

NEPARAMETARSKI TESTOVI

- Mnogi testovi pretpostavljaju normalnu razdiobu populacije/a.
- Ukoliko je ta pretpostavka narušena, koristimo testove koji nemaju pretpostavke o distribuciji populacije (**neparametarske testove**)
- Primjer neparametarskog testa je
 - **Pearsonov χ^2 -test**
 - **Kolmogorov-Smirnov test**
- Neparametarski testovi su manje osjetljivi na ekstremne vrijednosti (outliere) od parametarskih.
- Neparametarski testovi uglavnom imaju manju snagu od parametarskih kada su ispunjene pretpostavke parametarskih testova.

Medijan test

Nul-hipotezu koja se testira je da dvije populacije imaju isti medijan.

Dvije populacije: A i B.

Testiramo hipotezu o jednakosti medijana tih dviju populacija:

$$H_0 : M_A = M_B$$

Iz svake se populacije izabere po jedan uzorak (ne nužno iste veličine).

Na osnovu kombiniranog uzorka (nastalog spajanjem ova dva uzorka) odredi se kombinirani (zajednički) medijan.

Ukoliko je pretpostavka o jednakim medijanima točna, tada je udio jedinki ispod, odnosno iznad kombiniranog medijana otprilike podjednak u oba uzorka (grupe).

Daljnja analiza se svodi na proučavanje 2×2 tablice:

| | Grupa | | |
|----------------------|---------------|---------------|-------------|
| | Uzorak 1 | Uzorak 2 | Kombinirano |
| Iznad komb. medijana | A | B | $A + B$ |
| Ispod komb. medijana | C | D | $C + D$ |
| Ukupno | $m (= A + C)$ | $n (= B + D)$ | |

Za testiranje jednakosti distribucija koristi se Fisherov egzaktni test.

Metodu ćemo ilustrirati na primjeru korištenom za usporedbu srednjih vrijednosti.

Primjer. U studiji o razlici u apsolutnoj pogrešci kod pozicioniranja aktivne i pasivne ruke istraživači su testirali 20 studenata. Kod 10 studenata su mjerili apsolutnu pogrešku kod pozicioniranja aktivne ruke a kod preostalih 10 pogrešku kod pozicioniranja pasivne ruke. Rezultati mjerenja (u cm) prikazani su u tablici:

| Ispitanik | Aktivna ruka | Ispitanik | Pasivna ruka |
|-----------|--------------|-----------|--------------|
| 1 | 2.65 | 11 | 3.30 |
| 2 | 2.42 | 12 | 2.00 |
| 3 | 3.30 | 13 | 0.09 |
| 4 | 0.19 | 14 | 0.04 |
| 5 | 1.25 | 15 | 4.56 |
| 6 | 2.00 | 16 | 3.33 |
| 7 | 3.34 | 17 | 1.02 |
| 8 | 4.08 | 18 | 0.89 |
| 9 | 0.70 | 19 | 2.78 |
| 10 | 2.89 | 20 | 1.65 |

Tražimo kombinirani medijan.

Sve podatke poredamo po veličini

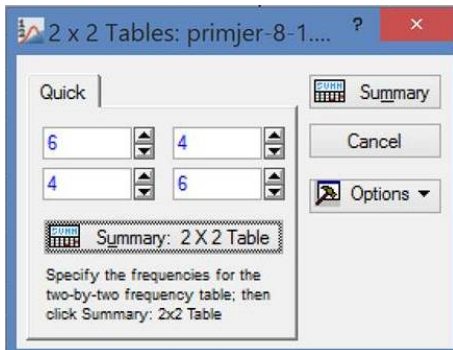
| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.04 | 0.09 | 0.19 | 0.7 | 0.89 | 1.02 | 1.25 | 1.65 | 2 | 2 |
| 2.42 | 2.65 | 2.78 | 2.89 | 3.3 | 3.3 | 3.33 | 3.34 | 4.08 | 4.56 |

kombinirani medijan = 2.21

Sada prebrojimo podatke iznad i ispod kombiniranog medijana.

kombinirani medijan = 2.21

| | Aktivna ruka | Pasivna ruka |
|-------|--------------|--------------|
| | 2.65 | 3.30 |
| | 2.42 | 2.00 |
| | 3.30 | 0.09 |
| | 0.19 | 0.04 |
| | 1.25 | 4.56 |
| | 2.00 | 3.33 |
| | 3.34 | 1.02 |
| | 4.08 | 0.89 |
| | 0.70 | 2.78 |
| | 2.89 | 1.65 |
| Iznad | 6 | 4 |
| Ispod | 4 | 6 |



| | 2 x 2 Table (primjer-8-1. sta) | | |
|----------------------------|--------------------------------|----------|------------|
| | Column 1 | Column 2 | Row Totals |
| Frequencies, row 1 | 6 | 4 | 10 |
| Percent of total | 30,000% | 20,000% | 50,000% |
| Frequencies, row 2 | 4 | 6 | 10 |
| Percent of total | 20,000% | 30,000% | 50,000% |
| Column totals | 10 | 10 | 20 |
| Percent of total | 50,000% | 50,000% | |
| Chi-square (df=1) | ,80 | p= ,3711 | |
| V-square (df=1) | ,76 | p= ,3833 | |
| Yates corrected Chi-square | ,20 | p= ,6547 | |
| Phi-square | ,04000 | | |
| Fisher exact p, one-tailed | | p= ,3281 | |
| two-tailed | | p= ,6563 | |
| McNemar Chi-square (A/D) | ,08 | p= ,7728 | |
| Chi-square (B/C) | ,13 | p= ,7237 | |

Fisherov egzaktini dvostrani test: $p = 0.6563$

Wilcoxon-Mann-Whitneyev test

- Neparametarski analogon Studentovom t -testu za nezavisne populacije.
- U literaturi je poznat i pod nazivima
 - **Wilcoxonov test sume rangova**
 - **Mann-Whitneyev U-test**
- **Nul hipoteza.**
 - X - slučajno izabrana jedinka iz prve populacije
 - Y - slučajno izabrana jedinka iz druge populacije

$$H_0 : P(X < Y) = P(X > Y)$$

- **Alternativna hipoteza.**

$$H_1 : P(X < Y) < P(X > Y) \quad \text{ili} \quad P(X < Y) > P(X > Y)$$

- Test može biti jednostrani i dvostrani.

- Često se kao nul hipoteza koristi jača tvrdnja:
Distribucija obilježja je jednaka u obje populacije.

Pretpostavke testa.

- Distribucija obilježja je neprekidno ili ordinalno.
- Uzorci su izabrani nezavisno.

Test.

