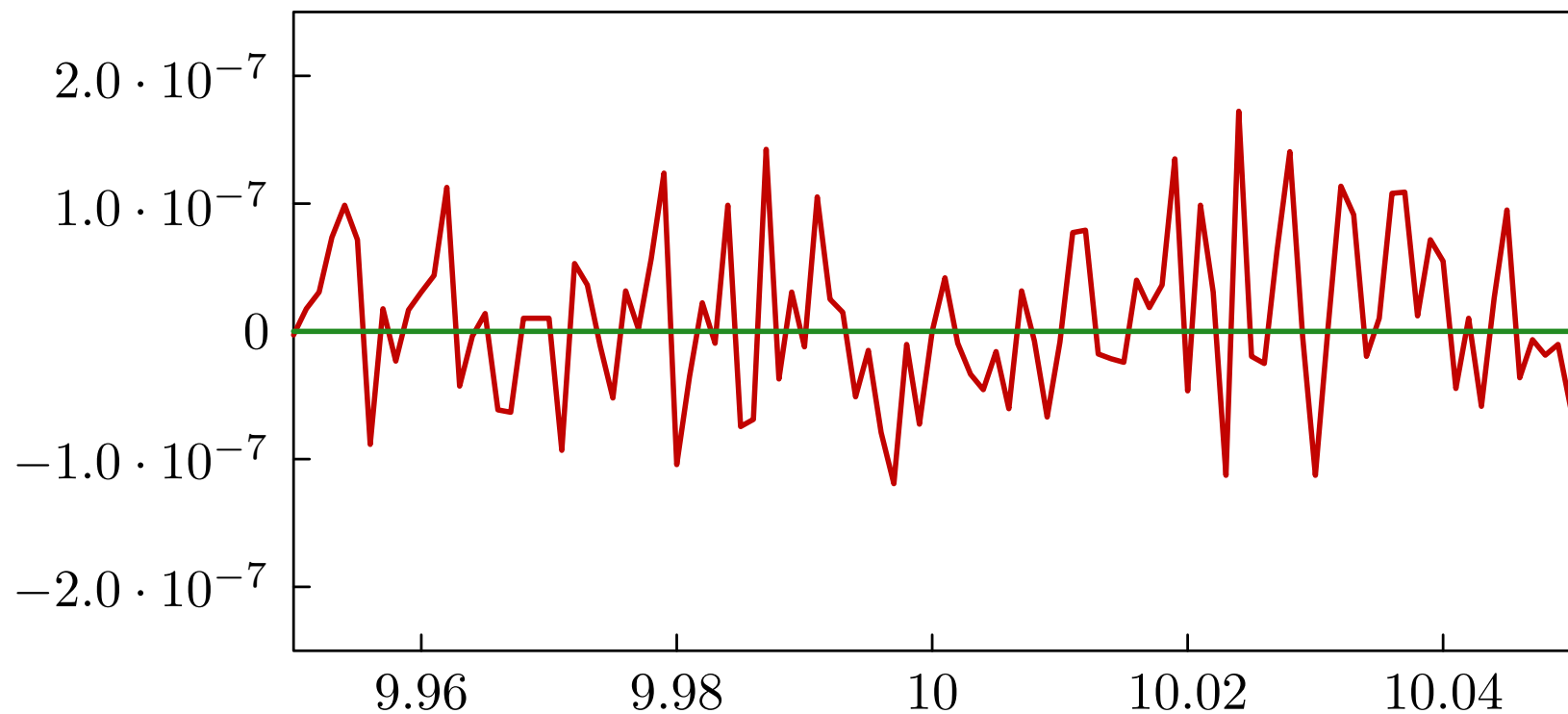
Primjer širenja grešaka — $n = 9, r_9 = 0.205$

$$\begin{aligned}(x - 9)^{10} = & x^{10} - 90x^9 + 3645x^8 - 87480x^7 + 1377810x^6 \\ & - 14880348x^5 + 111602610x^4 - 573956280x^3 \\ & + 1937102445x^2 - 3874204890x^1 + 3486784401\end{aligned}$$



Primjer širenja grešaka — $n = 10, r = 0.05$

$$\begin{aligned}(x - 10)^{10} = & x^{10} - 100x^9 + 4500x^8 - 120000x^7 + 2100000x^6 \\ & - 25200000x^5 + 210000000x^4 - 1200000000x^3 \\ & + 4500000000x^2 - 10000000000x^1 + 10000000000\end{aligned}$$



Primjer širenja grešaka — $n = 10, r_{10} = 0.23$

$$\begin{aligned}(x - 10)^{10} = & x^{10} - 100x^9 + 4500x^8 - 120000x^7 + 2100000x^6 \\ & - 25200000x^5 + 210000000x^4 - 1200000000x^3 \\ & + 4500000000x^2 - 10000000000x^1 + 10000000000\end{aligned}$$

