TESTIRANJE HIPOTEZA O DISTRIBUCIJI

Pearsonov $\chi 2$ test

Istraživač je slučajno izabrao uzorak od 100 ispitanika.

U uzorak je izabrano 55 muških i 45 ženskih osoba.

Nakon provedenog istraživanja recenzent mu je prigovorio da udio žena i muškaraca u uzorku nije jednak i da je to utjecalo na rezultate istraživanja.

Je li recenzent u pravu?

Je li disproporcija u uzorku posljedica slučajnog izbora ili pristranosti istraživača?

Udio žena u populaciji je 0.5.

Očekivana frekvencija žena i muškaraca u uzorku je 50.

Da li frekvencija spola u uzorku odgovara populaciji?

Promatramo diskretno obilježje s konačno mnogo vrijednosti:
$x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Slučajnim izborom iz populacije definirana je slučajna varijabla X s distribucijom

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, \ldots, k$$

gdje p_i odgovara relativnim frekvencijama obilježja u populaciji.

Za uzorak veličine n: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ distribucija slučajne varijable X_i je

$$X_i \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k \end{pmatrix}$$

Želimo usporediti frekvenciju obilježja na uzorku s distribucijom obilježja u populaciji.

Jednostruka klasifikacija

Problem jednostruke klasifikacije - unaprijed su zadane teorijske proporcije za pojedine kategorije.

Cilj nam je ustvrditi da li razdioba obilježja u populaciji jednako zadanoj razdiobi.

Hipoteza:

distribucija obilježja u populaciji jednaka je zadanoj distribuciji:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{pmatrix}$$

Za zadanu razdiobu

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{pmatrix}$$

i uzorak veličine n definiramo **teorijske frekvencije**:

$$E_i = n \cdot p_i.$$

S F_i ćemo označiti frekvencije u uzorku (**opažene frekvencije**).

Rezultat možemo prkazati tablično

Kategorija	Frekvencije	
	Opažena	Teorijska
x_1	F_1	E_1
x_2	F_2	E_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	F_k	E_k
Ukupno	n	n

Ukoliko je hipoteza točna, tada je statistika

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i}$$

distribuirana prema χ^2 razdiobi s $k - 1$ stupnjeva slobode:

$$\chi^2 \sim \chi^2(k - 1).$$

Pretpostavka χ^2 testa:

Barem 80 % očekivanih frekvencije u klijetkama trebaju biti veće ili jednake od 5 a sve moraju biti veće ili jednake od 1.

Primjer. Da li je uzorak iz uvodnog primjera (55 muškaraca i 45 žena) iz populacije s jednakim udjelom muškaraca i žena.

Varijabla spol $\rightarrow$ Vrijednosti $x_1 = \text{M}$, $x_2 = \text{Ž}$.

Udjeli: $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.5$

Očekivane frekvencije:

$E_1 = n \cdot p_1 = 100 \cdot 0.5 = 50$,
$E_2 = n \cdot p_2 = 100 \cdot 0.5 = 50$

Opažene frekvencije: $F_1 = 55$, $F_2 = 45$

Tablica:

Kategorija	Frekvencije	
	Opažena	Teorijska
M	55	50
Ž	45	50
Ukupno	100	100

Računamo statistiku:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(55-50)^2}{50} + \frac{(45-50)^2}{50} = \frac{25}{50} + \frac{25}{50} = 1$$

Broj vrijednosti: $k = 2.$ $\rightarrow$ Broj stupnjeva slobode: $k - 1 = 1$

Distribucija: $\chi^2(1).$

$\chi^2_{0.95}(1) = 3.84$

$\chi^2 = 1 < 3.84 = \chi^2_{0.95}(1)$ $\rightarrow$ Hipotezu ne odbacujemo.

Primjedba recenzenta nema osnove.

Razlika u proporcijama je posljedica slučajnog izbora.

Napomena. Ovu hipotezu smo mogli testirati i *t*-testom za proporcije (hipoteza $p = 0.5$).

Za dihotomne varijable *t*-test i χ^2-test su ekvivalentni.

Kod χ^2-testa s dvije kategorije očekivana frekvencija treba biti veća od 10 u svakoj klijetki.

Primjer. Istraživač za slučajni izbor u uzorak koristi igraću kocku. Prije početka izbora uzorka htio je provjeriti je li njegova kocka simetrična (svi brojevi imaju iste vjerojatnosti). Kocku je bacio 120 puta i zabilježio frekvencije brojeva:

Vrijednost	Opažena frekvencija
1	23
2	15
3	16
4	28
5	17
6	21
Ukupno	120

Da li je kocka simetrična?

Ukoliko je kocka simetrična, vjerojatnost pojedinog broja je $p_i = 1/6$.

Za $n = 120$ bacanja, očekivane frekvencije pojedinog broja su jednake $E_i = n \cdot p_i = 120 \cdot 1/6 = 20$.

Tablica:

Vrijednost	Frekvencije	
	Opažena	Teorijska
1	23	20
2	15	20
3	16	20
4	28	20
5	17	20
6	21	20
Ukupno	120	120

Računanje statistike:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i} =$$

$$= \frac{(23-20)^2}{20} + \frac{(15-20)^2}{20} + \frac{(16-20)^2}{20} +$$

$$+ \frac{(28-20)^2}{20} + \frac{(17-20)^2}{20} + \frac{(21-20)^2}{20} =$$

$$= \frac{9}{20} + \frac{25}{20} + \frac{16}{20} + \frac{64}{20} + \frac{9}{20} + \frac{1}{20} = 6.2$$

Broj vrijednosti: $k = 6.$ $\rightarrow$ Broj stupnjeva slobode: $k - 1 = 5$

Distribucija: $\chi^2(5)$.

