Numerička analiza
17. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr
web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Verižni razlomci i racionalna interpolacija:
  - Brojevni verižni razlomci.
  - Uzlazni algoritam za računanje verižnih razlomaka.
  - I i II tip verižnog razlomka.
  - Silazni algoritam za računanje verižnih razlomaka.
  - Funkcijski verižni razlomci — I i II tip.
  - Pretvaranje iz prvog u drugi tip.
  - Recipročne i inverzne razlike.
  - Thieleova racionalna interpolacija.
  - Primjeri racionalne interpolacije i ekstrapolacije.

Verižni razlomci

Racionalne aproksimacije i verižni razlomci

Već smo zaključili da efektivno možemo računati samo

- racionalne aproksimacije funkcija (4 osnovne aritmetičke operacije).

Za praktičnu primjenu racionalnih aproksimacija trebamo

- dobre algoritme za njihovo izvrednjavanje.

Pretpostavimo da je zadana racionalna funkcija oblika

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

gdje su P_n i Q_m polinomi stupnjeva n i m, respektivno,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Dvostruki Horner, ili — može li bolje?

Za izvrednjavanje racionalne funkcije možemo koristiti

- dvije Hornerove sheme — za polinom u brojniku i polinom u nazivniku,
- i jedno dijeljenje — na kraju.

Broj potrebnih operacija je

- $n + m$ množenja, $n + m$ zbrajanja i jedno dijeljenje.

Takvo izvrednjavanje racionalne funkcije nije idealno,

- jer se ono može izvršiti i s manje operacija.

No, puno veći praktični problem je

- prikazivost brojeva u brojniku i nazivniku.

Problem — dijeljenje velikih brojeva

Recimo, u točki x_0, vrijednost racionalne funkcije $R(x_0)$ je

- neki broj razumnog reda veličine.

Može se dogoditi da je taj broj dobiven

- dijeljenjem dva vrlo velika broja, $P_n(x_0)$ i $Q_m(x_0)$,
- koja nisu prikaziva u aritmetici računala!

Tipičan primjer je $\operatorname{th} x$ — ograničen za $x \to \pm\infty$.

Uzrok toga je ponašanje polinoma za "velike" argumente:

- rezultat mora biti "veliki" broj.

Racionalne aproksimacije i verižni razlomci

U teoriji nepolinomnih, odnosno, racionalnih aproksimacija, može se pokazati da su (uz neke uvjete)

- najbolje racionalne aproksimacije = one kod kojih za stupnjeve n i m vrijedi: $n = m$ ili $n = m + 1$,
- tj. stupanj polinoma u brojniku je jednak ili za jedan veći od stupnja polinoma u nazivniku.

To su tzv. "stepenice" uz dijagonalu Padéove (n, m) tablice.

U tom slučaju, racionalnu aproksimaciju možemo napisati

- kao funkcijski verižni razlomak.

Brzina računanja i problem "overflowa" riješeni su

- načinom izvrednjavanja takvog verižnog razlomka.

No, prije funkcijskih, upoznajmo brojevne verižne razlomke.

Brojevni verižni razlomci

Izraz oblika

$$R = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots}}}}$$

zovemo brojevni verižni razlomak.

Ovdje su $b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ realni ili kompleksni brojevi.

Zbog štednje prostora, postoje "kraći", alternativni zapisi.

Brojevni verižni razlomci — zapis

U literaturi nailazimo na tri oblika zapisa verižnih razlomaka:

$$R = \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \right],$$

$$R = b_0 + \frac{a_1 \,|}{|\, b_1} + \frac{a_2 \,|}{|\, b_2} + \frac{a_3 \,|}{|\, b_3} + \cdots \,,$$

i možda najzgodniji zapis

$$R = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \, \frac{a_2}{b_2 +} \, \frac{a_3}{b_3 +} \, \cdots \,.$$

Katkad se piše i

$$R = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \, \frac{a_2}{b_2 +} \, \frac{a_3}{b_3 +} \, \cdots \,.$$

Brojevni verižni razlomci — n-ta konvergencija

Ako u beskonačnom verižnom razlomku uzmemo samo prvih konačno mnogo članova, dobivamo broj

$$R_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\,\frac{a_2}{b_2 +}\,\frac{a_3}{b_3 +}\cdots\frac{a_n}{b_n}.$$

Takav izraz zove se n-ta konvergencija verižnog razlomka R.

