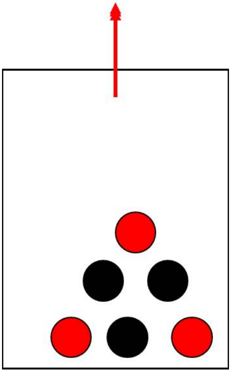
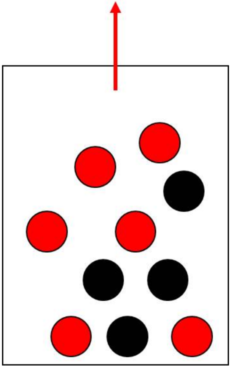
VJEROJATNOST

Osnovni pojmovi



Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući crvenu kuglicu?



Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući crvenu kuglicu?

Crvenih kuglica	6
Crnih kuglica	4
Ukupno	10

Vjerojatnost: 6/10=0.6

- **Vjerojatnosni eksperiment** je proces koji završava dobro definiranim rezultatom koji nazivamo elementarni događaj.
- **Elementarni događaj** je rezultat jednog ponavljanja vjerojatnosnog eksperimenta.
- **Prostor elementarnih događaja** je skup svih elementarnih događaja.
- **Događaj** se sastoji od jednog ili više elementarnih događaja.

Vjerojatnosni eksperiment	**Prostor elementarnih događaja**
Bacanje novčića	Pismo, glava
Bacanje kocke	1, 2, 3, 4, 5, 6
Odgovor na da/ne pitanje	Istina, laž
Bacanje dva novčića	Pismo-pismo, glava-glava, pismo-glava, glava-pismo

Zadatak. Odredite prostor elementarnih događaja za izvlačenje karte iz špila s 52 karte.

Rješenje.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1\spadesuit & 2\spadesuit & 3\spadesuit & 4\spadesuit & 5\spadesuit & 6\spadesuit & 7\spadesuit & 8\spadesuit & 9\spadesuit & 10\spadesuit & J\spadesuit & Q\spadesuit & K\spadesuit \\
1\diamondsuit & 2\diamondsuit & 3\diamondsuit & 4\diamondsuit & 5\diamondsuit & 6\diamondsuit & 7\diamondsuit & 8\diamondsuit & 9\diamondsuit & 10\diamondsuit & J\diamondsuit & Q\diamondsuit & K\diamondsuit \\
1\heartsuit & 2\heartsuit & 3\heartsuit & 4\heartsuit & 5\heartsuit & 6\heartsuit & 7\heartsuit & 8\heartsuit & 9\heartsuit & 10\heartsuit & J\heartsuit & Q\heartsuit & K\heartsuit \\
1\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & K\clubsuit
\end{array}$$

Zadatak. Odredite prostor elementarnih događaja za bacanje dvije kocke.

Rješenje.

1. kocka	**2. kocka**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Događaj

Eksperiment: Bacanje dva novčića.

Događaj: Palo je barem jedno pismo.

Prostor elementarnih događaja: **PP PG GP** GG

Palo je barem jedno pismo. = PP PG GP

Zadatak. Od kojih se elementarnih događaja sastoji događaj da iz špila s 52 karte izvućemo asa?

Rješenje.

1 ♠	2 ♠	3 ♠	4 ♠	5 ♠	6 ♠	7 ♠	8 ♠	9 ♠	10 ♠	J ♠	Q ♠	K ♠
1 ♢	2 ♢	3 ♢	4 ♢	5 ♢	6 ♢	7 ♢	8 ♢	9 ♢	10 ♢	J ♢	Q ♢	K ♢
1 ♡	2 ♡	3 ♡	4 ♡	5 ♡	6 ♡	7 ♡	8 ♡	9 ♡	10 ♡	J ♡	Q ♡	K ♡
1 ♣	2 ♣	3 ♣	4 ♣	5 ♣	6 ♣	7 ♣	8 ♣	9 ♣	10 ♣	J ♣	Q ♣	K ♣

Računanje vjerojatnosti događaja (kada su svi elementarni događaji jednako vjerojatni)

E - događaj

$$P(E) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}}$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo kralja?

Rješenje.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1\spadesuit & 2\spadesuit & 3\spadesuit & 4\spadesuit & 5\spadesuit & 6\spadesuit & 7\spadesuit & 8\spadesuit & 9\spadesuit & 10\spadesuit & J\spadesuit & Q\spadesuit & \mathbf{K}\spadesuit \\
1\diamondsuit & 2\diamondsuit & 3\diamondsuit & 4\diamondsuit & 5\diamondsuit & 6\diamondsuit & 7\diamondsuit & 8\diamondsuit & 9\diamondsuit & 10\diamondsuit & J\diamondsuit & Q\diamondsuit & \mathbf{K}\diamondsuit \\
1\heartsuit & 2\heartsuit & 3\heartsuit & 4\heartsuit & 5\heartsuit & 6\heartsuit & 7\heartsuit & 8\heartsuit & 9\heartsuit & 10\heartsuit & J\heartsuit & Q\heartsuit & \mathbf{K}\heartsuit \\
1\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & \mathbf{K}\clubsuit
\end{array}
$$

$$P(E) = \frac{4}{52} = 0.0769$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo 6 tref?

Rješenje.

1 $\spadesuit$	2 $\spadesuit$	3 $\spadesuit$	4 $\spadesuit$	5 $\spadesuit$	6 $\spadesuit$	7 $\spadesuit$	8 $\spadesuit$	9 $\spadesuit$	10 $\spadesuit$	J $\spadesuit$	Q $\spadesuit$	K $\spadesuit$
1 $\diamondsuit$	2 $\diamondsuit$	3 $\diamondsuit$	4 $\diamondsuit$	5 $\diamondsuit$	6 $\diamondsuit$	7 $\diamondsuit$	8 $\diamondsuit$	9 $\diamondsuit$	10 $\diamondsuit$	J $\diamondsuit$	Q $\diamondsuit$	K $\diamondsuit$
1 $\heartsuit$	2 $\heartsuit$	3 $\heartsuit$	4 $\heartsuit$	5 $\heartsuit$	6 $\heartsuit$	7 $\heartsuit$	8 $\heartsuit$	9 $\heartsuit$	10 $\heartsuit$	J $\heartsuit$	Q $\heartsuit$	K $\heartsuit$
1 $\clubsuit$	2 $\clubsuit$	3 $\clubsuit$	4 $\clubsuit$	5 $\clubsuit$	6 $\clubsuit$	7 $\clubsuit$	8 $\clubsuit$	9 $\clubsuit$	10 $\clubsuit$	J $\clubsuit$	Q $\clubsuit$	K $\clubsuit$

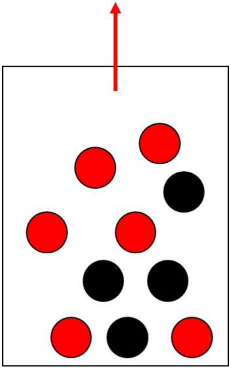
$$P(E) = \frac{1}{52} = 0.00192$$

Svojstva vjerojatnosti

- Vjerojatnost svakog događaja E je između 0 i 1:

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

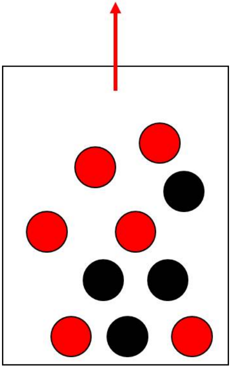
- Ukoliko se događaj E ne može dogoditi (nemogući događaj) tada je $P(E) = 0$.
- Ukoliko je događaj E siguran, tada je P(E) = 1.
- Ukoliko je $P(E)$ vjerojatnost da će se događaj E dogoditi, tada je vjerojatnost da se događaj neće dogoditi jednaka $1?P(E)$.
- Zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja je 1.



Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući crvenu kuglicu?

Crvenih kuglica	**6**
Crnih kuglica	**4**
Ukupno	**10**

Vjerojatnost: 6/10=0.6



Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući crvenu/crnu kuglicu?

	r_i	p_i
Crvenih kuglica	**0.6**	**0.6**
Crnih kuglica	**0.4**	**0.4**
Ukupno	**1.0**	**1.0**

Vjerojatnost je ista kao i relativne frekvencije!

Primjer. Odredite vjerojatnosti sljedećih događaja kod bacanja dvije kocke:

a) Zbroj je 6.

b) Par (dva ista broja).

c) Zbroj je 7 ili 11.

d) Zbroj je veći od 9.

e) Zbroj je manji ili jednak 4.

Rješenje a). Zbroj je 6.

1. kocka	2. kocka					
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	**(1,5)**	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	**(2,4)**	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	**(4,2)**	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	**(5,1)**	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P = \frac{5}{36} = 0.1389$$

Rješenje b). Par (dva ista broja).

1. kocka	**2. kocka**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**(1,1)**	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	**(5,5)**	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	**(6,6)**

$$P = \frac{6}{36} = 0.1667$$

Rješenje c). Zbroj je 7 ili 11.

1. kocka	**2. kocka**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	**(1,6)**
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	**(2,5)**	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	**(3,4)**	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	**(4,3)**	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	**(5,2)**	(5,3)	(5,4)	(5,5)	**(5,6)**
6	**(6,1)**	(6,2)	(6,3)	(6,4)	**(6,5)**	(6,6)

$$P = \frac{6+2}{36} = \frac{8}{36} = 0.2222$$

Rješenje d). Zbroj je veći od 9.

1. kocka	2. kocka					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	**(4,6)**
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	**(5,5)**	**(5,6)**
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	**(6,4)**	**(6,5)**	**(6,6)**

$$P = \frac{6}{36} = 0.1667$$

Rješenje e). Zbroj je manji ili jednak 4.