- Iz svake populacije nezavisno izaberemo po jedan uzorak (ne nužno iste veličine)
 - n_1 - veličina uzorka iz prve populacije
 - n_2 - veličina uzorka iz druge populacije
- Svakom podatku se pridijeli rang iz kombiniranog uzorka.
Tako pridijeljeni rangovi poprimaju vrijednosti od 1 do $n_1 + n_2$.
- Ukoliko je obilježje jednako distribuirano unutar obje populacije tada se očekuje da će prosječan rang biti podjednak za oba uzorka.
- Statistika:

W = zbroj rangova iz jednog od uzorka.

- Koji će se uzorak izabrati nije važno jer je ukupan zbroj rangova za $N = n_1 + n_2$ opservacija jednak

$$1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{N(N + 1)}{2}.$$

Zbroj rangova za drugi uzorak je

$$\frac{N(N + 1)}{2} - W.$$

- Vrijedi:

$$E(W) = \frac{n_1(N + 1)}{2}$$

$$\text{Var}(W) = \frac{n_1 n_2 (N + 1)}{12}$$

- Za veliki uzorak je W približno distribuiran prema normalnoj distribuciji ($n_1 \geq 10$ ili $n_2 \geq 10$; $N \geq 20$).

- U literaturi se često koristi Mann-Whitneyev U-test.

Test je ekvivalentan ovom testu jer statistika U u MW testu je

$$U = n_1 n_2 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - W$$

Ovdje je korištena statistika korištena u varijanti poznatoj pod imenom Wilcoxonov test sume rangova.

Izjednačeni rangovi

- Wilcoxonov test pretpostavlja da je obilježje neprekidno distribuirano.
- S jako preciznim mjerenjem neprekidne varijable, vjerojatnost istih vrijednosti (time i rangova) u dva (ili više) mjerenja je 0.
- Relativno grubo mjerenje može uzrokovati izjednačene vrijednosti.
- U slučaju jednakih vrijednosti, svakoj opservaciji pridružujemo srednju vrijednost rangova koje bi imale da izjednačenja nema.
- Ukoliko se izjednačenje dogodi između dvije ili više vrijednosti unutar samo jedne grupe to nema utjecaja na statistiku W .
- Ukoliko se to dogodi na dvije ili više opservacija iz obje grupe pojavljuje se utjecaj na W
- Međutim, svaka pojava izjednačenja utječe na varijabilnost rangova, a time i na varijancu statistike W .

- Varijanca

$$\text{Var}(W) = \frac{n_1 n_2 (N + 1)}{12}$$

izračunata je uz pretpostavku da nema izjednačenih rangova.

- U slučaju izjednačenja potrebno je koristiti korekcije.
 - g - broj različitih vrijednosti za koje su rangovi izjednačeni
 - t_j - broj opservacija s istom j -tom vrijednošću ($j = 1, \dots, g$)

Korigirana varijanca:

$$\text{Var}(W) = \frac{n_1 n_2 (N + 1)}{12} - \frac{n_1 n_2}{12N(N - 1)} \sum_j (t_j^3 - t_j).$$

Primjer. U studiji o razlici u apsolutnoj pogrešci kod pozicioniranja aktivne i pasivne ruke istraživači su testirali 20 studenata. Kod 10 studenata su mjerili apsolutnu pogrešku kod pozicioniranja aktivne ruke a kod preostalih 10 pogrešku kod pozicioniranja pasivne ruke. Rezultati mjerenja (u cm) prikazani su u tablici:

| Ispitanik | Aktivna ruka | Ispitanik | Pasivna ruka |
|-----------|--------------|-----------|--------------|
| 1 | 2.65 | 11 | 3.30 |
| 2 | 2.42 | 12 | 2.00 |
| 3 | 3.30 | 13 | 0.09 |
| 4 | 0.19 | 14 | 0.04 |
| 5 | 1.25 | 15 | 4.56 |
| 6 | 2.00 | 16 | 3.33 |
| 7 | 3.34 | 17 | 1.02 |
| 8 | 4.08 | 18 | 0.89 |
| 9 | 0.70 | 19 | 2.78 |
| 10 | 2.89 | 20 | 1.65 |

Odredimo rangove kombiniranog uzorka.

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.04 | 0.09 | 0.19 | 0.7 | 0.89 | 1.02 | 1.25 | 1.65 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9.5 | 9.5 |
| 2.42 | 2.65 | 2.78 | 2.89 | 3.3 | 3.3 | 3.33 | 3.34 | 4.08 | 4.56 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15.5 | 15.5 | 17 | 18 | 19 | 20 |

| Aktivna ruka | | Pasivna ruka | |
|-----------------|------------|--------------|-------------|
| Pogreška | Rang | Pogreška | Rang |
| 2.65 | 12 | 3.30 | 15.5 |
| 2.42 | 11 | 2.00 | 9.5 |
| 3.30 | 15.5 | 0.09 | 2 |
| 0.19 | 3 | 0.04 | 1 |
| 1.25 | 7 | 4.56 | 20 |
| 2.00 | 9.5 | 3.33 | 17 |
| 3.34 | 18 | 1.02 | 6 |
| 4.08 | 19 | 0.89 | 5 |
| 0.70 | 4 | 2.78 | 13 |
| 2.89 | 14 | 1.65 | 8 |
| <i>W</i> | 113 | | (97) |

$$n_1 = 10$$

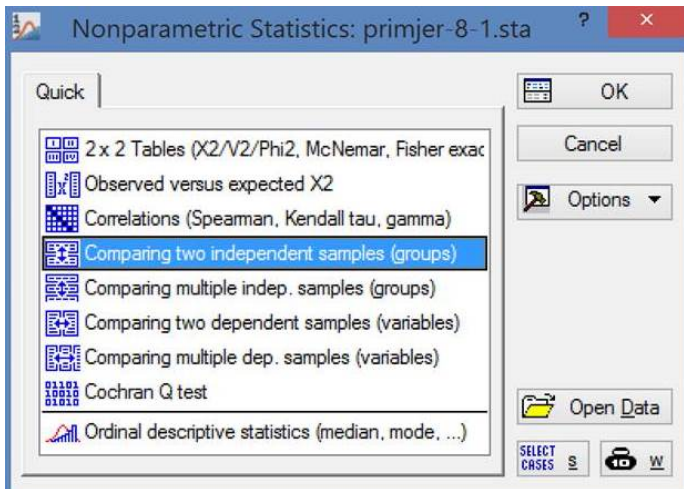
$$n_2 = 10$$

$$N = n_1 + n_2 = 20$$

Statistica

← Resume... Ctrl+R

- Basic Statistics/Tables
- Multiple Regression
- ANOVA
- Nonparametrics**
- Distribution Fitting
- Distributions & Simulation
- Advanced Linear/Nonlinear Models ▶
- Multivariate Exploratory Techniques ▶
- Industrial Statistics & Six Sigma ▶
- Power Analysis
- Automated Neural Networks
- PLS, PCA, Multivariate/Batch SPC
- Variance Estimation and Precision
- Statistics of Block Data ▶
- STATISTICA Visual Basic
- Batch (ByGroup) Analysis
- Probability Calculator ▶



Select dep. variables and an indep. (grouping) variable

1 - Pogreska
2 - Aktivna

1 - Pogreska
2 - Aktivna

OK

Cancel

[Bundles]...