Zapis ili "član"

$$\frac{a_k}{b_k +}$$

zove se karika ili veriga verižnog razlomka.

Ideja: sljedeća konvergencija dobiva se

- dodavanjem nove karike, kao u lancu.

Vrijednost brojevnog verižnog razlomka

Ako postoji limes

$$\lim_{n\to\infty} R_n,$$

onda se vrijednost verižnog razlomka R definira kao

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n.$$

Praktični problem: za zadani n, trebamo algoritam za brzo računanje vrijednosti

- samo n-te konvergencije R_n,
- svih konvergencija do n-te, tj. vrijednosti $R_0, \ldots, R_n$.

Prirodni put za obje stvari je

- uzlazno po indeksima — od R_0, prema R_n.

Uzlazni algoritam — početak

Ideja: n-tu konvergenciju verižnog razlomka možemo prikazati u "racionalnom" obliku, kao kvocijent brojeva P_n i Q_n

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\cdots\frac{a_n}{b_n},$$

a zatim tražimo rekurzije za P_n i Q_n.

Za nultu konvergenciju R_0, zapis je

$$R_0 = \frac{P_0}{Q_0} = b_0,$$

pa možemo izabrati da je $P_0 = b_0$, $Q_0 = 1$.

Mogli smo i drugačije birati — jedini uvjet je $P_0/Q_0 = b_0$.

Uzlazni algoritam — prva konvergencija

Za sljedeću konvergenciju R_1 vrijedi

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = \frac{b_1 P_0 + a_1}{b_1 Q_0}.$$

Ako još definiramo $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, prethodna relacija glasi

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_1 P_0 + a_1 P_{-1}}{b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}}.$$

Ponovno možemo zatražiti da je brojnik jednak brojniku, a nazivnik nazivniku, tj. da je

$$P_1 = b_1 P_0 + a_1 P_{-1}, \qquad Q_1 = b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}.$$

Te dvije relacije su baza indukcije.

Uzlazni algoritam — indukcija

Neka je $R_n = P_n/Q_n$, uz $n \geq 1$, i pretpostavimo da za P_n i Q_n vrijede relacije

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \qquad Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}.$$

Pogledajmo što se događa pri prijelazu iz R_n u sljedeću konvergenciju R_{n+1},

$$R_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \cdots \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow R_{n+1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \cdots \frac{a_n}{b_n +} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Vidmo da b_n prelazi u

$$b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Kad tu zamjenu napravimo u P_n i Q_n — dobivamo R_{n+1}.

Uzlazni algoritam — indukcija (nastavak)

Dakle, za R_{n+1} vrijedi

$$R_{n+1} = \frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}},$$

gdje je — pretpostavka indukcije i zamjena $b_n \to b_n + \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$,

$$\begin{aligned}
P'_{n+1} &= \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) P_{n-1} + a_n P_{n-2} \\
&= (b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}) + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1} = P_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1}, \\
Q'_{n+1} &= \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \\
&= (b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}) + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1} = Q_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1}.
\end{aligned}$$

Uzlazni algoritam — indukcija (nastavak)

Ako definiramo

$$P_{n+1} = b_{n+1} P'_{n+1},$$
$$Q_{n+1} = b_{n+1} Q'_{n+1},$$

onda R_{n+1} ostaje nepromijenjen (brojnik i nazivnik su skalirani istim brojem b_{n+1}), a prethodna rekurzija postaje

$$P_{n+1} = b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1},$$
$$Q_{n+1} = b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}.$$

Time smo dokazali korak indukcije.

Uzlazni algoritam — rekurzija

Drugim riječima, uz start rekurzije definiran relacijama

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad P_0 = b_0, \quad Q_0 = 1,$$

dobivamo tzv. uzlazni algoritam izvrednjavanja konvergencija verižnog razlomka

$$\begin{aligned} P_k &= b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}, \\ Q_k &= b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

s tim da za konvergencije vrijedi $R_k = P_k / Q_k$, za $k = 0, \ldots, n$.