1. kocka	**2. kocka**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	**(2,1)**	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	**(3,1)**	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P = \frac{6}{36} = 0.1667$$

Primjer. U kutiji se nalazi 5 crvenih, 2 bijele i 3 zelene kuglice. Ukoliko je kuglica izvučena slučajno, odredite vjerojatnost da je izvčena kuglica:

a) crvena
b) zelena
c) crvena ili bijela
d) nije zelena
e) nije crvena

Rješenje.

a) $P(\text{crvena}) = \dfrac{5}{10} = 0.5$
b) $P(\text{zelena}) = \dfrac{3}{10} = 0.3$
c) $P(\text{crvena ili bijela}) = \dfrac{5+2}{10} = 0.7$
d) $P(\text{nije zelena}) = 1 - P(\text{zelena}) = 1 - 0.3 = 0.7$
e) $P(\text{nije crvena}) = 1 - P(\text{crvena}) = 1 - 0.5 = 0.5$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo 3 ili karo?

Rješenje.

$1\spadesuit$	$2\spadesuit$	**$3\spadesuit$**	$4\spadesuit$	$5\spadesuit$	$6\spadesuit$	$7\spadesuit$	$8\spadesuit$	$9\spadesuit$	$10\spadesuit$	$J\spadesuit$	$Q\spadesuit$	$K\spadesuit$
$1\diamondsuit$	**$2\diamondsuit$**	**$3\diamondsuit$**	**$4\diamondsuit$**	**$5\diamondsuit$**	**$6\diamondsuit$**	**$7\diamondsuit$**	**$8\diamondsuit$**	**$9\diamondsuit$**	**$10\diamondsuit$**	**$J\diamondsuit$**	**$Q\diamondsuit$**	**$K\diamondsuit$**
$1\heartsuit$	$2\heartsuit$	**$3\heartsuit$**	$4\heartsuit$	$5\heartsuit$	$6\heartsuit$	$7\heartsuit$	$8\heartsuit$	$9\heartsuit$	$10\heartsuit$	$J\heartsuit$	$Q\heartsuit$	$K\heartsuit$
$1\clubsuit$	$2\clubsuit$	**$3\clubsuit$**	$4\clubsuit$	$5\clubsuit$	$6\clubsuit$	$7\clubsuit$	$8\clubsuit$	$9\clubsuit$	$10\clubsuit$	$J\clubsuit$	$Q\clubsuit$	$K\clubsuit$

$$P(E) = \frac{16}{52} = 0.3077$$

$$P(E) = \frac{13 + 4 - 1}{52} = 0.3077$$

Pravilo zbrajanja vjerojatnosti

Za dva događaja A i B, vjerojatnost da se dogodi događaj A ili B je

$$P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ i } B).$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo asa ili srce?

Rješenje.

$$P(\text{as ili srce}) = P(\text{as}) + P(\text{srce}) - P(\text{as i srce}) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

Dva događaja su međusobno **isključiva** (disjunktna) ukoliko se ne mogu dogoditi u isto vrijeme.

Primjer.

- Kod bacanja novčića su događaji da je palo pismo i da je pala glava međusobno isključivi.
- Kod bacanja kocke su događaji pao je paran broj i pao je neparan broj međusobno isključivi.
- Kod bacanja kocke događaji pao je broj 3 i pao je neparan broj **nisu** međusobno isključivi.
- Kod bacanja kocke događaji pao je neparan broj i pao je broj manji od 4 **nisu** međusobno isključivi.

Napomena. Kada su događaji A i B međusobno isključivi, tada je događaj A i B nemogući događaj pa je $P(A \text{ i } B) = 0$.

Tada je

$$P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B).$$

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice, 2 plave i 1 bijela kuglica. Odredite vjerojatnost da će slučajno izvučena kuglica biti crvena ili bijela.

Rješenje.

$$P(\text{crvena ili crvena}) = P(\text{crvena}) + P(\text{crvena}) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Uvjetna vjerojatnost

Uvjetna vjerojatnost događaja B u odnosu na (uz uvjet) događaj A je vjerojatnost da će se događaj B dogoditi nakon što se dogodio događaj A.

Oznaka: $P(B|A)$.

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice i 2 plave kuglice. Iz kutije slučajno izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da ih **ne vraćamo** nazad u kutiju. Odredite vjerojatnost da će u drugom izvlačenju biti izvučena crvena kuglica ako je prva izvučena kuglica bila plava. Kolika bi bila ta vjerojatnost da je u prvom izvlačenju izvučena crvena kuglica?

Rješenje. Događaji:

A - u prvom izvlačenju je izvučena plava kuglica
B - u drugom izvlačenju je izvučena crvena kuglica

Tražimo $P(B|A)$.

Ako je u 1. izvlačenju izvučena plava kuglica tada je u kutiji ostalo 3 crvene i jedna plava kuglica pa je

$$P(B|A) = P(2.\ \text{crvena}|1.\ \text{plava}) = \frac{3}{4}$$

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice i 2 plave kuglice. Iz kutije slučajno izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da ih **ne vraćamo** nazad u kutiju. Odredite vjerojatnost da će u drugom izvlačenju biti izvučena crvena kuglica ako je prva izvučena kuglica bila plava. Kolika bi bila ta vjerojatnost da je u prvom izvlačenju izvučena crvena kuglica?

Rješenje. Događaji:

C - u prvom izvlačenju je izvučena crvena kuglica
B - u drugom izvlačenju je izvučena crvena kuglica

Tražimo $P(B|C)$.

Ako je u 1. izvlačenju izvučena crvena kuglica tada je u kutiji ostalo 2 crvene i 2 plave kuglica pa je

$$P(B|C) = P(2.\ \text{crvena}|1.\ \text{crvena}) = \frac{2}{4}$$

Dva događaja A i B su **nezavisna** ako je

$$P(B|A) = P(B).$$

Gornji uvjet je ekvivalentan uvjetu

$$P(A|B) = P(A).$$

Događaji A i B su nezavisni ako pojavljivanje događaja A ne utječe na vjerojatnost događaja B. (I obratno.)

Primjer. Izvlačimo kartu iz špila s 52 karte. Događaji izvučen je tref i izvučen je as su nezavisni.

Događaji:
A - izvučen je tref
B - izvučen je as Rezultat drugog bacanja kocke na nikoji način ne ovisi o rezultatu 1. bacanja.

Računamo:

$$P(B|A) = P(\text{ as } | \text{ tref }) = \frac{1}{13}$$

Jer je

$$P(B) = P(\text{ as }) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Dakle

$$P(B|A) = P(B).$$

i događaji su nezavisni.

Možemo promatrati i

$$P(A|B) = P(\text{ tref } | \text{ as }) = \frac{1}{4}$$

Jer je

$$P(A) = P(\text{ tref }) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

vrijedi

$$P(A|B) = P(A).$$

Primjer. Događaji dobiti 6 kod 1. bacanja kocke i dobiti 3 kod 2. bacanja su nezavisni događaji.

Rezultat drugog bacanja kocke na nikoji način ne ovisi o rezultatu 1. bacanja.

Pravilo množenja vjerojatnost

Za dva događaja A i B, vjerojatnost da se dogodi događaj A i B je

$$P(A \text{ i } B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Ukoliko su događaji A i B **nezavisni**, tada je $P(B|A) = P(B)$ i

$$P(A \text{ i } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Primjer. Kod bacanja 1 novčića i jedne kocke, odredite vjerojatnost pojavljivanja pisma na novčiću i broja 4 na kocki.

Rješenje.

$$P(\text{pismo i } 4) = P(\text{pismo}) \cdot P(4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice, 4 plave i 2 bijele. Redom izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da nakon svakog izvlačenja izvučenu kuglicu vratimo u kutiju. Kolika je vjerojatnost da ćemo:

a) u dva izvlačenja izvući dvije crvene kuglice?

b) u dva izvlačenja izvući redom crvenu pa plavu kuglicu?

c) u tri izvlačenja izvući redom bijelu pa plavu pa crvenu kuglicu?

Rješenje. a) u dva izvlačenja izvući dvije crvene kuglice

Ako izvučemo dvije crvene kuglice to znači da smo

- u 1. izvlačenju izvukli crvenu kuglicu i
- u 2. izvlačenju izvukli crvenu kuglicu.

Vjerojatnost za prvo izvlačenje je

$$P(1.\text{ crvena}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Jer je zbog vraćanja kuglice u drugom izvlačenju broj kuglica isti kao i u prvom izvlačenju, vrijedi:

$$P(2.\text{ crvena}|1.\text{ crvena}) = P(2.\text{ crvena}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} P(\text{dvije crvene}) &= P(1.\text{ crvena i } 2.\text{ crvena}) = \\ &= P(1.\text{ crvena}) \cdot P(2.\text{ crvena}|1.\text{ crvena}) = \\ &= P(1.\text{ crvena}) \cdot P(2.\text{ crvena}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

b) u dva izvlačenja izvući redom crvenu pa plavu kuglicu

$$
\begin{aligned}
P(1.\ \text{crvena i } 2.\ \text{plava}) = \quad &= P(1.\ \text{crvena}) \cdot P(2.\ \text{plava} | 1.\ \text{crvena}) = \\
&= P(1.\ \text{crvena}) \cdot P(2.\ \text{plava}) = \\
&= \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27}.
\end{aligned}
$$

c) u tri izvlačenja izvući redom bijelu pa plavu pa crvenu kuglicu

$$
\begin{aligned}
& P(1.\ \text{bijela i } 2.\ \text{plava i } 3.\ \text{crvena}) = \\
= \;& P(1.\ \text{bijela}) \cdot P(2.\ \text{plava i } 3.\ \text{crvena} | 1.\ \text{bijela}) = \\
= \;& P(1.\ \text{bijela}) \cdot P(2.\ \text{plava i } 3.\ \text{crvena}) = \\
= \;& P(1.\ \text{bijela}) \cdot P(2.\ \text{plava}) \cdot P(3.\ \text{crvena} | 2.\ \text{plava}\ ) = \\
= \;& P(1.\ \text{bijela}) \cdot P(2.\ \text{plava}) \cdot P(3.\ \text{crvena}) = \\
= \;& \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{8}{243}.
\end{aligned}
$$

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice, 4 plave i 2 bijele. Redom izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da nakon svakog izvlačenja izvučenu kuglicu **NE** vratimo u kutiju. Kolika je vjerojatnost da ćemo:

a) u dva izvlačenja izvući dvije crvene kuglice?

b) u dva izvlačenja izvući redom crvenu pa plavu kuglicu?

c) u tri izvlačenja izvući redom bijelu pa plavu pa crvenu kuglicu?