Use the "Show appropriate variables only" option to pre-screen variable lists and show categorical and continuous variables. Press F1 for more information.

Select All Spread Zoom

Select All Spread Zoom

Dependent variable list:

1

Indep. (grouping) variable:

2

Show appropriate variables only

Comparing Two Groups: primjer-8-1.... ? X

Variables

Dependent: Pogreska
Grouping: Aktivna

Codes for: Group 1: 1 Group 2: 0

Quick

- Wald-Wolfowitz runs test
- Kolmogorov-Smimov two-sample test
- Mann-Whitney U test
- Apply continuity correction
- Box & whisker plot by group
- Categorized histograms by group

M-W U test

Cancel

Options

SELECT CASES S **W**

By Group

Double-click on the respective field to select codes from the list of valid variable values

p-value for highlighting:
.05

Mann-Whitney U Test (w/ continuity correction) (primjer-8-1.sta)

By variable Aktivna

Marked tests are significant at $p < .05000$

| variable | Rank Sum Group 1 | Rank Sum Group 2 | U | Z | p-value | Z adjusted | p-value | Valid N Group 1 | Valid N Group 2 | 2*1sided exact p |
|----------|---------------------|---------------------|----------|----------|----------|---------------|----------|--------------------|--------------------|---------------------|
| Pogreska | 113,00000 | 97,00000 | 42,00000 | 0,566947 | 0,570751 | 0,567373 | 0,570461 | 10 | 10 | 0,578742 |

- Z, p-value - normalna aproksimacija bez korekcije za izjednačene rangove
- Z adjusted, p-value - normalna aproksimacija s korekcijom za izjednačene rangove
- 2*1sided exact p - p-vrijednost za egzaktnu distribuciju

Kruskal-Wallisov test

- Neparametarski analogon ANOVA testu s jednostrukom klasifikacijom.
- U literaturi je poznat i pod nazivima
 - Kruskal-Wallis ANOVA
 - neparametarska ANOVA
- Kao i Wilcoxon-Mann-Witneyev test, Kruskal-Wallisov test koristi rangove, te su nazivi koji sadrže ANOVA loši.
- Kruskal-Wallisov test uspoređuje srednje rangove koristeći usporedbu varijanci rangova na isti način kao što je to napravljeno u ANOVA testu.
- KW test je proširenje Wilcoxon-Mann-Witneyevog testa na usporedbu više nezavisnih populacija.

- X_i - slučajno izabrana jedinka iz i -te populacije
- **Nul hipoteza.** $H_0 : P(X_i < X_j) = P(X_i > X_j)$
za sve $i \neq j, i, j = 1, \dots, k$.
- **Alternativna hipoteza.**
 $H_1 : P(X_i < X_j) \neq P(X_i > X_j)$
za neki i i j .
- Kao i kod WMW testa, često se kao nul hipoteza koristi
Očekivanja srednjeg ranga u uzorcima su jednaka.
ili jača tvrdnja:
Distribucija obilježja je jednaka u svim populacijama.

Pretpostavke testa.

- Distribucija obilježja je neprekidno ili ordinalno.
- Uzorci su izabrani nezavisno.

Test.

- Iz svake od k populacija nezavisno izaberemo po jedan uzorak (ne nužno iste veličine):
 n_i - veličina uzorka iz i -te populacije ($i = 1, \dots, k$)
- Svakom podatku se pridijeli rang iz kombiniranog uzorka.
Tako pridijeljeni rangovi poprimaju vrijednosti od 1 do
 $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
- Ukoliko je obilježje jednako distribuirano unutar obje populacije tada se očekuje da će prosječan rang biti podjednak za sve uzorka.

Podaci. Izračunamo rangove na kombiniranom uzorku.

| | | | | Grupa | | | |
|------------|------------|-----|------------|-------------|-------------|-----|-------------|
| | | | | 1 | 2 | ... | k |
| X_{11} | X_{21} | ... | X_{k1} | R_{11} | R_{21} | ... | R_{k1} |
| X_{12} | X_{22} | ... | X_{k2} | R_{12} | R_{22} | ... | R_{k2} |
| \vdots | \vdots | | \vdots | \vdots | \vdots | | \vdots |
| X_{1n_1} | \vdots | | \vdots | R_{1n_1} | \vdots | | \vdots |
| | \vdots | | \vdots | | \vdots | | R_{2n_k} |
| | X_{2n_2} | | X_{2n_k} | | R_{2n_2} | | |
| | | | | | | | |
| | | | | \bar{R}_1 | \bar{R}_2 | ... | \bar{R}_k |

\bar{R}_i srednja vrijednost rangova u i -tom uzorku

Statistika.

$$KW = \frac{12}{N(N+1)} \sum_i n_i (\bar{R}_i - \bar{R})^2$$

n_i - veličina i -tog uzorka

N - veličina kombiniranog uzorka ($N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$)

\bar{R}_i - srednja vrijednost rangova u i -tom uzorku

\bar{R} - srednja vrijednost rangova u kombiniranom uzorku.

Ukoliko je broj grupa veći od 3 ($k \geq 3$) i veličina svakog uzorka veća od 5 ($n_i \geq 5$), tada je razdioba statistike KW dobro aproksimirana χ^2 razdiobom s $k - 1$ stupnjem slobode.

Izjednačeni rangovi

- Kao i kod Wilcoxonovog testa, pretpostavlja se da je obilježje neprekidno distribuirano te je vjerojatnost istih vrijednosti u dva (ili više) mjerenja 0.
- Ukoliko postoje izjednačeni rangovi, mijenja se varijanca rangova te treba korigirati KW statistiku.
- KW statistika se dijeli s

$$1 - \frac{1}{N^3 - N} \sum_{j=1}^g (t_j^3 - t_j).$$

- g - broj različitih vrijednosti za koje su rangovi izjednačeni
- t_j - broj opservacija s istom j -tom vrijednošću ($j = 1, \dots, g$)

'Post-hoc' test

Kao i ANOVA, Kruskal-Wallisov test u slučaju odbacivanja hipoteze pokazuje da se populacije razlikuju ali ne daje odgovor na pitanje koje se populacije razlikuju.