Primijetite da se u ovakvom zapisu algoritma

- lako mogu dodavati novi a_k i b_k,
- tj. nove karike u verižnom razlomku.

Uzlazni algoritam — ideje za ubrzanje

Iz rekurzije se lako čita da su P_k i Q_k dva rješenja iste diferencijske jednadžbe

$$y_k - b_k y_{k-1} - a_k y_{k-2} = 0,$$

samo s različitim početnim uvjetima.

Broj potrebnih operacija u uzlaznom algoritmu je

- 4 množenja i 2 zbrajanja za svaku konvergenciju.

U algoritmu izvrednjavanja bilo bi dobro da su,

- ili svi koeficijenti a_k, ili svi koeficijenti b_k jednaki 1,

tako da ne moramo množiti tim koeficijentima. Ušteda je polovina svih množenja!

To se može postići tzv. ekvivalentnim transformacijama.

Ekvivalentne transfomacije

Neka su w_k, za $k \geq 1$, proizvoljni brojevi različiti od 0 i neka je $w_{-1} = w_0 = 1$.

Tvrdnja. Verižni razlomak

$$R' = b_0 + \frac{w_0 w_1 a_1}{w_1 b_1 +} \, \frac{w_1 w_2 a_2}{w_2 b_2 +} \, \frac{w_2 w_3 a_3}{w_3 b_3 +} \cdots$$

ima iste konvergencije kao i polazni verižni razlomak R, tj. vrijedi

$$R'_n = R_n, \quad \text{za svaki } n \geq 0.$$

Drugim riječima,

- uzlazni algoritam daje isti niz rezultata na R i R'.

Ekvivalentne transfomacije (nastavak)

Dokaz ide indukcijom,

- po rekurzijama iz uzlaznog algoritma za R i R'.

Neka su S_n i T_n, redom, brojnik i nazivnik n-te konvergencije R'_n iz uzlaznog algoritma za R', a P_n i Q_n to isto za R.

Indukcijom se lako pokazuje da vrijedi

$$S_k = P_k \cdot \prod_{i=1}^{k} w_i, \quad T_k = Q_k \cdot \prod_{i=1}^{k} w_i, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

No, onda je $R'_n = \dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{P_n}{Q_n} = R_n$, za svaki $n \geq 0$. ■

Sada možemo verižni razlomak R svesti na ekvivalentnu formu, tako da ili a_k, ili b_k budu svi jednaki 1.

Brojnici jednaki 1 — II tip verižnog razlomka

Verižni razlomak u kojem su svi brojnici jednaki 1

- zove se verižni razlomak II tipa (= dolje je “zanimljivo”).

Dobiva se na sljedeći način.

Pretpostavimo da je $a_k \neq 0$, za sve $k \geq 1$. Onda faktore w_k možemo izabrati tako da vrijedi

$$w_1 a_1 = 1, \quad w_1 w_2 a_2 = 1, \quad \dots, \quad w_{n-1} w_n a_n = 1, \quad \dots.$$

Odatle odmah slijedi da je

$$w_{2k} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}, \quad w_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}{a_1 a_3 \cdots a_{2k+1}},$$

što se dokazuje indukcijom.

Uzlazni algoritam — I tip verižnog razlomka

Dobivamo verižni razlomak II tipa, oblika

$$R' = b_0 + \frac{1}{b_1' +} \, \frac{1}{b_2' +} \, \frac{1}{b_3' +} \cdots ,$$

s tim da se lako nalaze formule za koeficijente b_k'.

Napomena. Ako je $a_{n+1} = 0$ i $a_k \neq 0$, za sve $k \leq n$, imamo konačni verižni razlomak, a postupak ide samo do a_n.

Pripadna uzlazna rekurzija za izvrednjavanje ima oblik

$$\begin{aligned} P_k &= b_k' P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= b_k' Q_{k-1} + Q_{k-2}, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nazivnici jednaki 1 — I tip verižnog razlomka

Verižni razlomak u kojem su svi nazivnici jednaki 1

- zove se verižni razlomak I tipa (= gore je "zanimljivo").