Rješenje. a) u dva izvlačenja izvući dvije crvene kuglice

Ako izvučemo dvije crvene kuglice to znači da smo

- u 1. izvlačenju izvukli crvenu kuglicu i
- u 2. izvlačenju izvukli crvenu kuglicu.

Vjerojatnost za prvo izvlačenje je

$$P(1.\text{ crvena}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Jer kuglica nije vraćena u kutiju, u drugom izvlačenju se u kutiji nalazi 8 kuglica. Od toga su dvije crvene pa vrijedi:

$$P(2.\text{ crvena}|1.\text{ crvena}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} P(\text{dvije crvene}) &= P(1.\text{ crvena i }2.\text{ crvena}) = \\ &= P(1.\text{ crvena}) \cdot P(2.\text{ crvena}|1.\text{ crvena}) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

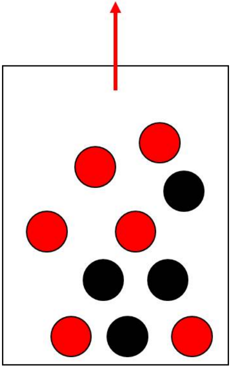
b) u dva izvlačenja izvući redom crvenu pa plavu kuglicu

$$\begin{aligned} P(1.\text{ crvena i } 2.\text{ plava}) = &= P(1.\text{ crvena}) \cdot P(2.\text{ plava}|1.\text{ crvena}) = \\ &= \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

c) u tri izvlačenja izvući redom bijelu pa plavu pa crvenu kuglicu

$$\begin{aligned} & P(1.\text{ bijela i } 2.\text{ plava i } 3.\text{ crvena}) = \\ = \; & P(1.\text{ bijela}) \cdot P(2.\text{ plava i } 3.\text{ crvena}|1.\text{ bijela}) = \\ = \; & P(1.\text{ bijela}) \cdot P(2.\text{ plava}|1.\text{ bijela}) \cdot P(3.\text{ crvena}|1.\text{ bijela i } 2.\text{ plava }) \\ = \; & \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{21}. \end{aligned}$$

Slučajna varijabla

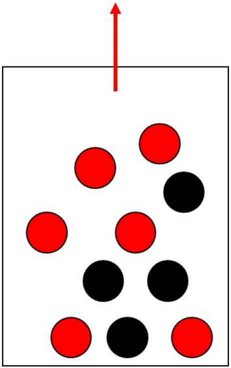


Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući crvenu kuglicu?

Crvenih kuglica	**6**
Crnih kuglica	**4**
Ukupno	**10**

Vjerojatnost: 6/10=0.6

Slučajna varijabla



Boja kuglice:

obilježje, varijabla

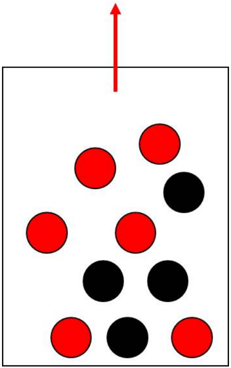
Boja **izvučene** kuglice:

slučajna varijabla

Slučajna varijabla:

- varijabla čije su vrijednosti određene slučajno
- slučajnost je posljedica slučajnog ishoda pokusa (eksperimenta)
- vrijednost znamo tek nakon obavljenog pokusa
- za svaku vrijednost slučajne varijable postoji vjerojatnost da se ta vrijednost pojavi
- nemamo frekvencije i distribuciju frekvencija već **vjerojatnosti** i **distribuciju vjerojatnosti**

vrijednost slučajne varijable	-	vjerojatnost pojavljivanja
vrijednost varijable	-	broj pojavljivanja (frekvencija / relativna frekvencija)



Varijabla: Boja kuglice u kutiji

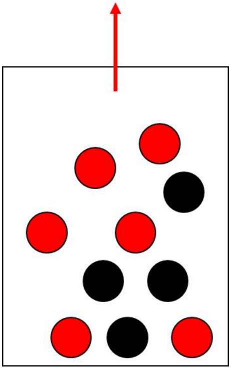
Distribucija (relativnih) frekvencija:

Vrijednost	r_i
Crvena kuglica	0.6
Crna kuglica	0.4
Ukupno	1

Slučajna varijabla: Boja **izvučene** kuglice

Distribucija vjerojatnosti:

Vrijednost	p_i
Crvena kuglica	0.6
Crna kuglica	0.4
Ukupno	1



Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući crvenu/crnu kuglicu?

	r_i	p_i
Crvenih kuglica	**0.6**	**0.6**
Crnih kuglica	**0.4**	**0.4**
Ukupno	**1.0**	**1.0**

Vjerojatnost je ista kao i relativne frekvencije!

Napomena. Kod slučajnog izvlačenja, vjerojatnost pojavljivanja vrijednosti jednaka je odgovarajućoj relativnoj frekvenciji.

$\longrightarrow$ Distribucija vjerojatnosti slučajne varijable jednaka je distribuciji frekvencija varijable.

Očekivanje slučajne varijable

Ukoliko slučajna varijabla X poprima vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, s pripadnim vjerojatnostima $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$, **očekivanje** slučajne varijable X je

$$E(X) = \sum_i p_i x_i$$

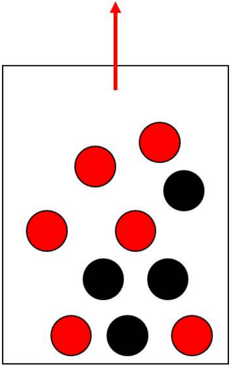
Važno.

Formula je slična kao formula za srednju vrijednost varijable.

Ukoliko varijabla X poprima vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, s pripadnim relativnim frekvencijama $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$, srednja vrijednost varijable X je

$$\mu = \sum_i r_i x_i$$

Kod slučajnog izvlačenja je očekivanje slučajne varijable jednako srednjoj vrijednosti obilježja populacije.



Primjer. Izračunajte očekivanje za slučajnu varijablu X definiranu s

1 - ako je izvučena crvena kuglica,

0 - ako nije izvučena crvena kuglica.

Rješenje. Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	**0.6**
0	**0.4**

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = 0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0 = 0.6.$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pismo označimo s 1 a glavu s 0, izračunajte očekivanje za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja novčića.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 0 i 1.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	0.5
0	0.5

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0 = 0.5.$$

Primjer. Izračunajte očekivanje za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 1, 2, 3, 4, 5 i 6.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i p_i x_i = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{21}{6} = 3.5. \end{aligned}$$

Uočite:

- Očekivanje ne treba biti jednako niti jednoj mogućoj vrijednosti slučajne varijable.
- Očekivanje nije (ne treba biti) jednako najvjerojatnijoj vrijednosti.

Varijanca slučajne varijable

Ukoliko slučajna varijabla X poprima vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, s pripadnim vjerojatnostima $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, **varijanca** slučajne varijable X je

$$\mathrm{Var}\,(X) = \sum_i p_i (x_i - E(X))^2$$

Alternativna formula za varijancu

$$\mathrm{Var}\,(X) = \sum_i p_i x_i^2 - [E(X)]^2$$

ili

$$\mathrm{Var}\,(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Formula je slična kao formula za varijancu varijable varijable.

Ukoliko varijabla X poprima vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, s pripadnim relativnim frekvencijama $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$, varijanca varijable X je

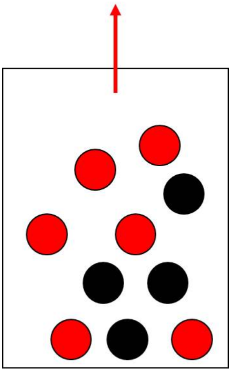
$$\sigma^2 = \sum_i r_i (x_i - \mu)^2$$

Napomena. Kod slučajnog izvlačenja je varijanca slučajne varijable jednako varijanci obilježja populacije.

Standardna devijacija

Standardna devijacija:

$$\mathrm{St.d.}\,(X) = \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)} = \sqrt{\sum_i p_i (x_i - E(X))^2}$$



Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu s

1 - ako je izvučena crvena kuglica,

0 - ako nije izvučena crvena kuglica.