$\chi^2_{0.95}(5) = 11.07$

$\chi^2 = 6.2 < 11.07 = \chi^2_{0.95}(5)$ $\rightarrow$ Hipotezu ne odbacujemo.

Kocka je simetrična.

Rješenje primjera u Statistici

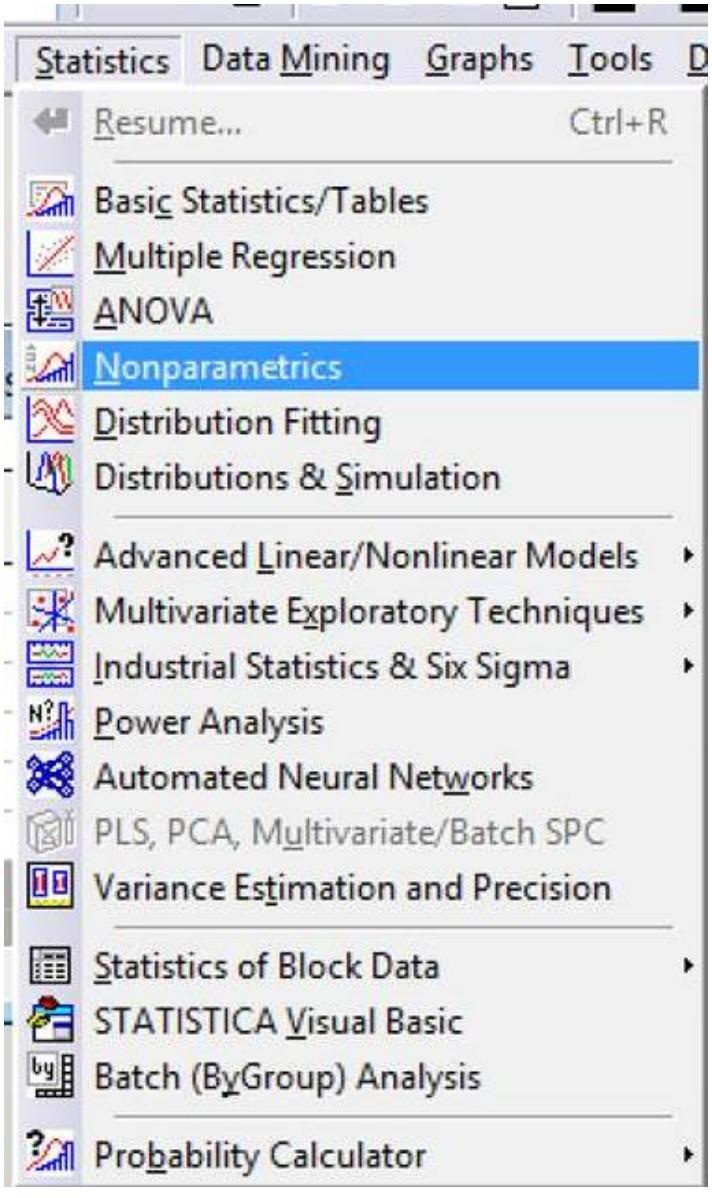
Podaci:

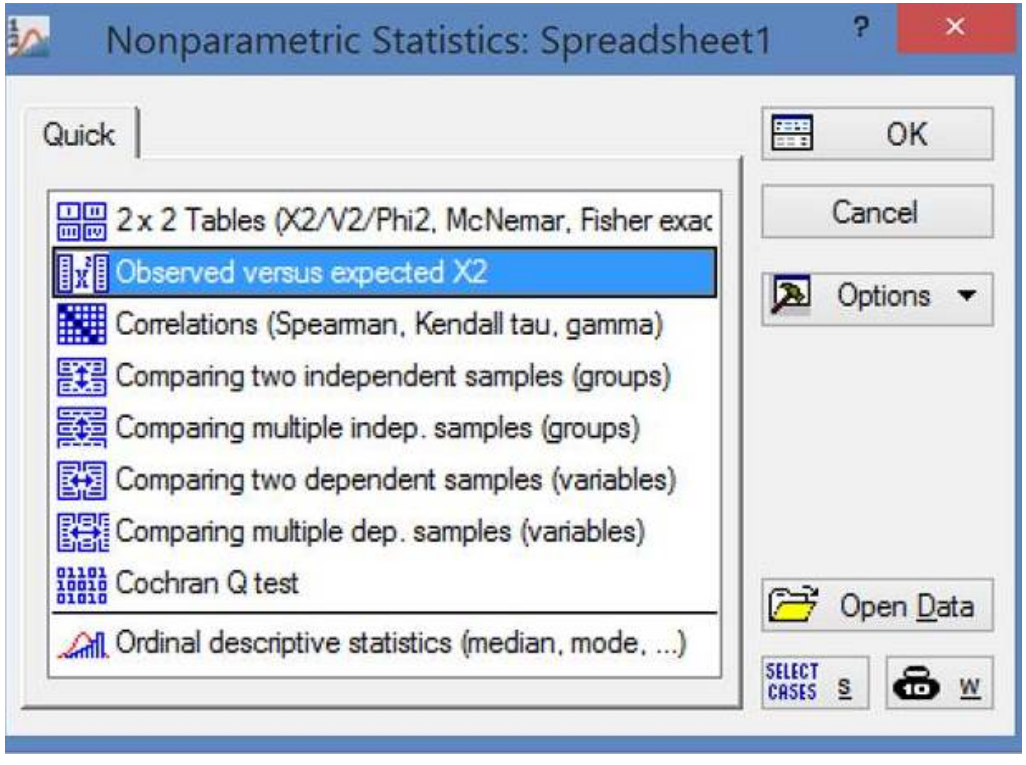
Data: Spreadsheet1* ...