Dobiva se na sljedeći način.

Ako su $b_k \neq 0$, za sve $k \geq 1$, onda faktore w_k možemo izabrati tako da vrijedi

$$w_1 b_1 = 1, \quad w_2 b_2 = 1, \quad \ldots, \quad w_n b_n = 1, \ldots .$$

Očito, treba uzeti

$$w_k = \frac{1}{b_k}.$$

Uzlazni algoritam — I tip verižnog razlomka

Dobivamo verižni razlomak I tipa, oblika

$$R' = b_0 + \frac{a_1'}{1^+}\,\frac{a_2'}{1^+}\,\frac{a_3'}{1^+}\cdots\,.$$

Za koeficijente a_k' vrijedi

$$a_k' = \frac{a_k}{b_{k-1} b_k}.$$

Pripadna uzlazna rekurzija za izvrednjavanje je

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1} + a_k' P_{k-2}, \\ Q_k &= Q_{k-1} + a_k' Q_{k-2}, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Napomena. Ako se ovdje dogodi da je $b_{n+1} = 0$, onda treba "skratiti" karike, sve dok ne dobijemo nešto različito od nule (ili "skratiti do kraja").

Eulerova forma verižnih razlomaka

Ako brojeve w_k izaberemo tako da je

- zbroj brojnika i nazivnika jednak jedan (osim kod prve karike),

tj. ako uzmemo

$$w_1 b_1 = 1, \quad w_{k-1} w_k a_k + w_k b_k = 1, \quad k = 2, 3, \ldots ,$$

onda se verižni razlomak svede na tzv. Eulerovu formu

$$R' = b_0 + \frac{\alpha_1}{1^+} \frac{\alpha_2}{(1 - \alpha_2)^+} \frac{\alpha_3}{(1 - \alpha_3)^+} \cdots .$$

Eulerova forma verižnog razlomka, uglavnom se koristi pri dokazivanju tvrdnji.

Silazni algoritam

Postoje razne ocjene i teoremi o tome

- koliko dobro n-ta konvergencija R_n aproksimira verižni razlomak R.

Zato često unaprijed znamo

- koliki n treba uzeti da bismo dobili željenu točnost u R_n.

Onda možemo krenuti "silazno" od b_n. Definiramo $F_n = b_n$ (ili, formalno, $F_{n+1} = \infty$), a zatim računamo

$$F_k = b_k + \frac{a_{k+1}}{F_{k+1}}, \qquad k = (n), n-1, \ldots, 0.$$

Na kraju je, očito,

$$R_n = F_0.$$

Silazni algoritam — brzina, optimalnost

Broj operacija u svakom koraku silaznog algoritma je

- točno jedno zbrajanje i jedno dijeljenje,

za razliku od uzlaznog, koji, u svakom koraku, treba

- 4 množenja i 2 zbrajanja (u općem slučaju).

Eventualno možemo proći sa samo 2 množenja.

Može se pokazati da je silazna rekurzija

- optimalan (najbolji) algoritam za izvrednjavanje verižnih razlomaka,

u pogledu broja operacija.

Silazni algoritam — komentari

U tom smislu, u usporedbi s polinomima,

- silazna rekurzija je analogon Hornerove sheme,
- a uzlazna je analogon potenciranja i zbrajanja.

U oba slučaja,

- u sporijem algoritmu lakše dodajemo nove "članove".

Funkcijski verižni razlomci

Funkcijski verižni razlomci — oblici

Funkcijski verižni razlomci mogu se dobiti na više načina, i mogu imati više oblika.

Funkcijske verižne razlomke koji imaju varijablu samo u brojniku zvat ćemo verižni razlomci I tipa. Njihov opći oblik je

$$f(x) = \beta_0 + \frac{x - x_1}{\beta_1{}^+} \, \frac{x - x_2}{\beta_2{}^+} \, \frac{x - x_3}{\beta_3{}^+} \cdots .$$

Funkcijski verižni razlomci mogu imati varijablu samo u nazivniku. To su verižni razlomci II tipa. Njihov opći oblik je

$$f(x) = b_0 + \frac{a_1}{(x + b_1)^+} \, \frac{a_2}{(x + b_2)^+} \, \frac{a_3}{(x + b_3)^+} \cdots .$$

Funkcijski verižni razlomci — izvrednjavanje

Za izvrednjavanje n-te konvergencije $f_n(x)$ verižnih razlomaka prvog tipa, možemo koristiti silazni algoritam.