Rješenje. Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	**0.6**
0	**0.4**

$$\mathrm{E}(X) = 0.6$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \\
&= 0.6 \cdot (1 - 0.6)^2 + 0.4 \cdot (0 - 0.6)^2 = \\
&= 0.6 \cdot 0.4^2 + 0.4 \cdot 0.4^2 = 0.24
\end{aligned}$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pismo označimo s 1 a glavu s 0, izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja novčića.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 0 i 1.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	0.5
0	0.5

$$\mathrm{E}(X) = 0.5$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \\ &= 0.5 \cdot (1 - 0.5)^2 + 0.5 \cdot (0 - 0.5)^2 = \\ &= 0.5 \cdot 0.5^2 + 0.5 \cdot 0.5^2 = 0.25\end{aligned}$$

Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 1, 2, 3, 4, 5 i 6.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

$$\mathrm{E}(X) = 3.5$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i(x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \\
&= \frac{1}{6}\cdot(1-3.5)^2 + \frac{1}{6}\cdot(2-3.5)^2 + \frac{1}{6}\cdot(3-3.5)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{6}\cdot(4-3.5)^2 + \frac{1}{6}\cdot(5-3.5)^2 + \frac{1}{6}\cdot(6-3.5)^2 = \\
&= \frac{17.5}{6} = 2.92.
\end{aligned}$$

Primjer. Distribucija vjerojatnosti za broj jednodnevnih izleta gorskog vodiča tijekom tjedna prikazana je u tablici. Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

Broj izleta (x_i)	2	3	4	5	6
p_i	0.30	0.40	0.20	0.05	0.05

Rješenje.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i p_i x_i = 0.30 \cdot 2 + 0.40 \cdot 3 + 0.20 \cdot 4 + 0.05 \cdot 5 + 0.05 \cdot 6 = 3.15$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \\ &= 0.30 \cdot (2-3.15)^2 + 0.40 \cdot (3-3.15)^2 + 0.20 \cdot (4-3.15)^2 + \\ &\quad + 0.05 \cdot (5-3.15)^2 + 0.05 \cdot (6-3.15)^2 = 1.13 \end{aligned}$$

$$\mathrm{St.d.}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{1.13} = 1.06$$

Linearna transformacija slučajne varijable

Neka je varijabla Y dana s:

$$Y = aX + b.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\ Y &= a\,\mathrm{E}\ X + b \\ \mathrm{Var}\ Y &= a^2\,\mathrm{Var}\ X \\ \mathrm{St.d.}\ Y &= |a|\ \mathrm{St.d.}\ X \end{aligned}$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pojavljivanje pisma označimo s 2 a pojavljivanje glave s 1, odredite očekivanje i varijancu ovako definirane slučajne varijable.

Rješenje. U prijašnjem primjeru smo pokazali da za slučajnu varijablu (X) dobivenu tako da smo pismo označili s 1 a glavu s 0 vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\ X &= 0.5 \\ \mathrm{Var}\ X &= 0.25 \end{aligned}$$

Ukoliko slučajnu varijablu iz zadatka označimo s Y, tada je

$$Y = X + 1.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\ Y &= \mathrm{E}\ X + 1 = 0.5 + 1 = 1.5 \\ \mathrm{Var}\ Y &= \mathrm{Var}\ X = 0.25 \\ \mathrm{St.d.}\ Y &= \sqrt{\mathrm{Var}\ Y} = \sqrt{0.25} = 0.5 \end{aligned}$$

Primjer. U kutiji se nalazi deset novčanica od 10 kn, pet od 20 kn, tri od 50 kn, jedna od 100 kn i jedna od 1000 kn. Igra se sastoji od toga da igrač za ulog od 200 kn ima pravo slučajno izvući jednu novčanicu. Izračunajte očekivanje dobitka. Da li je igra pravedna?

Napomena. Igra je pravedna ukoliko je očekivanje dobitka 0. Ukoliko je očekivanje dobitka pozitivno, tada je igra u korist igrača, a ukoliko je očekivanje dobitka negativno tada je igra u korist organizatora (kuće).

Rješenje. Za iznos slučajno izvučene novčnice (slučajna varijabla X) distribucija vjerojatnosti je dana u tablici:

Novčanica (x_i)	10	20	50	100	1000
f_i	10	5	3	1	1
p_i	0.50	0.25	0.15	0.05	0.05

Novčanica (x_i)	10	20	50	100	1000
f_i	10	5	3	1	1
p_i	0.50	0.25	0.15	0.05	0.05

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_i p_i x_i = \\
&= 0.50 \cdot 10 + 0.25 \cdot 20 + 0.15 \cdot 50 + 0.05 \cdot 100 + 0.05 \cdot 1000 = \\
&= 72.50
\end{aligned}
$$

Budući da je dobitak jednak iznosu izvučene novčanice umanjenom za ulog (200 kn):

$$\text{Dobitak} = X - 200,$$

vrijedi

$$\mathrm{E}(\text{Dobitak}) = \mathrm{E}(X) - 200 = 72.50 - 200 = -127.50$$

Dakle, igra nije pravedna, već je u korist kuće.

Uniformna distribucija

Uniformna distribucija je distribucija vjerojatnosti kod koje sve moguće vrijednosti slučajne varijable imaju jednaku vjerojatnost pojavljivanja.

Primjeri uniformne distribucije:

- bacanje novčića
- bacanje kocke
- izvlačenje broja na Lotu

Bernoullijeva distribucija

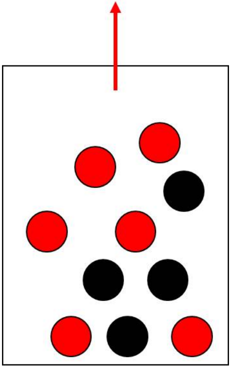
Bernoullijeva distribucija je distribucija vjerojatnosti kod koje slučajna varijabla poprima samo dvije vrijednosti: 0 i 1.

Primjeri Bernoullijeve distribucije:

- bacanje novčića
- izvlačenje kuglice iz kutije s kuglicama dvije boje
- 1 - pozitivan ishod eksperimenta,
  0 - negativan ishod eksperimenta

Slučajne varijable koje poprimaju samo dvije vrijednosti često se nazivaju **dihotomne** varijable (te vrijednosti ne trebaju biti 0 i 1).

Kod dihotomnih varijabli mi uvijek mo?emo jedan ishod ozna?iti s 0 a drugi s 1 te dobiti Bernoullijevu distribuciju.



Možemo definirati novu slučajnu varijablu s vrijednostima 0 i 1:

1 - ako je izvučena crvena kuglica
0 - ako nije izvučena crvena kuglica (tj. izvučena je crna kuglica).

Bernoullijeva distribucija:

x_i	p_i
0	q
1	p

ili

x_i	0	1
p_i	q	p

Budući da zbroj vjerojatnosti treba biti 1, vrijedi

$$p + q = 1.$$

Bernoullijeva distribucija:

x_i	0	1
p_i	1-p	p

Očekivanje i varijanca Bernoullijeve distribucije

Očekivanje:

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

Varijanca:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= (1-p)\cdot(0-p)^2 + p\cdot(1-p)^2 = \\
&= (1-p)\cdot p^2 + p\cdot(1-p)^2 = \\
&= (1-p)\cdot p\cdot(p+(1-p)) = \\
&= (1-p)\cdot p
\end{aligned}$$

Očekivanje i varijanca Bernoullijeve distribucije

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= p \\
\mathrm{Var}(X) &= (1-p)\cdot p
\end{aligned}$$

Primjer. Bacanje novčića.

$$\begin{aligned} p &= 0.5 \\ q &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= p = 0.5 \\ \mathrm{Var}(X) &= p \cdot (1 - p) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 \end{aligned}$$

Primjer. Izvlačenje kuglice iz kutije s 6 crvenih i 4 crne kuglice. Ukoliko je izvučena crvena kuglica vrijednost slučajne varijable je 1.

$$\begin{aligned} p &= 0.6 \\ q &= 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= p = 0.6 \\ \mathrm{Var}(X) &= p \cdot (1 - p) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24 \end{aligned}$$

Primjer. Slučajnu varijablu X definiramo kao broj koševa postignutih u tri bacanja. Vjerojatnost postizanja koša u jednom bacanju je 0.8. Odredite distribuciju vjerojatnosti, očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje. Slučajna varijabla X poprima vrijednosti 0, 1, 2 i 3. Mogući ishodi tri bacanja su:

1.b	2.b	3.b	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3

$$
\begin{aligned}
P(000) &= P(0)\cdot P(0)\cdot P(0) = \\
&= 0.2\cdot 0.2\cdot 0.2 = 0.008 \\
P(001) &= P(010) = P(100) = \\
&= P(0)\cdot P(0)\cdot P(1) = \\
&= 0.2\cdot 0.2\cdot 0.8 = 0.032 \\
P(110) &= P(101) = P(011) = \\
&= P(1)\cdot P(1)\cdot P(0) = \\
&= 0.8\cdot 0.8\cdot 0.2 = 0.128 \\
P(111) &= P(1)\cdot P(1)\cdot P(1) = \\
&= 0.8\cdot 0.8\cdot 0.8 = 0.512
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(000) = 0.008 \\
P(X=1) &= P(100 \text{ ili } 010 \text{ ili } 001) = \\
&= P(100) + P(010) + P(001) = 3 \cdot 0.032 = 0.096 \\
P(X=2) &= P(110 \text{ ili } 101 \text{ ili } 011) = \\
&= P(110) + P(101) + P(011) = 3 \cdot 0.128 = 0.384 \\
P(X=3) &= P(111) = 0.512
\end{aligned}$$

Distribucija vjerojatnosti slučajne varijable X:

x_i	0	1	2	3
p_i	0.008	0.096	0.384	0.512

x_i	0	1	2	3
p_i	0.008	0.096	0.384	0.512

Očekivanje, varijanca i standardna devijacija:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_i p_i x_i = \\
&= 0.008 \cdot 0 + 0.096 \cdot 1 + 0.384 \cdot 2 + 0.512 \cdot 3 = 2.400 \\
\mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \\
&= 0.008 \cdot (0 - 2.400)^2 + 0.096 \cdot (1 - 2.400)^2 + \\
&\quad + 0.384 \cdot (2 - 2.400)^2 + 0.512 \cdot (3 - 2.400)^2 = 0.480 \\
\mathrm{St.d.}(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{0.480} = 0.693
\end{aligned}$$

Bacanje novčića kao zbroj tri varijable

Neka su

- X_1 - rezultat 1. bacanja (0/1)
- X_2 - rezultat 2. bacanja (0/1)
- X_3 - rezultat 3. bacanja (0/1)

Uočimo da je vrijednost pojedine varijable broj postignutih koševa u pojedinom bacanju.

Slučajna varijabla X je broj postignutih koševa u tri bacanja. Vrijedi

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

Očekivanja zbroja slučajnih varijabli

Neka su X i Y slučajne varijable s očekivanjem $\mathrm{E}(X)$ i $\mathrm{E}(Y)$. Tada je

$$\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y).$$

Za jedno bacanje smo pokazali da je

$$\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \mathrm{E}(X_3) = 0.8.$$

Kako je broj postignutih koševa u tri bacanja jednako

$$X = X_1 + X_2 + X_3,$$

vrijedi

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + X_3) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \mathrm{E}(X_3) = 0.8 + 0.8 + 0.8 = 2.4$$

Nezavisne slučajne varijable

Ako slučajna varijabla X može poprimiti vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tada je $X = x_i$ događaj kada slučajna varijabla X poprima vrijednost x_i.