	1 F	2 E
1	23	20
2	15	20
3	16	20
4	28	20
5	17	20
6	21	20

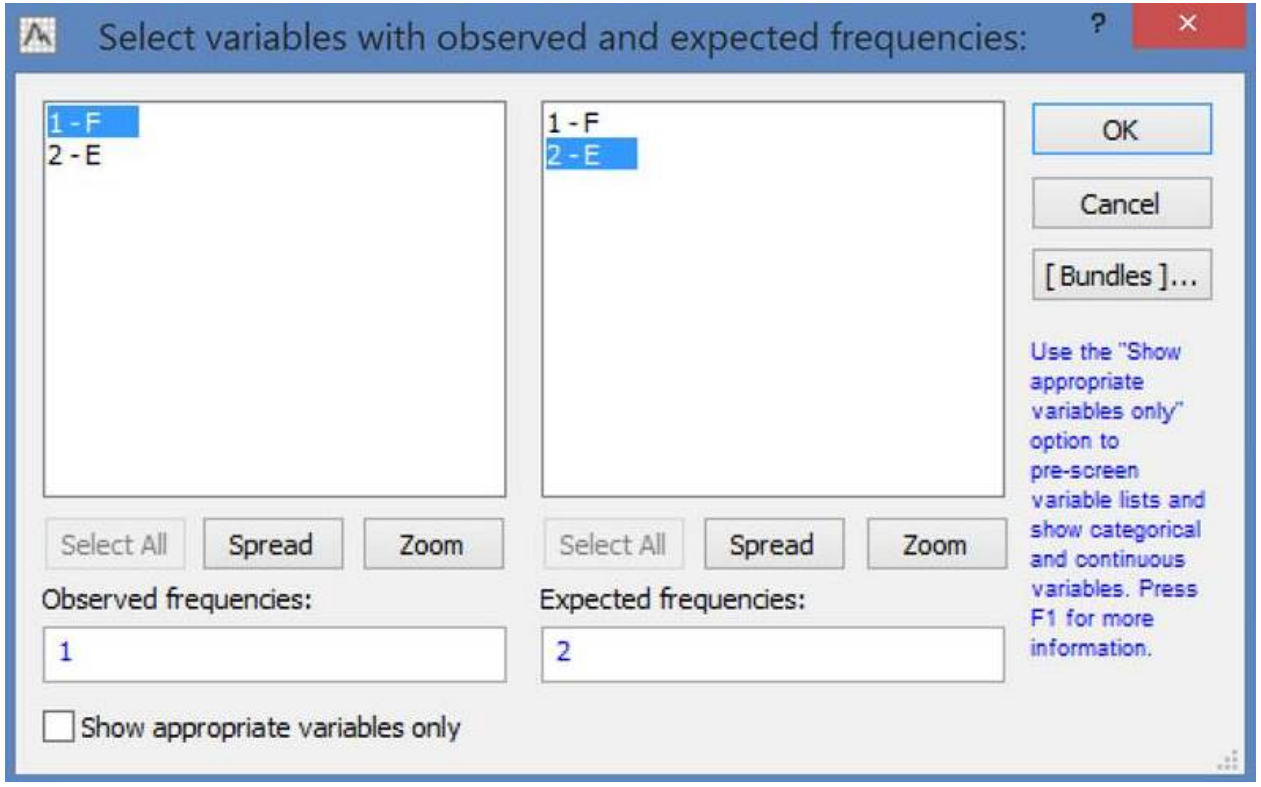
Zadaju se frekvencije!

Izbor analize:

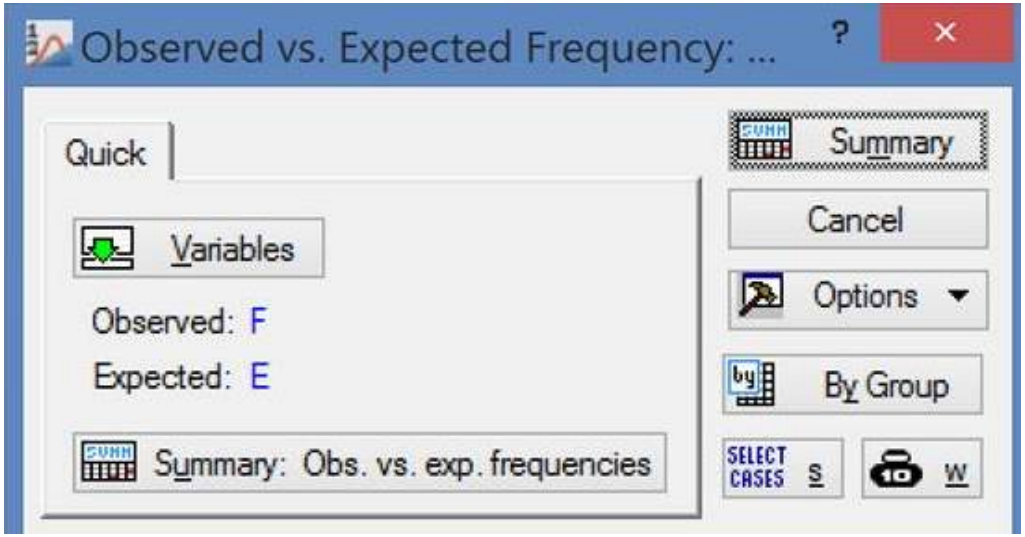




Definiranje varijabli - opažene i očekivane frekvencije



Rezultat



served vs. Expected Frequencies (Spreadsheet1)