Stavimo $F_n = \beta_n$ (ili $F_{n+1} = \infty$), a zatim računamo

$$F_k = \beta_k + \frac{x - x_{k+1}}{F_{k+1}}, \qquad k = (n), n-1, \ldots, 0,$$

i na kraju je

$$f_n(x) = F_0.$$

Kako do verižnih razlomaka?

Obično je nešto lakše doći do verižnih razlomaka tipa I, a zatim ih možemo pretvoriti u tip II. Uobičajeno se verižni razlomak nalazi nestandardiziranim postupkom kad se funkcija zapisuje "pomoću same sebe".

Primjer. Razvijmo u verižni razlomak prvog tipa funkciju

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Prvo, potrebno funkciju malo drugačije zapisati. Lako se provjerava da je

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}.$$

Kako do verižnih razlomaka?

Ako ponovimo ovaj raspis u nazivniku razlomka, dobivamo verižni razlomak

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\cdots\,.$$

Navedimo neke od poznatih verižnih razlomaka, bez njihova "izvoda":

$$e^x = \frac{1}{1-}\,\frac{x}{1+}\,\frac{x}{2-}\,\frac{x}{3+}\,\frac{x}{2-}\,\frac{x}{5+}\,\frac{x}{2-}\,\frac{x}{7+}\cdots\,,$$

$$= 1 + \frac{x}{1-}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{3-}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{5-}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{7-}\cdots\,,$$

Neki verižni razlomci

$$\ln(x+1) = \frac{x}{1^+}\,\frac{x}{2^+}\,\frac{x}{3^+}\,\frac{4x}{4^+}\,\frac{4x}{5^+}\,\frac{9x}{6^+}\,\frac{9x}{7^+}\,\frac{16x}{8^+}\,\frac{16x}{9^+}\cdots,$$

$$x \operatorname{tg} x = \frac{x^2}{1^-}\,\frac{x^2}{3^-}\,\frac{x^2}{5^-}\,\frac{x^2}{7^-}\cdots, \qquad x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

$$x \operatorname{arctg} x = \frac{x^2}{1^+}\,\frac{x^2}{3^+}\,\frac{4x^2}{5^+}\,\frac{9x^2}{7^+}\,\frac{16x^2}{9^+}\cdots,$$

$$x \operatorname{th} x = \frac{x^2}{1^+}\,\frac{x^2}{3^+}\,\frac{x^2}{5^+}\,\frac{x^2}{7^+}\cdots$$

$$x \operatorname{Arth} x = \frac{x^2}{1^-}\,\frac{x^2}{3^-}\,\frac{4x^2}{5^-}\,\frac{9x^2}{7^-}\,\frac{16x^2}{9^-}\cdots.$$

Odnos prvi tip $\leftrightarrow$ drugi tip

Svi ovi verižni razlomci su prvog tipa. Ima li koristi znati kako bi izgledao njihov drugi tip? Na primjer, šesta konvergencija verižnog razlomka za $\sqrt{1+x}$ bi izgledala ovako, redom, prvi tip, racionalna funkcija, drugi tip:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2} = \frac{7x^3 + 56x^2 + 112x + 64}{x^3 + 24x^2 + 80x + 64}$$

$$= 7 + \frac{-112}{(x+20)+}\,\frac{-24/7}{(x+8/3)+}\,\frac{-8/63}{(x+4/3)}.$$

Drugi tip ima kompliciranije koeficijente, ali ima upola manje karika za izvrednjavanje, pa će to dva puta ubrzati postupak izvrednjavanja.

Postupak pretvaranje se obavlja u dva koraka.

Prvi tip $\Longrightarrow$ drugi tip

U prvom se koraku od verižnog razlomka prvog tipa dobiva racionalna funkcija.