'Post-hoc' test: **Dunnov test**

Primjer. Trener želi usporediti tri različite metode treninga. Svaku od metoda primijenio je na po $n = 4$ studenta. Nakon 30 dana ocijenjena je uspješnost i ocjene su prikazane u tablici

| Metoda | Opservacije | | | |
|----------|-------------|---|----|---|
| Metoda 1 | 3 | 6 | 4 | 7 |
| Metoda 2 | 11 | 8 | 10 | 7 |
| Metoda 3 | 6 | 9 | 5 | 8 |

Jesu li sve tri metode jednako uspješne? Hipotezu testirajte uz razinu značajnosti $\alpha = 0.05$.

Rangiranje podataka.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 2 | 3 | 4.5 | 4.5 | 6.5 | 6.5 | 8.5 | 8.5 | 10 | 11 | 12 |

| 1. uzorak | | 2. uzorak | | 3. uzorak | |
|-------------|------|-----------|------|-----------|------|
| Ocjena | Rang | Ocjena | Rang | Ocjena | Rang |
| 3 | 1 | 11 | 12 | 6 | 4.5 |
| 6 | 4.5 | 8 | 8.5 | 9 | 10 |
| 4 | 2 | 10 | 11 | 5 | 3 |
| 7 | 6.5 | 7 | 6.5 | 8 | 8.5 |
| \bar{R}_j | 3.5 | | 9.5 | | 6.5 |

Statistica

Nonparametric Statistics: primjer-4-3.sta

Quick

- 2 x 2 Tables ($\chi^2/V^2/\Phi^2$, McNemar, Fisher exact)
- Observed versus expected χ^2
- Correlations (Spearman, Kendall tau, gamma)
- Comparing two independent samples (groups)
- Comparing multiple indep. samples (groups)**
- Comparing two dependent samples (variables)
- Comparing multiple dep. samples (variables)
- Cochran Q test
- Ordinal descriptive statistics (median, mode, ...)

OK

Cancel

Options ▾

Open Data

SELECT

34 30

Definiranje varijabli.

Select dep. variables and an indep. (grouping) variable

1 - Ocjena
2 - Metoda

1 - Ocjena
2 - Metoda

OK

Cancel

[Bundles]...

Use the "Show appropriate variables only" option to pre-screen variable lists and show categorical and continuous variables. Press F1 for more information.

Select All Spread Zoom

Select All Spread Zoom

Dependent variable list:

1


Indep. (grouping) variable:

2


Show appropriate variables only


Kruskal-Wallis ANOVA and Median Test: primje... ? X


Quick


 Variables


Dependent variables: **Ocjena**
Grouping variable: **Metoda**


 Codes: none

 Summary: Kruskal-Wallis ANOVA & Median test


 Multiple comparisons of mean ranks for all groups



 Box & whisker


 Categorized histogram

 Summary

Cancel

 Options ▼

 SELECT CASES S  W

 By Group

p-value for highlighting:
.05

Rezultat medijan testa.

Workbook7* - Median Test, Overall Median = 7,00000; Ocjena (primjer-4-3.sta)

Workbook7* <

- Nonparametrics (p)
 - Kruskal-Wallis
 - Kruskal-Wa
 - Median Te

Median Test, Overall Median = 7,00000; Ocjena (primjer-4-3.sta)
 Independent (grouping) variable: Metoda
 Chi-Square = 4,800000 df = 2 p = ,0907

| Dependent: Ocjena | 1 | 2 | 3 | Total |
|-------------------------------|----------|----------|-----------|----------|
| <= Median: observed | 4,00000 | 1,00000 | 2,000000 | 7,00000 |
| expected | 2,33333 | 2,33333 | 2,333333 | |
| obs.-exp. | 1,66667 | -1,33333 | -0,333333 | |
| > Median: observed | 0,00000 | 3,00000 | 2,000000 | 5,00000 |
| expected | 1,66667 | 1,66667 | 1,666667 | |
| obs.-exp. | -1,66667 | 1,33333 | 0,333333 | |
| Total: observed | 4,00000 | 4,00000 | 4,000000 | 12,00000 |

Rezultat Kruskal-Wallisovog testa.

Kruskal-Wallis ANOVA by Ranks; Ocjena (primjer-4-3.sta)
Independent (grouping) variable: Metoda
Kruskal-Wallis test: $H(2, N=12) = 5,597173$ $p = ,0609$

| Depend.: Ocjena | Code | Valid N | Sum of Ranks | Mean Rank | | |
|--------------------|------|------------|-----------------|--------------|--|--|
| 1 | 1 | 4 | 14,00000 | 3,500000 | | |
| 2 | 2 | 4 | 38,00000 | 9,500000 | | |
| 3 | 3 | 4 | 26,00000 | 6,500000 | | |

'Post-hoc' test.

| Multiple Comparisons p values (2-tailed); Ocjena (primjer-4-3.sta) | | | | | | |
|--|----------|----------|----------|--|--|--|
| Independent (grouping) variable: Metoda | | | | | | |
| Kruskal-Wallis test: $H(2, N=12) = 5,597173$ $p = ,0609$ | | | | | | |
| Depend.: Ocjena | 1 | 2 | 3 | | | |
| | R:3,5000 | R:9,5000 | R:6,5000 | | | |
| 1 | | 0,055809 | 0,717950 | | | |
| 2 | 0,055809 | | 0,717950 | | | |
| 3 | 0,717950 | 0,717950 | | | | |

Test predznaka

- Dizajn **prije i poslije**
- Dva sparana uzorka.
- X - obilježje prije tretmana
 Y - obilježje poslije tretmana

- Uzorci:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

- Promatra se razlika: $D_i = Y_i - X_i$
- Ako tretman pozitivno utječe
→ očekuje se veći broj pozitivnih vrijednosti D_i .
- Ako tretman negativno utječe
→ očekuje se veći broj negativnih vrijednosti D_i .

- S^+ - broj pozitivnih razlika
 S^- - broj negativnih razlika
- Ukoliko nema utjecaja tretmana S^+ i S^- bi trebala biti podjednaki.
- Ako je distribucija obilježja prije i poslije tretmana ista, statistika S^+ distribuirana je prema binomnoj $B(n, 0.5)$ razdiobi.
- Za veliki uzorak može se koristiti normalna aproksimacija:

$$z = \frac{S^+ - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \sim N(0, 1)$$

- Ukoliko se pojedine vrijednosti prije i poslije tretmana poklapaju ($X_i = Y_i$, tj. $D_i = 0$), te opservacije treba isključiti iz uzorka.