Observed vs. Expected Frequencies (Spreadsheet1)
Chi-Square = 6,200000 df = 5 p = ,287245

Case	observed F	expected E	O - E	(O-E)**2 /E
C: 1	23,0000	20,0000	3,00000	0,450000
C: 2	15,0000	20,0000	-5,00000	1,250000
C: 3	16,0000	20,0000	-4,00000	0,800000
C: 4	28,0000	20,0000	8,00000	3,200000
C: 5	17,0000	20,0000	-3,00000	0,450000
C: 6	21,0000	20,0000	1,00000	0,050000
Sum	120,0000	120,0000	0,00000	6,200000

Primjer. Istraživač je bilježio broj zgoditaka na uzorku od 200 nogometnih utakmica. Dobio je sljedeći rezultat:

Broj zgoditaka	0	1	2	3	4	5	6	7	Ukupno
Frekvencija	22	53	58	39	20	5	2	1	200

Može li se na osnovu ovih podataka zaključiti da Poissonova razdioba adekvatno opisuje razdiobu broja zgoditaka?

Poissonova razdioba ($X \sim \text{Po}(\lambda)$):

$$P(X = i) = p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

λ nije zadan pa ga procjenjujemo iz podataka.

Za $X \sim \text{Po}(\lambda)$ je $E(X) = \lambda$.

λ ćemo procijeniti s $\bar{X}$: $\lambda = \bar{X} = 2.05$

Provjeravamo da li se radi o Po(2.05) razdiobi.

Izračunamo vjerojatnosti i očekivane frekvencije:

Br. zgod.	0	1	2	3	4	5	6	7+
p_i	0,129	0,264	0,271	0,185	0,095	0,039	0,013	0,005
E_i	25.75	52.78	54.10	36.97	18.95	7.77	**2.65**	**1.03**

Preko 20% klijetki ima očekivanu frekvenciju manju od 5.
Spajamo kategorije.

Br. zgod.	0	1	2	3	4	5+	Ukupno
F_i	22	53	58	39	20	8	200
E_i	25,75	52,78	54,10	36,97	18,95	11.46	200

Statistika: $\chi^2 = \sum_i \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i} = 2.04$

Broj stupnjeva slobode:

- 6 kategorija
- 1 parametar procijenjen iz podataka
- broj stupnjeva slobode = broj kategorija - broj procijenjenih parametara = 6-1=5

Distribucija. $\chi^2(5)$

p-vrijednost: $p = 0.843629$

Ne odbacujemo hipotezu.

Broj zgoditaka je dobro opisan Poissonovom distribucijom.

Testiranje hipoteza o nezavisnosti i homogenosti
Dvostruka klasifikacija.
Testiranje homogenosti

Želimo provjeriti hipotezu da je (diskretno) obilježje jednako distribuirano u više populacija.

c - broj populacija u kojem promatramo obilježje X.

X_j - rezultat mjerenja obilježja X u j-toj populaciji

$$X_j \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_{1j} & p_2 j & \dots & p_{cj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, c$$

Želimo provjeriti da li su sve ove slučajne varijable jednako distribuirane, tj. da li vrijedi

Hipoteza o homogenosti:

$$p_{i1} = p_{i2} = p_{i3} = \ldots = p_{ik} \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Da bismo provjerili hipotezu, u svakoj populaciji izaberemo uzorak.

Veličine uzoaraka: $n_{y1}, n_{y2}, \ldots, n_{yc}$

U svakom uzorku odredimo frekvencije n_{ij} - broj pojavljivanja obilježja x_i u j-toj populaciji.

Rezultat prikazujemo u **kontigencijskoj tablici**:

	1	2	3	...	c
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1c}
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2c}
x_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	...	n_{3c}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_k	n_{k1}	n_{k2}	n_{k3}	...	n_{kc}
Ukupno	n_{y1}	n_{y2}	n_{y3}	...	n_{yc}

Za svako obilježje x_i prebrojimo broj pojavljivanja (frekvencije) n_{xi} u svih c uzoraka:

	1	2	3	...	c	Ukupno
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1c}	n_{x1}
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2c}	n_{x2}
x_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	...	n_{3c}	n_{x3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_k	n_{k1}	n_{k2}	n_{k3}	...	n_{kc}	n_{xc}
Ukupno	n_{y1}	n_{y2}	n_{y3}	...	n_{yc}	n

Budući da pretpostavljamo jednaku razdiobu u svim populacijama:

$$p_i = p_{i1} = p_{i2} = p_{i3} = \ldots = p_{ik} \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, k.$$

p_i procjenjujemo na osnovu cijelog uzorka s $\frac{n_{xi}}{n}$.