Za silazni algoritam za izvrednjavanje verižnog razlomka prvog tipa, F_k pišemo kao kvocijent dva polinoma:

$$F_k = \frac{u_k}{v_k}.$$

Tada silazna rekurzija glasi

$$\frac{u_k}{v_k} = \beta_k + \frac{(x - x_{k+1})v_{k+1}}{u_{k+1}}.$$

Kao što smo to i prije radili, izjednačimo brojnike i nazivnike funkcija s obje strane.

Prvi tip $\Longrightarrow$ drugi tip

Dobivamo

$$\begin{aligned} u_k &= \beta_k u_{k+1} + (x - x_{k+1}) v_{k+1}, \\ v_k &= u_{k+1}. \end{aligned}$$

Naravno, v_k možemo eliminirati uvrštavanjem iz druge jednadžbe u prvu, pa dobivamo

$$u_k = \beta_k u_{k+1} + (x - x_{k+1}) u_{k+2}, \quad k = n, n-1, \ldots, 0,$$

uz start $u_{n+2} = 0$, $u_{n+1} = 1$. Konačno, n-ta je konvergencija jednaka

$$f_n(x) = F_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{u_0}{u_1},$$

gdje su u_0 i u_1 neki polinomi istog stupnja.

Prvi tip $\Longrightarrow$ drugi tip

Da bismo iz racionalne funkcije dobili drugi tip verižnog razlomka, potrebno je koristiti silaznu rekurziju za drugi tip i uspoređivati s u_0/u_1.

Iz silazne rekurzije za drugi tip izlazi

$$\frac{u_0}{u_1} = \tilde{b}_0 + \frac{a_1}{x + F_1},$$

pa možemo pisati $u_0 = u_1\tilde{b}_0 + a_1\widetilde{R}_1$, gdje je $\widetilde{R}_1$ monični polinom (vodeći koeficijent je jednak 1). Time su koeficijenti $\tilde{b}_0$ i a_1 jednoznačno određeni.

Zatim ponovimo postupak i dobivamo

$$u_1 = \widetilde{R}_1(x + b_1) + a_2\widetilde{R}_2 = \widetilde{R}_1\tilde{b}_1 + a_2\widetilde{R}_2,$$

gdje je $\widetilde{R}_2$ opet monični polinom. Odavde nalazimo b_1 i a_2.

Prvi tip $\Longrightarrow$ *drugi tip*

Ova rekurzija smanjuje stupanj polinoma i prekida se kad dobijemo polinom stupnja 0.

Algoritam za pretvaranje racionalne funkcije u drugi tip verižnog razlomka je sljedeći.

Definira se $\widetilde{R}_{-1} = u_0$ i $\widetilde{R}_0 = u_1$. Zatim se vrti petlja

$$\widetilde{R}_{k-1} = \widetilde{R}_k \tilde{b}_k + a_{k+1} \widetilde{R}_{k+1} \quad \text{za} \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

gdje je su $\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2, \ldots$ monični polinomi, sve dok za neki $k = \ell$ ne postane $\widetilde{R}_{\ell+1} = 1$. Pritom je

$$\tilde{b}_k = \begin{cases} b_0, & k = 0, \\ x + b_k, & k \neq 0. \end{cases}$$

Thieleova racionalna interpolacija

Interpolacija racionalnim funkcijama

Racionalne funkcije:

- bolje aproksimiraju funkcije koje imaju singularitete, nego što to mogu polinomi;
- polinomi ne mogu dobro aproksimirati funkciju u okolini točke prekida, jer ih oni sami nemaju.

Prvo definiramo recipročne razlike, a zatim verižni razlomak koji će interpolirati funkciju f u točkama $x_1, \ldots, x_n$ (ovdje su indeksi od 1, a ne od 0).

Recipročne razlike nultog i prvog reda definiraju se, redom, kao

$$\rho_0(x_0) = f(x_0), \quad \rho_1(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)},$$

Recipročne razlike

... a one viših redova rekurzivno — kao

$$\rho_k(x_0,\ldots,x_k) = \frac{x_0 - x_k}{\rho_{k-1}(x_0,\ldots,x_{k-1}) - \rho_{k-1}(x_1,\ldots,x_k)} + \rho_{k-2}(x_1,\ldots,x_{k-1}), \qquad k \geq 2.$$

Za računanje recipročnih razlika koristi se tablica vrlo slična onoj za podijeljene razlike.