Primjer. U istraživanju utjecaja stimulansa na krvni tlak, istraživači su dvanaestorici pacijenata dali stimulans. Svakom pacijentu je krvni tlak izmjeren prije i poslije davanja stimulansa.

Postoji li opravdanje za tvrdnju da stimulans povećava krvni tlak?

| Pacijent | Krvni tlak | |
|----------|------------------|--------------------|
| | Prije (X) | Poslije (Y) |
| 1 | 120 | 128 |
| 2 | 124 | 131 |
| 3 | 130 | 131 |
| 4 | 118 | 127 |
| 5 | 140 | 132 |
| 6 | 128 | 125 |

| Pacijent | Krvni tlak | |
|----------|------------------|--------------------|
| | Prije (X) | Poslije (Y) |
| 7 | 140 | 141 |
| 8 | 135 | 137 |
| 9 | 126 | 118 |
| 10 | 130 | 132 |
| 11 | 126 | 129 |
| 12 | 127 | 135 |

| Krvni tlak | | |
|--------------|----------------|----------------|
| Prije (X) | Poslije (Y) | Razlika (D) |
| 120 | 128 | 8 |
| 124 | 131 | 7 |
| 130 | 131 | 1 |
| 118 | 127 | 9 |
| 140 | 132 | -8 |
| 128 | 125 | -3 |

| Krvni tlak | | |
|--------------|----------------|----------------|
| Prije (X) | Poslije (Y) | Razlika (D) |
| 140 | 141 | 1 |
| 135 | 137 | 2 |
| 126 | 118 | -8 |
| 130 | 132 | 2 |
| 126 | 129 | 3 |
| 127 | 135 | 8 |

$$S^+ = 9 \quad S^- = 3$$

Statistica.

Izbor testa.

Nonparametric Statistics: primjer-4-1.sta

Quick

- 2 x 2 Tables ($\chi^2/V^2/\Phi^2$, McNemar, Fisher exact)
- Observed versus expected χ^2
- Correlations (Spearman, Kendall tau, gamma)
- Comparing two independent samples (groups)
- Comparing multiple indep. samples (groups)
- Comparing two dependent samples (variables)**
- Comparing multiple dep. samples (variables)
- Cochran Q test

OK

Cancel

Options

Open Data

Izbor varijabli.

The dialog box is titled "Select the two variable lists to be compared" and contains two side-by-side list boxes. The left list box contains "1 - Prije" and "2 - Poslije", with "1 - Prije" selected. The right list box also contains "1 - Prije" and "2 - Poslije", with "2 - Poslije" selected. Below each list box are three buttons: "Select All", "Spread", and "Zoom". Under the left list box is a text field labeled "First variable list:" containing the number "1". Under the right list box is a text field labeled "Second variable list:" containing the number "2". At the bottom left is a checkbox labeled "Show appropriate variables only" which is currently unchecked. On the right side of the dialog are three buttons: "OK", "Cancel", and "[Bundles]...". Below these buttons is a blue text instruction: "Use the 'Show appropriate variables only' option to pre-screen variable lists and show categorical and continuous variables. Press F1 for more information." The dialog has a standard Windows-style title bar with a question mark icon and a close button (X).

Test predznaka (Sign test).

Comparing two variables: primjer-4-...

Variables

List 1: Prije
List 2: Poslije

Quick

Sign test

Wilcoxon matched pairs test

Box & whisker plots for all variables

Options

SELECT CASES S W

By Group

p-value for highlighting:
.05

Cancel

| Pair of Variables | Sign Test (primjer-4-1.sta) | | | |
|----------------------------|--|--------------------|----------|----------|
| | Marked tests are significant at $p < ,05000$ | | | |
| | No. of Non-ties | Percent $v < V$ | Z | p-value |
| Prije & Poslije | 12 | 75,00000 | 1,443376 | 0,148915 |

Wilcoxonov test rangova s predznakom

- Dizajn **prije i poslije**
- Slično kao i test predznaka jedino se u obzir uzimaju rangovi razlika $D_i = Y_i - X_i$.
- Razlike D_i se rangiraju po apsolutnim vrijednostima (bez obzira na predznak)
- Ukoliko nema razlike između obilježja (populacija) X i Y , tada bi suma rangova za negativne razlike trebala biti podjednaka kao i suma rangova za pozitivne razlike.
- **Statistika**
 T^+ = zbroj rangova pozitivnih razlika

- Za veliki uzorak distribucija od T^+ je približno normalna s

$$E(T^+) = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\text{Var}(T^+) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

- Statistika:

$$Z = \frac{T^+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

- **Korekcija za izjednačene rangove:**

$$C = \sum_{j=1}^g (t_j^3 - t_j).$$

- g - broj različitih vrijednosti za koje su rangovi izjednačeni
- t_j - broj opservacija s istom j -tom vrijednošću ($j = 1, \dots, g$)
- Korigirana statistika:

$$Z = \frac{T+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{C}{48}}}$$

Primjer s krvnim tlakom.

| Krvni tlak | | |
|------------------|--------------------|--------------------|
| Prije (X) | Poslije (Y) | Razlika (D) |
| 120 | 128 | 8 |
| 124 | 131 | 7 |
| 130 | 131 | 1 |
| 118 | 127 | 9 |
| 140 | 132 | -8 |
| 128 | 125 | -3 |

| Krvni tlak | | |
|------------------|--------------------|--------------------|
| Prije (X) | Poslije (Y) | Razlika (D) |
| 140 | 141 | 1 |
| 135 | 137 | 2 |
| 126 | 118 | -8 |
| 130 | 132 | 2 |
| 126 | 129 | 3 |
| 127 | 135 | 8 |

Određujemo rangove:

1 1 2 2 3 3 7 8 8 8 8 9
 1.5 1.5 3.5 3.5 5.5 5.5 7 9.5 9.5 9.5 9.5 12

| Krvni tlak | | | |
|--------------|----------------|----------------|------|
| Prije (X) | Poslije (Y) | Razlika (D) | Rang |
| 120 | 128 | 8 | 9.5 |
| 124 | 131 | 7 | 7 |
| 130 | 131 | 1 | 1.5 |
| 118 | 127 | 9 | 12 |
| 140 | 132 | -8 | 9.5 |
| 128 | 125 | -3 | 5.5 |

| Krvni tlak | | | |
|--------------|----------------|----------------|------|
| Prije (X) | Poslije (Y) | Razlika (D) | Rang |
| 140 | 141 | 1 | 1.5 |
| 135 | 137 | 2 | 3.5 |
| 126 | 118 | -8 | 9.5 |
| 130 | 132 | 2 | 3.5 |
| 126 | 129 | 3 | 5.5 |
| 127 | 135 | 8 | 9.5 |

$$T^+ = 9.5 + 7 + 1.5 + 12 + 1.5 + 3.5 + 3.5 + 5.5 + 9.5 = 53.5$$

Statistica. Isto kao i za test predznaka.