Slično, ako slučajna varijabla Y može poprimiti vrijednosti $y_1, y_2, y_3, \ldots$ tada je $Y = y_j$ događaj kada slučajna varijabla Y poprima vrijednost y_j.

Slučajne varijable X i Y su **nezavisne** ako su događaji $X = x_i$ i $Y = y_j$ nezavisni za sve moguće vrijednosti x_i i y_j.

Podsjetnik. Dva događaja A i B su nezavisna ako je

$$P(B|A) = P(B).$$

Varijable X i Y su nezavisne ako je

$$P(Y = y_j|X = x_i) = P(Y = y_j).$$

za sve moguće vrijednosti x_i i y_j.

Slučajna varijabla odgovara vjerojatnosnom pokusu (eksperimentu).

Slučajne varijable su nezavisne ukoliko su nezavisni odgovarajući slučajni pokusi, tj. rezultat jednog pokusa ne ovisi o rezultatu drugog pokusa.

Primjer. Ako je X rezultat bacanja jedne kocke a Y rezultat bacanja druge kocke tada su slučajne varijable X i Y nezavisne.

Primjer. Promatramo izvlačenje karte iz špila s 52 karte.

- Varijabla X je boja izvučene karte (pik, karo, herc, tref)
- Varijabla Y je vrijednost izvučene karte (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K)

Varijable X i Y su nezavisne.

Rješenje. Već smo pokazali da su događaji 'izvučen je as' i 'izvučen je tref' nezavisni.

Istim zaključivanjem možemo pokazati da to vrijedi za bilo koju vrijednost i bilo koju boju.

Neka je x bilo koja boja i neka je y bilo koja vrijednost. Tada je

$$P(Y = y|X = x) = \frac{1}{13}$$

jer u svakoj boji imamo točno 13 mogućih vrijednosti.
Jer u cijelom špilu imamo točno 4 karte s vrijednošću y, vrijedi

$$P(Y = y) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

pa su događaji $X = x$ i $Y = y$ nezavisni za bilo koje vrijednosti x i y.
To znači da su slučajne varijable X i Y nezavisne.

Varijanca zbroja slučajnih varijabli

Neka su X i Y **nezavisne** slučajne varijable s varijancom $\mathrm{Var}\,(X)$ i $\mathrm{Var}\,(Y)$. Tada je

$$\mathrm{Var}\,(X+Y) = \mathrm{Var}\,(X) + \mathrm{Var}\,(Y).$$

Napomena. Nezavisnost slučajnih varijabli je bitna pretpostavka.

Ukoliko slučajne varijable nisu nezavisne tada formula ne treba vrijediti, tj. ne možemo je koristiti.

Primjer. U primjeru s brojem postignutih koševa u tri bacanja smo pokazali da se broj postignutih koševa X može prikazati kao

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

gdje su $X_1,\ X_2,\ X_3$ rezultati pojedinog bacanja.
Vjerojatnost pogotka je $p = 0.8$ i $X_1,\ X_2,\ X_3$ su Bernoullijeve slučajne varijable te je

$$\mathrm{Var}\,(X_1) = \mathrm{Var}\,(X_2) = \mathrm{Var}\,(X_3) = p \cdot (1 - p) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$$

Jer su $X_1,\ X_2,\ X_3$ nezavisne, vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,(X) &= \mathrm{Var}\,(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= \mathrm{Var}\,(X_1) + \mathrm{Var}\,(X_2) + \mathrm{Var}\,(X_3) = 0.16 + 0.16 + 0.16 = 0.48 \end{aligned}$$

Važno. Pojedino bacanje je nezavisno od preostala dva bacanja, tj. slučajne varijable $X_1,\ X_2$ i X_3 su nezavisne.

Primjer.

Izračunajte očekivanje i varijancu za zbroj pri bacanju dvije igrače kocke.

Rješenje.

- X_1 - rezultat bacanja 1. kocke
- X_2 - rezultat bacanja 2. kocke
- $X = X_1 + X_2$ zbroj nakon bacanja dvije kocke

Pokazali smo da je

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_1) &= \mathrm{E}(X_2) = 3.5 \\ \mathrm{Var}(X_1) &= \mathrm{Var}(X_2) = 2.92 \end{aligned}$$

Očekivanje:

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1 + X_2) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) = 3.5 + 3.5 = 7$$

Varijanca

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 2.92 + 2.92 = 5.84$$

Binomna distribucija
Faktorijele

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$
$$0! = 1.$$

Primjer.

$$\begin{aligned} 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\ 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\ 5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \end{aligned}$$

Primjer. Koliko troznamenkastih brojeva u svom zapisu sadrži po jednu znamenku 2, 4 i 5.

Rješenje.
Na prvom mjestu može biti bilo koja od 3 znamenke (3 slučaja).

U svakom od ta tri slučaja na 2. mjestu je po jedna od preostale dvije znamenke (po 2 slučaja, ukupno $2 \cdot 3$ slučaja).

U svakom od tih $2 \cdot 3$ slučaja na 3. mjestu se nalazi (jedna) preostala znamenka.

Ukupan broj slučajeva: $\mathbf{3} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{3}! = 6$.

2 4 5	4 2 5	5 2 4
2 5 4	4 5 2	5 4 2

Primjer. J.K., M.S., K.Z. i A.P. se natječu u slalomu. Koliko ima mogućih završnih redoslijeda natjecanja (ne uzimajući u obzir mogućnost istih vremenskih rezultata)?

Rješenje.
Na prvom mjestu može biti bilo koja od 4 natjecateljke (4 slučaja).

U svakom slučaju jedna od preostale 3 natjecateljke mo?e biti 2. (po 3 slučaja).

Zatim, u svakom od tih slučajeva, po jedna od preostale 2 natjecateljke može biti 3, te na kraju, 4. je jedina preostala skijašica.

Ukupan broj slučajeva: $\mathbf{4} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{4}! = 24$.

Binomni koeficijenti

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

Binomni koeficijent se često označava s ${}_nC_k$.

Iz skupa od n jedinki možemo izabrati k jedinki na ${}_nC_k$ različitih načina.

Primjer.

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{24}{1\cdot 6} = 4$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{120}{2\cdot 6} = 10$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6\cdot 6} = 35$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

Binomna distribucija

- **Bernoullijev pokus** je pokus kod kojeg su moguća samo dva ishoda (1 - uspjeh, 0 - neuspjeh).
- Vjerojatnost uspjeha označavamo s p.
- (Vjerojatnost neuspjeha je onda $q = 1 - p$.)
- Bernoullijeva razdioba
- Ukoliko Bernoullijev pokus ponovimo n puta (s time da su svi pokusi **nezavisni**) s brojem uspješnih ishoda je definirana nova slučajna varijabla.
- Distribuciju vjerojatnosti ove slučajne varijable nazivamo **binomna distribucija**.

Binomna distribucija

Vjerojatnost da se u n ponavljanja pokusa pojavi točno k pozitivnih (uspješnih) ishoda je

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

gdje je:

- n - broj ponavljanja pokusa,
- k - broj pozitivnih ishoda,
- p - vjerojatnost pozitivnog ishoda u jednom pokusu,
- $q = 1 - p$ - vjerojatnost negativnog ishoda u jednom pokusu.

- Uočite da za različite vrijednosti n i p dobijamo različite distribucije.
- Ukoliko zadamo n i p, jednoznačno smo zadali i distribuciju.
- Brojevi n i p se nazivaju **parametri** binomne distribucije.

Ukoliko slučajna varijabla X ima binomnu distribuciju koja odgovara ponavljanju n pokusa pri čemu je vjerojatnost pojedinog ponovljenog pokusa jednaka p, pišemo

$$X \sim B(n, p)$$

(Čitamo: slučajna varijabla X ima binomnu distribuciju s parametrima n i p.)

Primjer. Odredite distribuciju vjerojatnosti za broj postignutih koševa iz tri bacanja ukoliko je vjerojatnost pogotka u svakom bacanju jednaka 0.8.

Rješenje. Uzastopno bacanje je ponavljanje jednog bacanja više puta.

Vjerojatnost pozitivnog ishoda (pogotka) u jednom bacanju je

$$p = 0.8,$$

a vjerojatnost negativnog ishoda (promašaja) je

$$q = 1 - p = 0.2.$$

Broj pogodaka iz tri bacanja je binomna slučajna varijabla:

$$X \sim B(3, 0.8).$$

$$\begin{aligned}
P(0) &= \binom{3}{0} 0.8^0 \cdot 0.2^{3-0} = \binom{3}{0} 0.8^0 \cdot 0.2^3 = 0.2^3 = 0.008 \\
P(1) &= \binom{3}{1} 0.8^1 \cdot 0.2^{3-1} = \binom{3}{1} 0.8^1 \cdot 0.2^2 = \\
&= 3 \cdot 0.8 \cdot 0.2^2 = 0.096 \\
P(2) &= \binom{3}{2} 0.8^2 \cdot 0.2^{3-2} = \binom{3}{2} 0.8^2 \cdot 0.2^1 = \\
&= 3 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 = 0.384 \\
P(3) &= \binom{3}{3} 0.8^3 \cdot 0.2^{3-3} = \binom{3}{3} 0.8^3 \cdot 0.2^0 = \\
&= 0.8^3 = 0.512
\end{aligned}$$

Očekivanje i varijanca binomne distribucije

Neka je X binomna slučajna varijabla definirana kao broj uspješnih ishoda u n ponavljanja pokusa. Neka su

X_1 - ishod 1. pokusa
X_2 - ishod 2. pokusa
$\ldots$
X_n - ishod n-tog pokusa

Tada je

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Za nezavisne pokuse su i slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne.