Algoritam koji koristi recipročne razlike numerirat će točke indeksima od 1 do n (zbog toga u tablici nema x_0).

Recipročne razlike

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f(x_k) & \rho_1(x_k, x_{k+1}) & \rho_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) & \cdots & \rho_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
\hline
 & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & & & & \\
 & & \rho_1(x_1, x_2) & & & \\
x_2 & f(x_2) & & \rho_2(x_1, x_2, x_3) & & \\
 & & \rho_1(x_1, x_2) & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \rho_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
 & & \rho_1(x_{n-2}, x_{n-1}) & & \iddots & \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & & \rho_2(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) & & \\
 & & \rho_1(x_{n-1}, x_n) & & & \\
x_n & f(x_n) & & & &
\end{array}
$$

Inverzne razlike

Uz recipročne razlike, često se definiraju i inverzne razlike

$$\phi_0(x_0) = f(x_0), \quad \phi_1(x_0, x_1) = \frac{x_1 - x_0}{\phi_0(x_1) - \phi_0(x_0)},$$

odnosno

$$\phi_k(x_0, \ldots, x_k)$$

$$= \frac{x_k - x_{k-1}}{\phi_{k-1}(x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k) - \phi_{k-1}(x_0, \ldots, x_{k-2}, x_{k-1})},$$

$$k \geq 2.$$

Veza recipročnih i inverznih razlika

Postoji i veza između inverznih i recipročnih razlika. Vrijedi

$$\phi_0(x_0) = \rho_0(x_0), \quad \phi_1(x_0, x_1) = \rho_1(x_0, x_1),$$

odnosno, za $k \geq 2$

$$\phi_k(x_0, \ldots, x_k) = \rho_k(x_0, \ldots, x_k) - \rho_{k-2}(x_0, \ldots, x_{k-2}).$$

U formuli za recipročne razlike točku x_0 smatramo varijablom i označimo je s x. Thieleovu formulu izvest ćemo iz identiteta:

$$f(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\phi_1(x_1, x_2)^+} \cdots \frac{x - x_{n-1}}{\phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)^+}$$

$$\frac{x - x_n}{\rho_n(x, x_1, \ldots, x_n) - \rho_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-1})}.$$

Thielova formula

Pokažimo da vrijedi prethodni identitet. Iz

$$\rho_1(x, x_1) = \frac{x - x_1}{f(x) - f(x_1)}$$

slijedi da je

$$f(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\rho_1(x, x_1)}.$$

Zatim, iz formule

$$\rho_2(x, x_1, x_2) = \frac{x - x_2}{\rho_1(x, x_1) - \rho_1(x_1, x_2)} + \rho_0(x_1)$$

Thielova formula

... slijedi da je

$$\rho_1(x, x_1) = \rho_1(x_1, x_2) + \frac{x - x_2}{\rho_2(x, x_1, x_2) - \rho_0(x_1)}.$$

Uvrštavanjem tog izraza u formulu za $f(x)$, dobivamo

$$f(x) = f(x_1) + \cfrac{x - x_1}{\rho_1(x_1, x_2) + \cfrac{x - x_2}{\rho_2(x, x_1, x_2) - \rho_0(x_1)}}.$$

Konačno, željeni identitet dobivamo indukcijom po n, uz korištenje definicije inverznih razlika.

Thielova formula

Ako izbrišemo zadnji član u identitetu, dobivamo Thielovu interpolacijsku formulu

$$R(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\phi_1(x_1, x_2)^+} \cdots \frac{x - x_{n-1}}{\phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Pokažimo da se zaista radi o interpolaciji, tj. da je

$$R(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

što se odmah vidi iz identiteta, počevši od x_n, jer je

$$\frac{x - x_n}{\rho_n(x, x_1, \ldots, x_n) - \rho_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-1})}$$

jednak 0 za $x = x_n$, pa je $R(x_n) = f(x_n)$.