Sada je očekivana frekvencija vrijednosti x_i u j-tom uzorku dana s:

$$E_{ij} = \frac{n_{xi}}{n} n_{yj}.$$

Ukoliko je hipoteza točna, statistika

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

distribuirana prema χ^2 razdiobi.

Broj stupnjeva slobode

U svakom stupcu imamo $k-1$ stupanj slobode (jer je suma n_{yi} fiksirana)

$\rightarrow$ sve skupa $c \cdot (k-1)$ stupnjeva slobode

Iz uzorka određujemo k parametara $n_{x1}, n_{x2}, \ldots, n_{xk}$.

Jer je $\sum_i n_{xi} = n \quad \rightarrow \quad k-1$ stupnjeva slobode u parametrima

Ukupno je

$$\text{d.f.} = c \cdot (k-1) - (k-1) = (c-1) \cdot (k-1).$$

Statistika χ^2 je distribuirana:

$$\chi^2 \sim \chi^2((c-1) \cdot (k-1))$$

Primjer. Provedena je anketa da bi se ustanovila pojavnost alkoholizma u različitim sportovima. Intervjuirani su slučajni uzorci sportaša iz 4 sporta. Dobiveni rezultati su prikazani u tablici

	Alkoholičari	**Nealkoholičari**	**Veličina uzorka**
Sport 1	32	268	300
Sport 2	51	199	250
Sport 3	67	233	300
Sport 4	83	267	350

Konstruirajte test da biste provjerili da li je udio alkoholičara jednak u sva 4 sporta

Izračunajmo očekivane frekvencije:

	Alkoholičari		Nealkoholičari		Veličina uzorka
Sport 1	32	(58.25)	268	(241.75)	300
Sport 2	51	(48.54)	199	(201.46)	250
Sport 3	67	(58.25)	33	(241.75)	300
Sport 4	83	(67.96)	267	(282.04)	350
Ukupno	233		967		1200

U zagradama su prikazane očekivane frekvencije dobivene množenjem suma stupca i redka te podijeljenih s ukupnom veličinom uzorka (1200).

Ukoliko s p_1, p_2, p_3, p_4 označimo udio alkoholičara u pojedinom sportu, želimo testirati hipotezu

$$H_0: \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4.$$

Računamo vrijednost statistike

$$\chi^2 = \frac{(32 - 58.25)^2}{58.25} + \frac{(268 - 241.75)^2}{241.75} + \ldots + \frac{(267 - 282.04)^2}{282.04} = 20.59$$

Budući da je $d.f. = (2-1)\cdot(4-1) = 3$, za $\alpha = 0.05$ je

$$\chi^2_{0.95}(3) = 7.815.$$

Jer je $\chi^2 > \chi^2_{0.95}(3)$ hipotezu o jednakosti proporcija odbacujemo.

Nakon odbacivanja hipoteze, poželjno je provjeriti zbog čega je ona odbačena.

Pogledajmo doprinos svake grupe χ^2 statistici:

	$n_{ij} - E_{ij}$		$(n_{ij} - E_{ij})^2 / E_{ij}$	
	Alk.	**Nealk.**	**Alk.**	**Nealk.**
Sport 1	-26.25	26.25	**11.83**	2.85
Sport 2	2.46	-2.46	0.12	0.03
Sport 3	8.75	-8.75	1.31	0.32
Sport 4	15.04	-15.04	3.33	0.80

Najveći doprinos daje dio koji odgovara udjelu alkoholičara u Sportu 1.

Odstupanje od homogenosti je u najvećoj mjeri uzrokovano malim udjelom alkoholičara u Sportu 1.