Nonparametric Statistics: primjer-4-1.sta

Quick

- 2 x 2 Tables ($\chi^2/V^2/\Phi^2$, McNemar, Fisher exact)
- Observed versus expected χ^2
- Correlations (Spearman, Kendall tau, gamma)
- Comparing two independent samples (groups)
- Comparing multiple indep. samples (groups)
- Comparing two dependent samples (variables)**
- Comparing multiple dep. samples (variables)
- Cochran Q test
- Ordinal descriptive statistics (median, mode, ...)

OK

Cancel

Options

Open Data

SELECT CASES S

10 W

Select the two variable lists to be compared

1 - Prije
2 - Poslije

1 - Prije
2 - Poslije

OK

Cancel

[Bundles]...

Use the "Show appropriate variables only" option to pre-screen variable lists and show categorical and continuous variables. Press F1 for more information.

Select All Spread Zoom

Select All Spread Zoom

First variable list:

1

Second variable list:

2

Show appropriate variables only



Comparing two variables: primjer-4-...

VariablesList 1: **Prnje**List 2: **Poslije**

Quick



Sign test



Wilcoxon matched pairs test

Box & whisker plots for all variables

Sign test

Cancel



Options ▾

SELECT
CASESSW

By Group

p-value for
highlighting:

.05



| Wilcoxon Matched Pairs Test (primjer-4-1.sta) | | | | |
|---|------------|----------|----------|----------|
| Marked tests are significant at $p < ,05000$ | | | | |
| Pair of Variables | Valid N | T | Z | p-value |
| Prije & Poslije | 12 | 24,50000 | 1,137474 | 0,255341 |

Napomena. T je različit jer prikazuje zbroj rangova negativnih razlika
 ($24.5 = 12 \cdot 13/2 - 53.5$)

Friedmanov test rangova

- Usporedba tri ili više zavisnih populacija
- Najčešće, ponovljena mjerenja.
- Analogon ANOVA testu za ponovljena mjerenja
- Generalizacija testa predznaka na veći broj populacija
- **Nul hipoteza.** Distribucija obilježja je u svim populacijama jednaka.
- Uzorak: n jedinki i k tretmana (ponovljenih mjerenja) Za svaku jedinku.

Uzorak.

| | Tretman | | | |
|----------------|----------------|--------------|------------|-------------|
| Jedinka | T. 1 | T. 2. | ... | T. k |
| 1 | X_{11} | X_{21} | ... | X_{k1} |
| 2 | X_{12} | X_{22} | ... | X_{k2} |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ |
| n | X_{1n} | X_{2n} | ... | X_{kn} |

Za svaku se **jedinku** izračunaju rangovi.

| | | Tretman | | | |
|---------|----------|-------------|-------------|----------|-------------|
| Jedinka | T. 1 | T. 2. | ... | T. k | |
| 1 | R_{11} | R_{21} | ... | R_{k1} | |
| 2 | R_{12} | R_{22} | ... | R_{k2} | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | |
| n | R_{1n} | R_{2n} | ... | R_{kn} | |
| | | \bar{R}_1 | \bar{R}_2 | ... | \bar{R}_k |

Za svaki tretman se izračuna prosječni rang (\bar{R}_j).

Ukoliko je nul hipoteza točna (distribucij su jednake), rangovi bi se unutar svakog tretmana trebali pojavljivati slučajno.

Statistika.

$$F_r = \frac{12}{n \cdot k \cdot (k + 1)} \sum_i \bar{R}_i^2 - 3 \cdot n \cdot (k + 1)$$

Za veliki uzorak i velik broj tretmana statistika je distribuirana približno prema χ^2 razdiobi s $k - 1$ stupnjem slobode:

$$F_r \sim \chi^2(k - 1).$$

U slučaju izjednačenih rangova statistika F_r se korigira.

Primjer. (Iz ANOVA testa za ponovljena mjerenja)

Istraživač želi ispitati smanjenje osjećaja ravnoteže koji biciklisti osjete povećanjem umora tijekom utrke.

Da bi izmjerio gubitak ravnoteže, istraživač je postavio trkaći bicikl na ergometar s valjcima.

Na sredini prednjeg cilindra obojana je bijela traka širine 10 cm. Zadnji valjak je povezan s kočionim sustavom da osigura otpor zadnjem kotaču. Pogreške u ravnoteži su mjerene brojanjem skretanja prednjeg kotača s bijele trake širine 10 cm.

Povećanjem otpora, povećava se umor i postaje sve teže održati prednji kotač na bijeloj traci.

Ispitanik vozi bicikl 15 minuta. Taj interval je podijeljen u 3-minutne periode za prikupljanje podataka.

Broj pogrešaka ravnoteže je mjereno u zadnjoj minuti 3-minutnog perioda i na kraju 3-minutnog perioda je povećan otpor.

| Ispitanik | Minuta 3 | Minuta 6 | Minuta 9 | Minuta 12 | Minuta 15 |
|-----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| 1 | 7 | 7 | 23 | 36 | 70 |
| 2 | 12 | 22 | 26 | 26 | 20 |
| 3 | 11 | 6 | 9 | 31 | 30 |
| 4 | 10 | 18 | 16 | 40 | 25 |
| 5 | 6 | 12 | 9 | 28 | 37 |
| 6 | 13 | 21 | 30 | 55 | 65 |
| 7 | 5 | 0 | 2 | 10 | 11 |
| 8 | 15 | 18 | 22 | 37 | 42 |
| 9 | 0 | 2 | 0 | 16 | 11 |
| 10 | 6 | 8 | 27 | 32 | 54 |

| Isp. | Broj pogrešaka | | | | | Rangovi | | | | |
|-----------|----------------|-----|-----|------|------|------------|-------------|------------|-------------|------------|
| | M 3 | M 6 | M 9 | M 12 | M 15 | M 3 | M 6 | M 9 | M 12 | M 15 |
| 1 | 7 | 7 | 23 | 36 | 70 | 1.5 | 1.5 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 12 | 22 | 26 | 26 | 20 | 1 | 3 | 4.5 | 4.5 | 2 |
| 3 | 11 | 6 | 9 | 31 | 30 | 3 | 1 | 2 | 5 | 4 |
| 4 | 10 | 18 | 16 | 40 | 25 | 1 | 3 | 2 | 5 | 4 |
| 5 | 6 | 12 | 9 | 28 | 37 | 1 | 3 | 2 | 4 | 5 |
| 6 | 13 | 21 | 30 | 55 | 65 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 5 | 0 | 2 | 10 | 11 | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| 8 | 15 | 18 | 22 | 37 | 42 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9 | 0 | 2 | 0 | 16 | 11 | 1.5 | 3 | 1.5 | 5 | 4 |
| 10 | 6 | 8 | 27 | 32 | 54 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | | | | | 1.5 | 2.15 | 2.6 | 4.35 | 4.4 |

Statistica.