Ukoliko je p vjerojatnost uspjeha pojedinog ponavljanja pokusa, pokazali smo da je

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X_1\right) &= \mathrm{E}\left(X_2\right) = \ldots = \mathrm{E}\left(X_n\right) = p \quad \text{i} \\ \mathrm{Var}\left(X_1\right) &= \mathrm{Var}\left(X_2\right) = \ldots = \mathrm{Var}\left(X_n\right) = p(1-p) \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \ldots X_n) = \\
&= \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \ldots + \mathrm{E}(Xn) = \\
&= p + p + \ldots + p = \\
&= n \cdot p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \\
&= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n) = \\
&= p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) + \ldots + p \cdot (1-p) = \\
&= n \cdot p \cdot (1-p)
\end{aligned}$$

Za slučajnu varijablu X s vjerojatnostima distribuiranim prema binomnoj distribuciji s parametrima n i p ($X \sim B(n, p)$) vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= n \cdot p \\ \mathrm{Var}(X) &= n \cdot p \cdot (1 - p). \end{aligned}$$

Primjer. Odredite distribuciju vjerojatnosti, očekivanje i varijancu za broj pojavljivanja broja 6 kod bacanja pet igraćih kocaka.

Rješenje. Bacanje pet kocaka odgovara pokusu od pet uzastopnih bacanja kocke (pet puta ponavljamo isti pokus).

Vjerojatnost pozitivnog ishoda (da padne broj 6) u jednom bacanju je

$$p = \frac{1}{6}$$

a vjerojatnost negativnog ishoda (da ne padne broj 6) je

$$q = 1 - p = \frac{5}{6}.$$

Dakle, radi se o binomnoj razdiobi s parametrima

$$n = 5 \quad \text{i} \quad p = \frac{1}{6}.$$

Očekivanje i varijanca:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0.833 \\ \mathrm{Var}(X) &= n \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} = 0.694 \end{aligned}$$

Distribucija vjerojatnosti zadana je s

$$P(k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k q^{n-k} = \left(\begin{array}{c} 5 \\ k \end{array} \right) \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

za $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$$P(0) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array} \right) \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.402$$

$$P(1) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array} \right) \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} = 5 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.402$$

$$
\begin{aligned}
P(2) &= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = 10\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{3} = 0.161 \\
P(3) &= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} = 10\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{2} = 0.032 \\
P(4) &= \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{5-4} = 5\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\left(\frac{5}{6}\right) = 0.003 \\
P(5) &= \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{5-5} = \left(\frac{1}{6}\right)^{5} = 0.0001
\end{aligned}
$$

Primjer.
Izračunajte vjerojatnost da će se kod bacanja pet kocaka broj 6

a) pojaviti barem 4 puta.
b) pojaviti barem jednom.
c) pojaviti barem dva puta.

Rješenje. Distribuciju vjerojatnosti smo izračunali u prošlom primjeru:

k	$P(k)$
0	0.4019
1	0.4019
2	0.1608
3	0.0322
4	0.0032
5	0.0001

a) Vjerojatnost da će se broj 6 pojaviti barem 4 puta:

$$P(4 \text{ ili } 5) = P(4) + P(5) = 0.0032 + 0.0001 = 0.0033$$

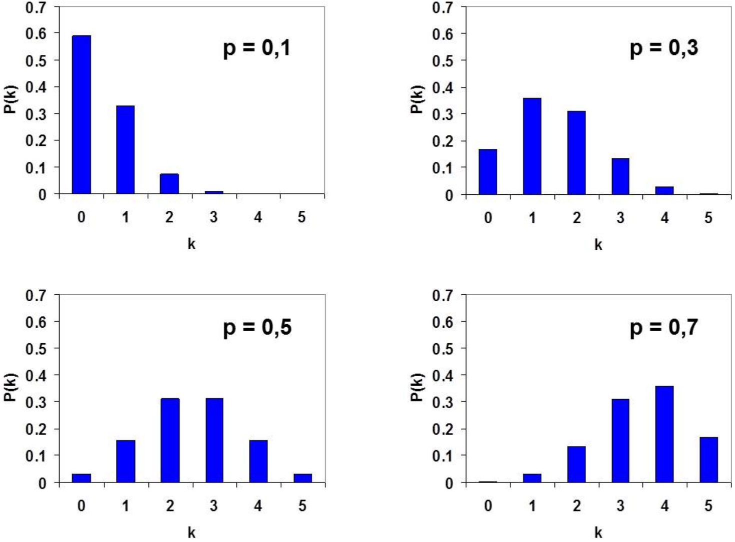
b) Vjerojatnost da će se broj 6 pojaviti barem jednom:

$$P(1 \text{ ili } 2 \text{ ili } 3 \text{ ili } 4 ili 5) = 1 - P(0) = 1?0.4019 = 0.5981$$

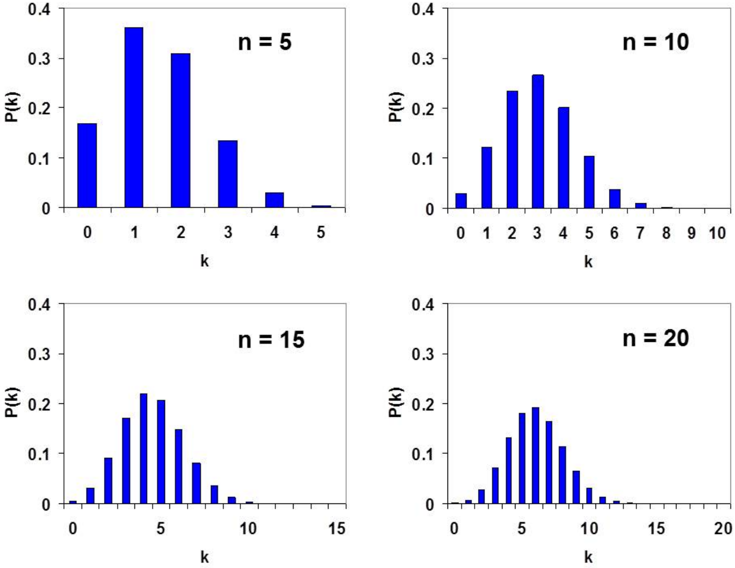
c) Vjerojatnost da će se broj 6 pojaviti barem 2 puta:

$$P(2 \text{ ili } 3 \text{ ili } 4 \text{ ili } 5) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0.4019 - 0.4019 = 0.1962$$

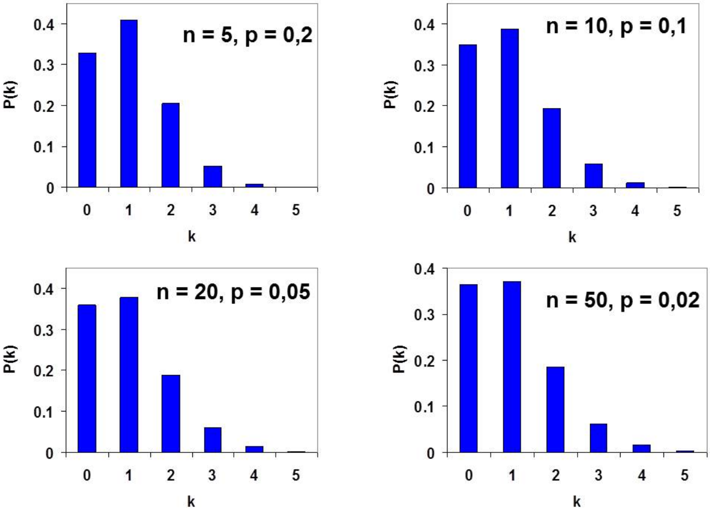
Binomna razdioba vjerojatnosti, $n = 5$



Binomna razdioba vjerojatnosti, $p = 0.3$



Binomna razdioba vjerojatnosti, $n \cdot p = 1$



Beskonačan (prebrojiv) skup vrijednosti slučajne varijable

Primjer. Slučajna varijabla je definirana kao broj uspeješnih bacanja u pokusu u kojem loptu bacamo na koš sve dok ne promašimo. Odredite distribuciju vjerojatnosti slučajne varijable ako je vjerojatnost uspješnog bacanja (pogotka u jednom bacanju) 0.8. Kolika je vjerojatnost da ćemo imati točno 5 uspješnih uzastopnih bacanja?

Rješenje. Moguće vrijednosti slučajne varijable su

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Uočite da vrijednost slučajne varijable može biti bilo koji broj.

Vjerojatnost pogotka je

$$p = 0.8,$$

a vjerojatnost promašaja je

$$q = 1 - p = 0.2.$$

Označima uspješno bacanje s **+** a neuspješno s **-**. Sada je

$$P(+) = 0.8 \quad \text{i} \quad P(-) = 0.2-$$

Ako smo imali 0 uspješnih bacanja, to znači da smo promašili u prvom bacanju pa je

$$P(0) = P(-) = 0.2.$$

Ako je vrijednost varijable 1, to znači da smo u prvom bacanju pogodili koš (vjerojatnost tog događaja je 0.8) a u drugom bacanju smo ga promašili, pa je vjerojatnost da smo imali jedno uspješno bacanje u nizu jednaka

$$P(1) = P(+-) = P(+) \cdot P(-) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16.$$

Vjerojatnost za dva uspješna bacanja u nizu je

$$P(2) = P(++-) = P(+) \cdot P(+) \cdot P(-) = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.128.$$

Ukoliko je vrijednost varijable k, to znači da smo imali k uspješnih bacanja u nizu i $k+1$-vo bacanje je bilo neuspješno:

$$\begin{aligned} P(k) &= P(\underbrace{++\ldots+}_{k}-) = \\ &= \underbrace{P(+)\cdot P(+)\cdot\ldots\cdot P(+)}_{k}\cdot P(-) = \\ &= \underbrace{0.8\cdot 0.8\cdot\ldots\cdot 0.8}_{k}\cdot 0.2 = \\ &= 0.8^k\cdot 0.2 \end{aligned}$$

$$P(5) = 0.8^5\cdot 0.2 = 0.065536$$

Napomena. Ovo nije binomna distribucija.