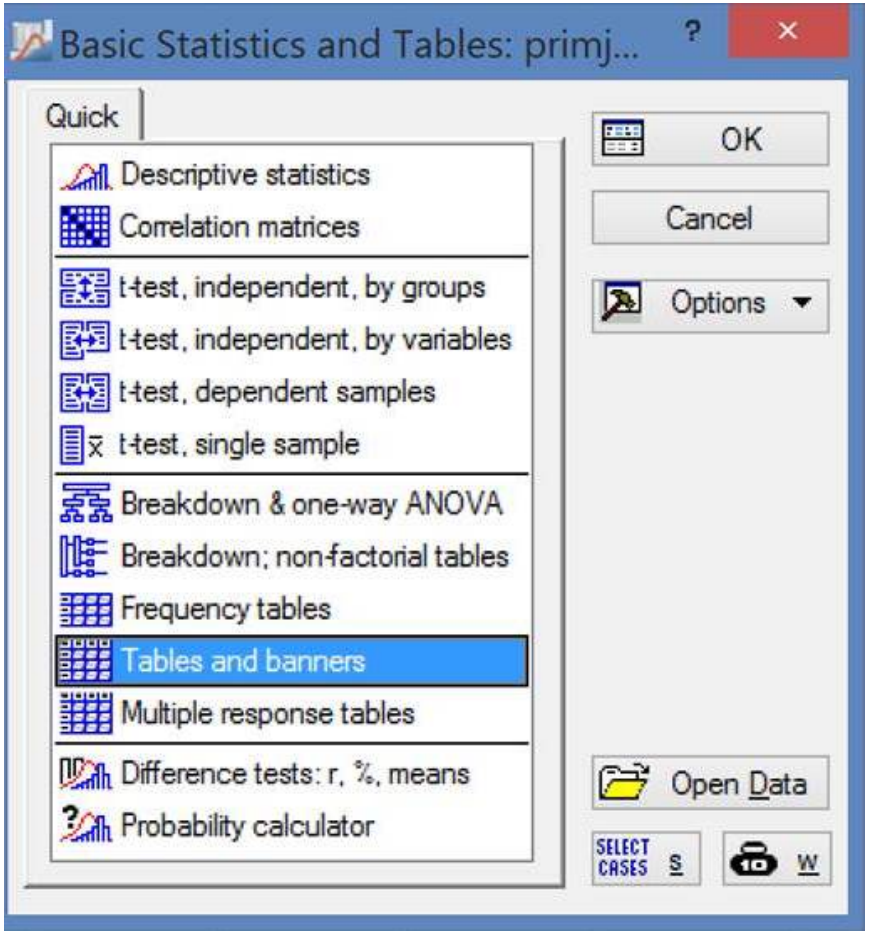
Rješenje primjera u Statistici

Podaci:

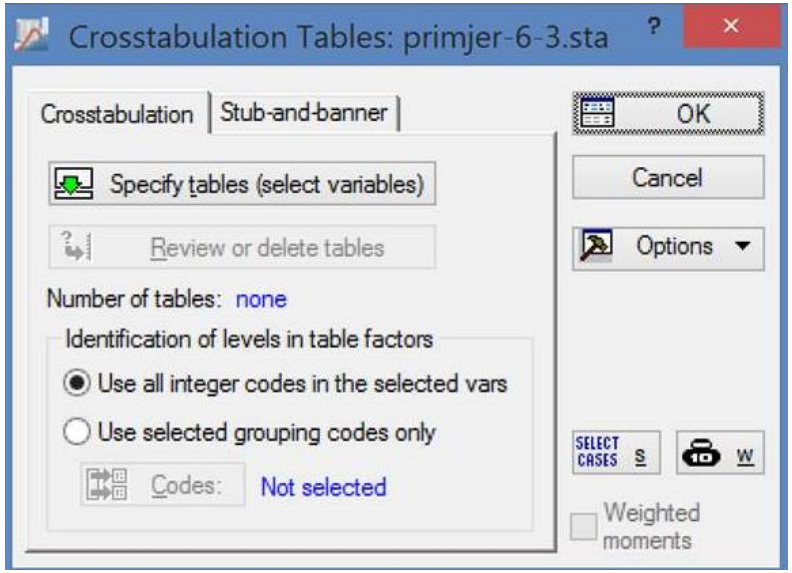
	1 Sport	2 Alk
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1
8	1	1
9	1	1
10	1	1
11	1	1
12	1	1
13	1	1
14	1	1
15	1	1

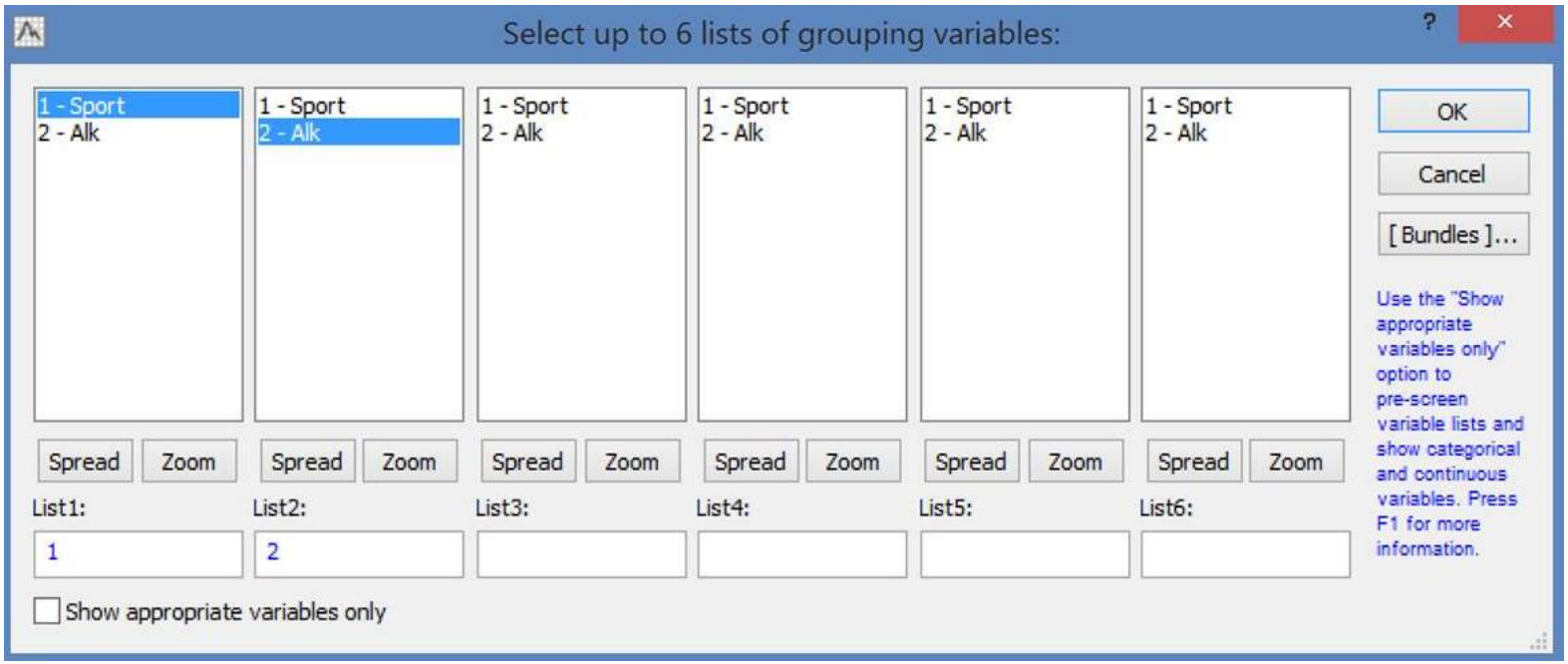
Izbor testa.