Izbor testa.

Nonparametric Statistics: primjer-4-5.sta

Quick

- 2 x 2 Tables ($\chi^2/V^2/\Phi^2$, McNemar, Fisher exact)
- Observed versus expected χ^2
- Correlations (Spearman, Kendall tau, gamma)
- Comparing two independent samples (groups)
- Comparing multiple indep. samples (groups)
- Comparing two dependent samples (variables)
- Comparing multiple dep. samples (variables)**
- Cochran Q test
- Ordinal descriptive statistics (median, mode, ...)

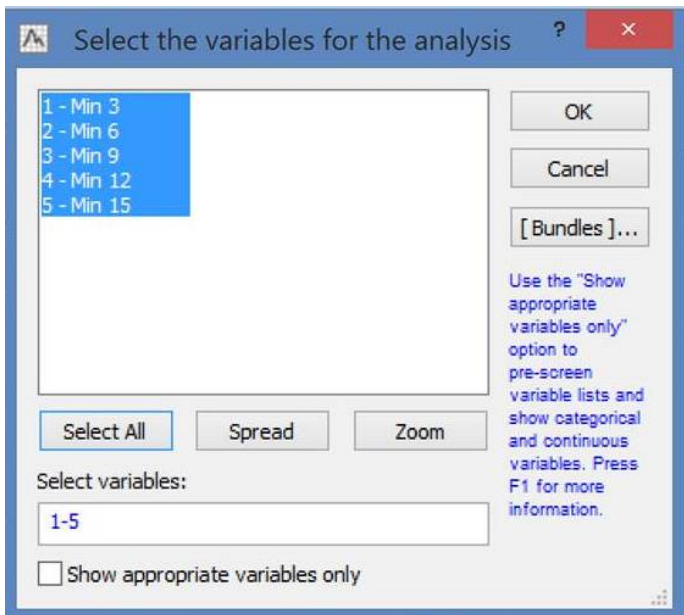
OK

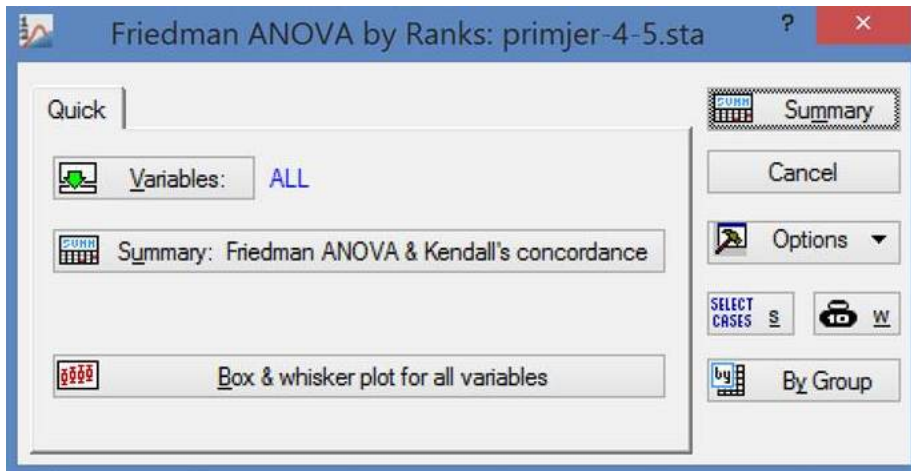
Cancel

Options

Open Data

Izbor varijable.





Rezultat Friedmanovog testa.

| Friedman ANOVA and Kendall Coeff. of Concordance (primjer-4-5.sta) | | | | | |
|--|--------------|--------------|----------|----------|--|
| ANOVA Chi Sqr. (N = 10, df = 4) = 28,08122 p = ,00001 | | | | | |
| Coeff. of Concordance = ,70203 Aver. rank r = ,66892 | | | | | |
| Variable | Average Rank | Sum of Ranks | Mean | Std.Dev. | |
| Min 3 | 1,500000 | 15,00000 | 8,50000 | 4,50309 | |
| Min 6 | 2,150000 | 21,50000 | 11,40000 | 7,96102 | |
| Min 9 | 2,600000 | 26,00000 | 16,40000 | 10,80329 | |
| Min 12 | 4,350000 | 43,50000 | 31,10000 | 12,55610 | |
| Min 15 | 4,400000 | 44,00000 | 36,50000 | 21,13055 | |

Spearmanov koeficijent korelacije

- Koeficijent korelacije mjeri povezanost dvije varijable.
- Pearsonov koeficijent korelacije mjeri **linearnu** povezanost dvije varijable.
- Spearmanov koeficijent korelacije mjeri koreliranost rangova.
- Alternativni naziv: **Spearmanov koeficijent korelacije rangova.**

- Promatramo dva obilježja u populaciji: X i Y .
- Uzorak veličine n :
 X : X_1, X_2, \dots, X_n
 Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_n
- Za svaki uzorak odredimo rangove (unutar pojedinog uzorka):
 R : R_1, R_2, \dots, R_n
 P : P_1, P_2, \dots, P_n
- Spearmanov koeficijent korelacije

$$r_s = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_i (R_i - \bar{R})(P_i - \bar{P})}{S_R \cdot S_P}$$

- Jer su rangovi vrijednosti od 1 do n :

$$\bar{R} = \bar{P} = \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n+1}{2}$$

i

$$S_R^2 = S_P^2 = \sum_i (R_i - \bar{R})^2 = \sum_i \left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n(n^2 - 1)}{12}.$$

- Spearmanov koeficijent korelacije

$$r_S = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_i (R_i - \frac{n+1}{2})(P_i - \frac{n+1}{2})}{\frac{n(n^2-1)}{12}}$$

- Ako s D_i označimo razliku rangova: $D_i = R_i - P_i$, Spearmanov koeficijent korelacije je

$$r_S = 1 - \frac{6 \cdot \sum_i D_i^2}{n \cdot (n^2 - 1)}$$

- $-1 \leq r_S \leq 1$
- Interpretacija koeficijenta je analogna interpretaciji Pearsonovog koeficijenta, uz iznimku da se ne radi o linearnoj zavisnosti.
- Vrijednosti Spearmanovog koeficijenta r_S blizu 1 znači da su veće vrijednosti obilježja X pridružene većim vrijednostima obilježja Y .
- Za r_S blizu -1 , većim vrijednostima obilježja X pridružene su manje vrijednosti obilježja Y .