Funkcija distribucije

Primjer. Kolika je vjerojatnost da će u 5 bacanja biti postignuto

a) najviše 3 koša;
b) barem 3 koša,

ukoliko je vjerojatnost pogotka jednaka 0.8?

Rješenje. U jednom od prethodnih primjera smo izračunali distribuciju vjerojatnosti za 3 bacanja.

Na isti način izračunamo distribuciju vjerojatnosti za 5 bacanja ($n = 5$).

k	$P(k)$
0	0.00032
1	0.00640
2	0.05120
3	0.20480
4	0.40960
5	0.32768

b) najviše 3 koša

0 ili 1 ili 2 ili 3 koša

k	$P(k)$
0	**0.00032**
1	**0.00640**
2	**0.05120**
3	**0.20480**
4	0.40960
5	0.32768

$$P(\text{najviše 3 koša}) = 0.00032 + 0.00640 + 0.05120 + 0.20480 = 0.26272$$

a) barem 3 koša

3 ili 4 ili 5 koševa

k	$P(k)$
0	0.00032
1	0.00640
2	0.05120
3	**0.20480**
4	**0.40960**
5	**0.32768**

$$P(\text{barem 3 koša}) = 0.20480 + 0.40960 + 0.32768 = 0.94208$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da će u **300** bacanja biti postignuto

a) najviše **250** koševa;

b) barem **250** koševa,

ukoliko je vjerojatnost pogotka jednaka 0.8?

Postupak iz prethodnog primjera zahtijeva previše računanja.
Praktično je neprimjenjiv u ovom slučaju.

Izračunajmo kumulativne vjerojatnosti u primjeru s 5 bacanja.

k	$P(k)$	$P(1) + \ldots + P(k)$
0	0.00032	0.00032
1	0.00640	0.00672
2	0.05120	0.05792
3	0.20480	0.26272
4	0.40960	0.67232
5	0.32768	1.00000

Zbroj vjerojatnosti nam predstavlja vjerojatnost da je broj pogodaka manji lil jednak k.

Vjerojatnost za barem najviše 3 pogotka u pet bacanja očitavamo direktno iz tablice:

k	$P(k)$	$P(1) + \ldots + P(k)$
0	0.00032	0.00032
1	0.00640	0.00672
2	0.05120	0.05792
3	0.20480	**0.26272**
4	0.40960	0.67232
5	0.32768	1.00000

$$P(\text{najviše 3 koša}) = 0.26272$$

Ako je X broj postignutih koševa, ovo možemo zapisati kao

$$P(X \leq 3) = 0.26272$$

Da je postignuto 3 i više koševa zapisujemo kao $X \geq 3$.

Pripadnu vjerojatnost ne možemo očiteti iz tablice.

$X \geq 3$ je suprotan događaj od $X < 3$, tj. $X \leq 2$. Zato je

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$$

k	$P(k)$	$P(1) + \ldots + P(k)$
0	0.00032	0.00032
1	0.00640	0.00672
2	0.05120	**0.05792**
3	0.20480	0.26272
4	0.40960	0.67232
5	0.32768	1.00000

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.05792 = 0.94208$$

Za slučajnu varijablu X **funkcija distribucije (vjerojatnosti)** je definirana s

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Kod binomne distribucije smo postupnim zbrajanjem vjerojatnosti izračunali funkciju distribucije:

k	$P(k)$	$F(k)$
0	0.00032	0.00032
1	0.00640	0.00672
2	0.05120	0.05792
3	0.20480	0.26272
4	0.40960	0.67232
5	0.32768	1.00000

Kako riješiti problem sa 300 bacanja?

Vrijednosti su tabelirane.

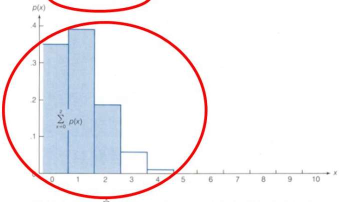
- Statističke tablice.
- Statistički računalni paketi.
- **R**
- Riješimo primjer s 5 bacanja pomoću R-a.

Primjer statističke tablice

Binomna distribucija, $n = 5$, $p = 0.8$, funkcija distribucije

1184 APPENDIX B TABLES

TABLE II Binomial Probabilities



Tabulated values are $\sum_{x=0}^{k} p(x)$. (Computations are rounded at the third decimal place.)

a. $n = 5$

k \ p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.951	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000	.000
1	.999	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000	.000
2	1.000	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001	.000
3	1.000	1.000	1.000	.993	.969	.913	.812	.663	.472	.263	.081	.023	.001
4	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226	.049

b. $n = 6$

k \ p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.941	.735	.531	.262	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000	.000	.000
1	.999	.967	.886	.655	.420	.233	.109	.041	.011	.002	.000	.000	.000
2	1.000	.998	.984	.901	.744	.544	.344	.179	.070	.017	.001	.000	.000
3	1.000	1.000	.999	.983	.930	.821	.656	.456	.256	.099	.016	.002	.000
4	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.959	.891	.767	.580	.345	.114	.033	.001
5	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.984	.953	.882	.738	.469	.265	.059

R

Vjerojatnost:

```
> dbinom(3, size=5, prob=0.8)
0.2048
```

Funkcija distribucije:

```
> pbinom(3, size=5, prob=0.8)
0.26272
```

Primjer s 300 bacanja: `> pbinom(250, size=300, prob=0.8)`

```
0.9377926
```

Vjerojatnost da će biti postignuto najviše 250 koševa:

$$P(X \leq 250) = 0.937793$$

Vjerojatnost da će biti postignuto barem 250 koševa:

$$\begin{aligned} P(X \geq 250) &= 1 - P(X < 250) = 1 - P(X \leq 249) = \\ &= 1 - 0.917037 = 0.082963 \end{aligned}$$

```
> pbinom(249, size=300, prob=0.8)
0.9170369
```

Poissonova distribucija

Primjer. Arsenal kao domaćin po utakmici postiže u prosjeku 1.89 gola. Kolika je vjerojatnost da će na utakmici (kod kuće) postići točno 3 gola?

Rješenje. Distribucija? Binomna?

Tijekom utakmice n posjeda lopte.

Iz svakog posjeda vjerojatnost pogotka je p.

Broj uspjeha u n ponavljanja (posjeda) $\rightarrow$ Binomna distribucija, $B(n, p)$.

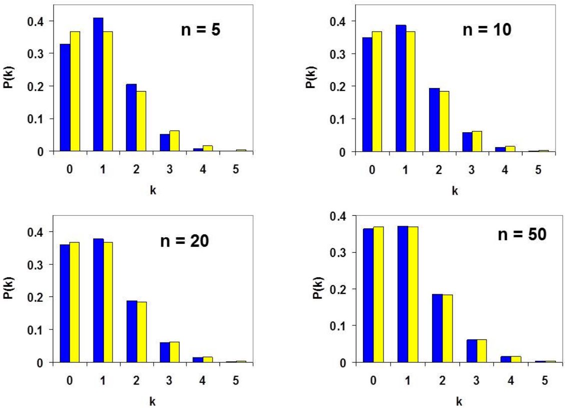
Koliki su n i p?

1.89 golova po utakmici $\rightarrow$ Očekivanje je $n \cdot p = 1.89$

Iz zadatka ne možemo saznati koliki su n i p.

Za veliki n i mali p ($n \cdot p$ reda veličine 1) binomna distribucija je slična Poissonovoj distribuciji.

Usporedba binomne ($n \cdot p = 1$) i Poissonove razdiobe vjerojatnosti ($\lambda = 1$)



Poissonova distribucija

Distribucija vjerojatnosti Poissonove distribucije je dana s

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\dots$$

λ je parametar distribucije: Po(λ)

Očekivanje za Poissonovu distribuciju: $\quad \mathrm{E}\,(X)=\lambda$

Ako binomnu distribuciju aproksimiramo Poissonovom distribucijom stavljamo $\lambda=n\cdot p$.

Vratimo se na zadatak.

1.89 golova po utakmici $\rightarrow$ Očekivanje je $\lambda = n \cdot p = 1.89$

Poissonova distribucija: Po(1.89).

$$P(X = 3) = \frac{1.89^3}{3!} e^{-1.89} = 0.1700$$

R:

Kolika je vjerojatnost da će Arsenal postići barem 3 zgoditka?

$P(X \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - P(X \leq 2) =$

```
> ppois(2, lambda=1.89)
0.7064193
```

$= 1 - 0.706419 = 0.293581$

Normalna (Gaussov) distribucija

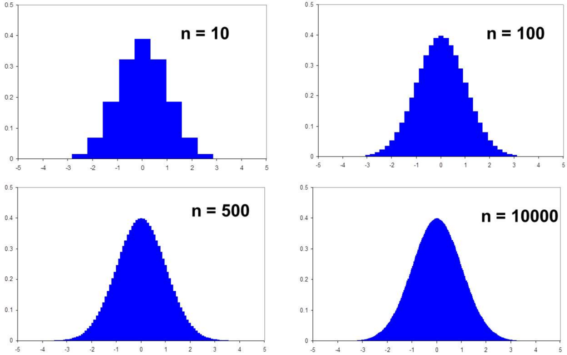
Neka je X binomna slučajna varijabla s parametrima n i p.