Izbornik Basic Statistics and Tables

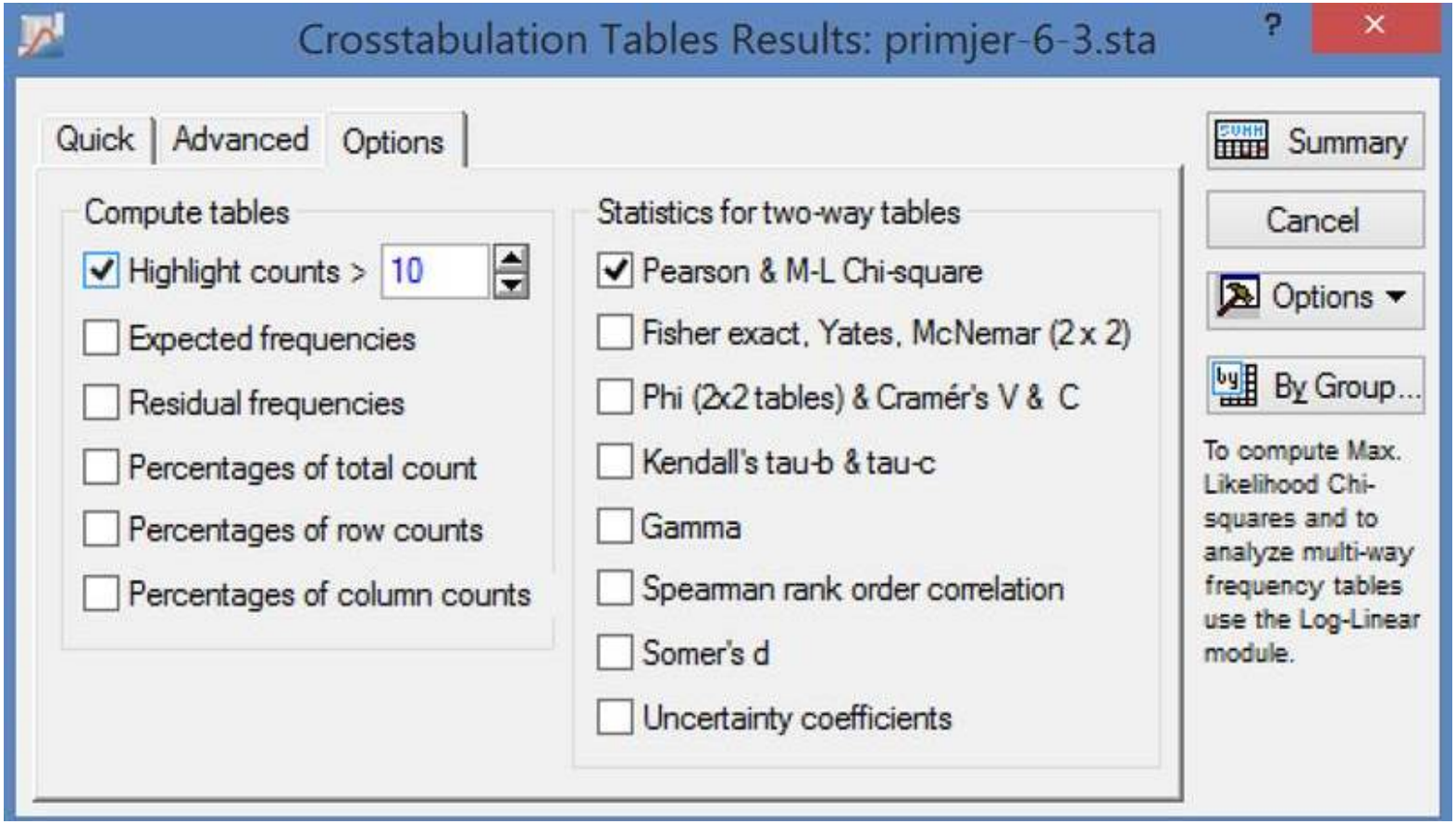


Definiranje varijabli.