Testiranje hipoteze o korelaciji rangova.

- ρ_S - Spearmanov koeficijent korelacije za populaciju.
- Može se testirati hipoteza o nepostojanju korelacije između rangova u populaciji:

$$H_0 : \rho_S = 0.$$

- Za testiranje hipoteze kao statistika se koristi Spearmanov koeficijent korelacije r_S .

Primjer. (iz Pearsonovog koeficijenta korelacije) Na osnovu uzorka od 10 osoba procijenite koeficijent korelacije za visinu i težinu.

| Visina (cm) | Težina (kg) |
|----------------|----------------|
| 183 | 76 |
| 163 | 52 |
| 180 | 61 |
| 168 | 64 |
| 160 | 52 |
| 157 | 48 |
| 185 | 94 |
| 155 | 46 |
| 193 | 118 |
| 173 | 57 |

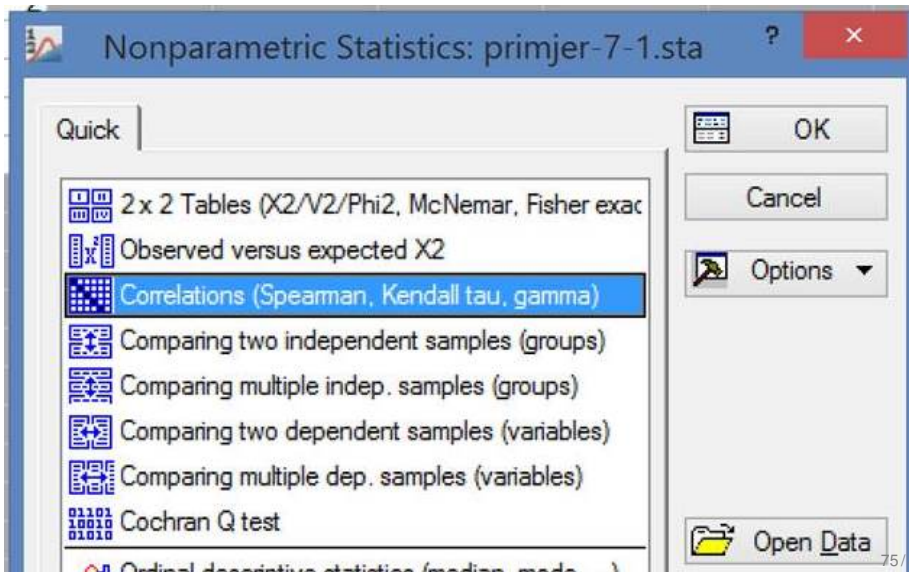
Računanje rangova.

| Visina (cm) | Težina (kg) | Rang | |
|----------------|----------------|--------|--------|
| | | Visina | Težina |
| 183 | 76 | 8 | 8 |
| 163 | 52 | 4 | 3.5 |
| 180 | 61 | 7 | 6 |
| 168 | 64 | 5 | 7 |
| 160 | 52 | 3 | 3.5 |
| 157 | 48 | 2 | 2 |
| 185 | 94 | 9 | 9 |
| 155 | 46 | 1 | 1 |
| 193 | 118 | 10 | 10 |
| 173 | 57 | 6 | 5 |

Sada na rangovima izračunamo Pearsonov koeficijent korelacije.

Statistica

Izbor testa



Nonparametric Statistics: primjer-7-1.sta

Quick

- 2 x 2 Tables (X²/V²/Phi², McNemar, Fisher exact)
- Observed versus expected X²
- Correlations (Spearman, Kendall tau, gamma)**
- Comparing two independent samples (groups)
- Comparing multiple indep. samples (groups)
- Comparing two dependent samples (variables)
- Comparing multiple dep. samples (variables)
- Cochran Q test
- Ordinal descriptive statistics (median, mode)

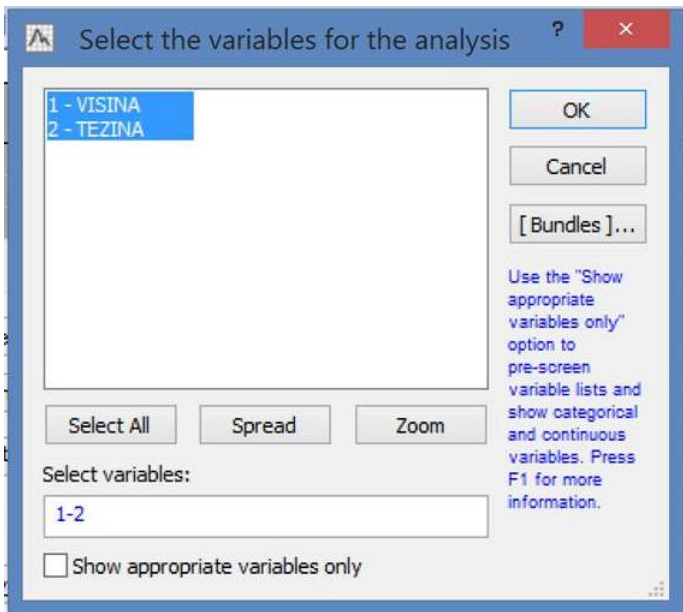
OK

Cancel


Options ▾

Open Data

Izbor varijabli




Nonparametric Correlation: primjer-... ? X


 Variables


List 1: ALL

Compute: Square matrix ▾


Quick | Advanced |


 Spearman rank R


 Scatterplot matrix for all variables

 Spearman R

Cancel

 Options ▾

SELECT CASES S  W

 By Group

p-value for highlighting:
.05

Spearmanov koeficijent korelacije

| | | Spearman Rank Order Correlations (primjer-7-1.sta) | | | |
|----------|--|---|----------|--|--|
| | | MD pairwise deleted | | | |
| | | Marked correlations are significant at $p < ,05000$ | | | |
| Variable | | VISINA | TEZINA | | |
| VISINA | | 1,000000 | 0,960491 | | |
| TEZINA | | 0,960491 | 1,000000 | | |

Napomena. Pearsonov koeficijent korelacije je: $r = 0.8906609$.