Thielova formula

Nakon toga, gledamo $R(x_{n-1})$ i $f(x_{n-1})$.

- Oni su za jednu verigu kraći i to za onu verigu koja sadrži "član razlike".
- U svakoj daljnjoj točki $x_{n-2}, \ldots, x_1$, verižni je razlomak kraći za jednu verigu od prethodne.

Primjer.
Aproksimirajmo $\operatorname{tg} 1.565$ korištenjem Thieleove interpolacijske formule, ako znamo vrijednosti funkcije tg u točkama

$$x_i = 1.53 + 0.01 * i, \quad i = 0, \ldots, 4.$$

Primjer tg

Prvo izračunajmo recipročne razlike.

x_k	$f(x_k)$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
1.53	24.49841				
		0.001255851			
1.54	32.46114		−0.0308670		
		0.000640314		2.96838	
1.55	48.07848		−0.0207583		3.56026
		0.000224507		2.97955	
1.56	92.62050		−0.0106889		
		0.000008597			
1.57	1255.76557				

Primjer tg

Thielova interpolacija daje

$$R(x) = 24.49841 + \frac{x - 1.53}{0.001255851 +} \, \frac{x - 1.54}{-24.5293 +} \, \frac{x - 1.55}{2.96713 +} \, \frac{x - 1.56}{3.59113}.$$

Uvrštavanjem 1.565 dobivamo

$$R(1.565) = 172.5208,$$

dok je prava vrijednost

$$\mathrm{tg}(1.565) = 172.5211.$$

Ubrzavanje sumacije redova

I sumacija redova može se znatno ubrzati korištenjem racionalne ekstrapolacije. Ako treba izračunati

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

označimo s S_N, N-tu parcijalnu sumu reda

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Vrijednosti S_N možemo interpretirati kao vrijednosti neke funkcije f u točkama N, ...

Ubrzavanje sumacije redova

... ili u nekim drugim točkama, na primjer, u točkama $1/N$,

$$S_N = f\left(\frac{1}{N}\right).$$

Očito je da vrijedi

$$S = S_\infty = f(0).$$

Ideja je $f(0)$ izračunati kao ekstrapoliranu vrijednost od

$$f\left(\frac{1}{N_1}\right), f\left(\frac{1}{N_2}\right), \dots, \qquad N_1 < N_2 < \cdots .$$

N_i-ovi, na primjer, mogu biti, redom, prirodni brojevi.

Primjer sumacije redova

Primjer. Treba izračunati

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

korištenjem racionalne ekstrapolacije.

Uzet ćemo $N = 1, 2, 4, 8, 16$ i izračunati parcijalne sume

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$

Shvatimo li to kao funkciju od $x = 1/N$ i označimo $S(x) = S_N$, onda možemo formirati tablicu recipročnih razlika.

Primjer sumacije redova

x	$S(x)$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
$\frac{1}{16}$	1.584346533				
		-1.097945891			
$\frac{1}{8}$	1.527422052		-0.238678243		
		-1.204112002		4.826059143	
$\frac{1}{4}$	1.423611111		-0.166126405		0.016938420
		-1.44		9.947195880	
$\frac{1}{2}$	1.25		-0.089285214		
		-2			
1	1				

Primjer sumacije redova

Thielova interpolacija daje

$$R(x) = 1.584346533 + \frac{x - \frac{1}{16}}{-1.097945891^+} \, \frac{x - \frac{1}{8}}{-1.823024776^+}$$

$$\frac{x - \frac{1}{4}}{5.924005034^+} \, \frac{x - \frac{1}{2}}{0.255616663}.$$

Uvrštavanjem 0 dobivamo

$$R(0) = 1.644927974,$$

dok je prava vrijednost

$$S_\infty = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934067.$$

Primjer sumacije redova

Zanimljivo je spomenuti što se dobije ako samo zbrajamo članove reda i ne ekstrapoliramo. Vidjet ćemo da taj red vrlo sporo konvergira. Na primjer, dobivamo

$$\begin{aligned} S_{3000} &= 1.644601, \\ S_{10000} &= 1.644834, \\ S_{30000} &= 1.644901, \\ S_{100000} &= 1.644924. \end{aligned}$$