Promatrajmo standardizirirranu slučajnu varijablu

$$Z = \frac{X - \mathrm{E}(x)}{\mathrm{St.d.}(X)} = \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{p(1-p)n}}.$$

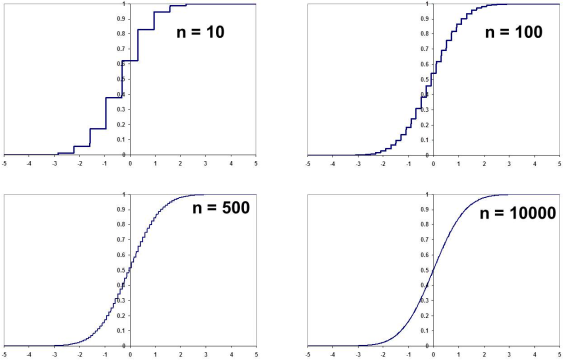
Za standardiziranu varijablu je $\mathrm{E}(X) = 0$ i $\mathrm{Var}(X) = 1$.

Distribucija vjerojatnosti standardizirane binomne varijable ($p = 0.5$; $n = 10, 100, 500, 10000$)



2

Funkcija distribucija vjerojatnosti standardizirane binomne varijable ($p = 0.5$; $n = 10, 100, 500, 10000$)



1

Uočljivo je da se distribucija ove standardizirane varijable stabilizira kada je n velik.

Za veliki n je distribucija standardizirane varijable slična distribuciji pod nazivom **normalna** distribucija.

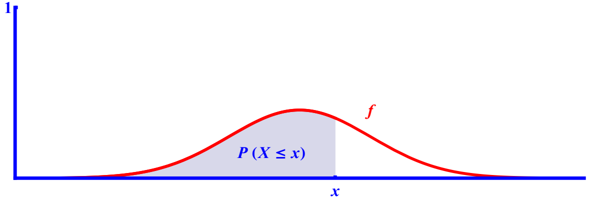
Normalna distribucija spada u klasu neprekidnih distribucija (slučajna varijabla s normalnom distribucijom može poprimiti sve moguće vrijednosti).

Neprekidna distribucija.

Za distribuciju vjerojatnosti slučajne varijable kažemo da je **neprekidna** ukoliko postoji funkcija f takva da je

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Vjerojatnost je zadana površinom ispod krivulje:



Funkcija gustoće vjerojatnosti.

Funkcija f se naziva **funkcija gustoće vjerojatnosti**.

Svojstva funkcije gustoće:

- $f(x) \geq 0$ - vjerojatnost je uvijek pozitivna
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ - vjerojatnost sigurnog događaja je 1.

Očekivanje neprekidne slučajne varijable:

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\, dt$$

Varijanca:

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}\,(X))^2 = \mathrm{E}\,(X^2) - (\mathrm{E}\,(X))^2$$

Normalna distribucija.

Funkcija gustoće vjerojatnosti za normalnu distribuciju:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu, \ \sigma$ - parametri normalne distribucije

Očekivanje za normalnu distribuciju:

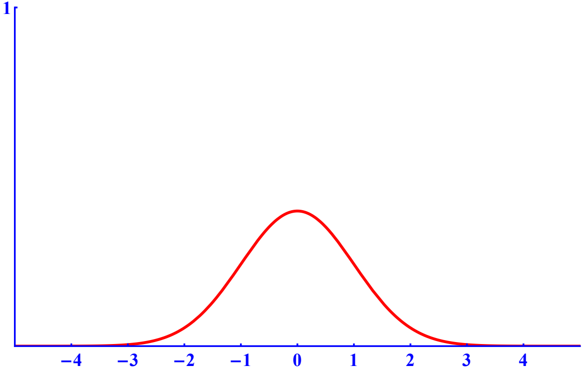
$$\mathrm{E}\left(X\right) = \mu$$

Varijanca za normalnu distribuciju:

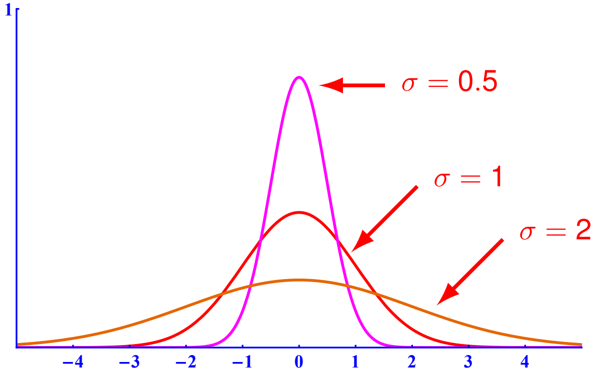
$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \sigma^2$$

Jedinična normalna distribucija

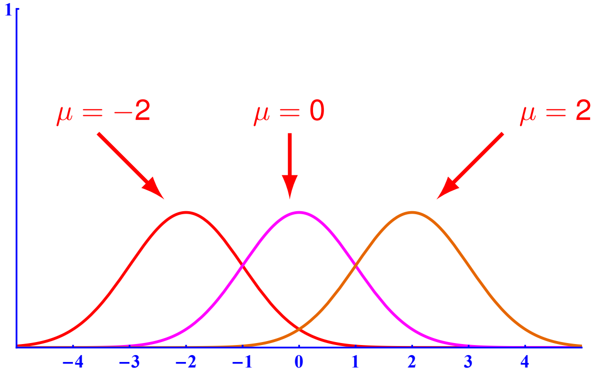
$\mu = 0, \ \sigma = 1$



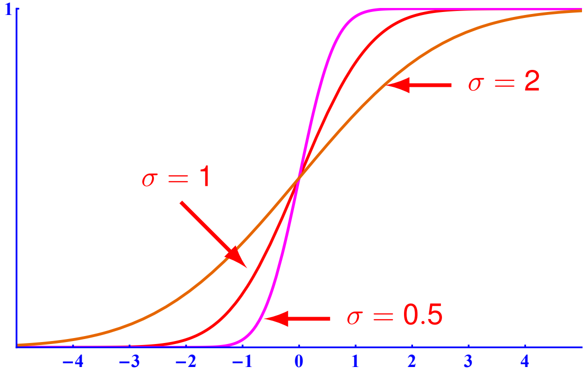
Funkcija gustoće za normalnu distribuciju ($\mu = 0,\ \sigma = 0.5, 1, 2$)



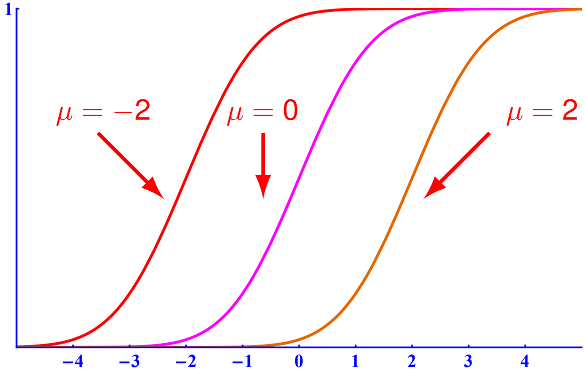
Funkcija gustoće za normalnu distribuciju ($\mu = -2, 0, 2,\ \sigma = 1$)



Funkcija distribucije za normalnu distribuciju ($\mu = 0,\ \sigma = 0.5, 1, 2$)



Funkcija distribucije za normalnu distribuciju ($\mu = -2, 0, 2,\ \sigma = 1$)



Ako varijabla X ima normalnu razdiobu onda i $a \cdot X + b$ također ima normalnu razdiobu!

Za normalnu varijablu X s očekivanjem μ i varijancom σ^2, standardizirana varijabla

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ima normalnu razdiobu s očekivanjem 0 i varijancom 1.

Primjer. Ako slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu $N(3,4)$, kolika je vjerojatnost da će vrijednost slučajne varijable biti manja od 5?

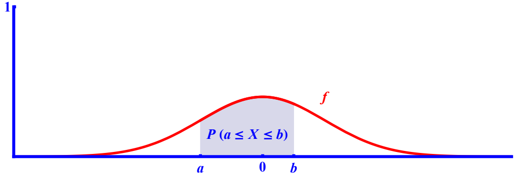
Rješenje. $\mu = 3, \quad \sigma^2 = 4, \quad \sigma = 2$

$$P(X \leq 5) = ?$$

```
> pnorm(5, mean=3, sd=2)
0.8413447
```

$$P(X \leq 5) = 0.8413$$

Kako izračunati $P(a \leq X \leq b)$?



$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

Napomena. Uočite da je kod neprekidnih distribucija $P(X = a) = 0$ za svaki a.

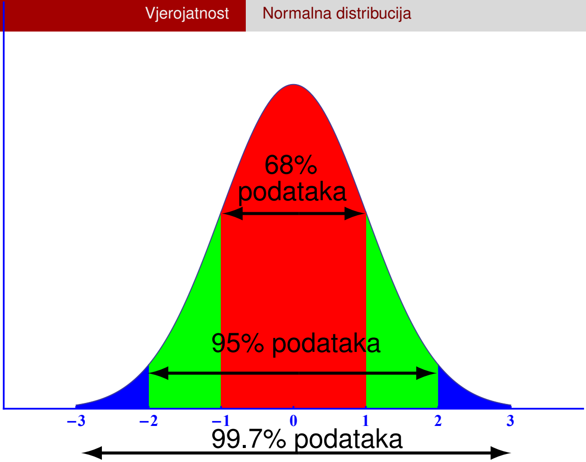
Primjer. Kolika je vjerojatnost da će slučajna varijabla s normalnom razdiobom $N(0,1)$ poprimiti vrijednost između -1 i 2?

Rješenje. $\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1, \quad \sigma = 1$

$$P(-1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq -1)$$

```
> pnorm(2, mean=0, sd=1)
0.9772499
> pnorm(-1, mean=0, sd=1)
0.1586553
```

$$\begin{aligned} P(-1 \leq X \leq 2) &= P(X \leq 2) - P(X \leq -1) = \\ &= 0.977250 - 0.158655 = 0.818595 \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= 0.682689 \\
P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) &= 0.954500 \\
P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) &= 0.997300
\end{aligned}
$$

Još neke neprekidne distribucije

- Studentova (t) distribucija
- F distribucija
- χ^2 ('chi' kvadrat) distribucija