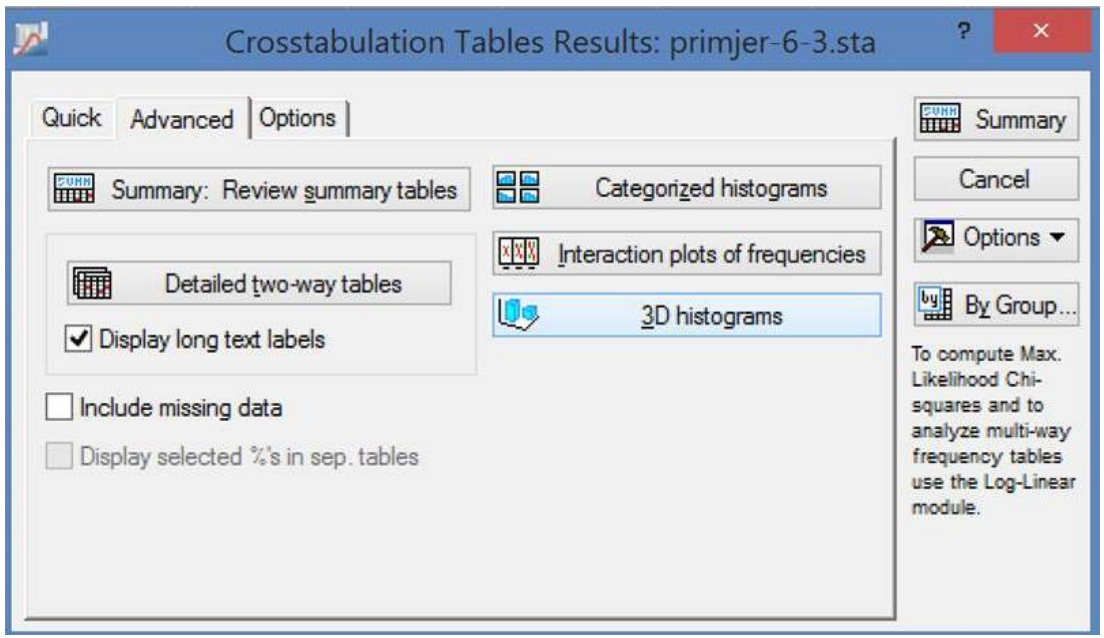


U izborniku Options definiramo tražene testove:



Kontigencijska tablica.

Summary



Summary Frequency Table (primjer-6-3.sta)
Marked cells have counts > 10
(Marginal summaries are not marked)

Sport	Alk 1	Alk 2	Row Totals
1	32	268	300
2	51	199	250
3	67	233	300
4	83	267	350
All Grps	233	967	1200

Rezultati testova.

Advanced. - Detailed two-way tables.

Statistic	Statistics: Sport(4) x Alk(2) (primjer-6-3.sta)		
	Chi-square	df	p
Pearson Chi-square	20,59675	df=3	p=,00013
M-L Chi-square	22,56667	df=3	p=,00005

Testiranje hipoteze o nezavisnosti

Primjer. Na uzorku od 95 osoba promatrana je boja očiju i boja kose. Rezultati su prikazani u tablici:

		Boja kose		
		Svjetla	Tamna	Ukupno
Boja očiju	Plave	32	12	44
	Smeđe	14	22	36
	Ostalo	6	9	15
Ukupno		52	43	95

Jesu li boja očiju i boja kose povezani?

Promatramo dva obilježja, X i Y koja poprimaju vrijednosti $x_1, \ldots, x_k$ i $y_1, \ldots, y_c$.

U uzorku od n jedinki promatramo frekvencije pojavljivanja svih kombinacija (x_i, y_j) i označimo ih s n_{ij}

Promatramo i frekvencije svakog obilježja posebno:

- n_{xi} frekvencija za x_i
- n_{yj} frekvencija za y_j

Vrijedi

$$n_{xi} = \sum_j n_{ij} \quad \text{i} \quad n_{yj} = \sum_i n_{ij}$$

Rezultat prebrojavanja se prikazuje u kontigencijskoj tablici:

		Y					
		y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_c	**Ukupno**
X	x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	$\dots$	n_{1c}	n_{x1}
	x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$\dots$	n_{2c}	n_{x2}
	x_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	$\dots$	n_{3c}	n_{x3}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	x_k	n_{k1}	n_{k2}	n_{k3}	$\dots$	n_{kc}	n_{xk}
	Ukupno	n_{y1}	n_{y2}	n_{y3}	$\dots$	n_{yc}	n

Slučajnim izvlačenjem definirane su slučajne varijable X i Y.

Njihova razdioba je dana s

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_{x1} & p_{x2} & \dots & p_{xk} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_c \\ p_{y1} & p_{y2} & \dots & p_{yc} \end{pmatrix}.$$

Označimo

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j).$$

- $\frac{n_{ij}}{n}$ je procjenitelj za p_{ij}.
- $\frac{n_{xi}}{n}$ je procjenitelj za p_{xi}.
- $\frac{n_{yj}}{n}$ je procjenitelj za p_{yj}.

Obilježja X i Y ne ovise jedno o drugome
$\longleftrightarrow$ Slučajne varijable X i Y su nezavisne:

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_{xi} \cdot p_{yj}.$$

Testiramo hipotezu:

Hipoteza o nezavisnosti:

$$H_0 : \quad p_{ij} = p_{xi} \cdot p_{yj} \quad \text{za sve } i, j.$$

Za testiranje hipoteze edfiniramo očekivane frekvencije

$$E_{ij} = n \cdot \frac{n_{xi}}{n} \frac{n_{yj}}{n} = \frac{n_{xi} \cdot n_{yj}}{n}$$

Ovdje smo iskoristili pretpostavku o nezavisnosti slučajnih varijabli X i Y.

Ukoliko je hipoteza točna tada je statistika

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

distribuirana prema χ^2 razdiobi.

Broj stupnjeva slobode

Za test smo procijenili parametre $p_{x1}, p_{x2}, \ldots, p_{xk}$ i $p_{y1}, p_{y2}, \ldots, p_{yc}$.

No kako je

$$\sum_i p_{xi} = 1 \quad \text{i} \quad \sum_j p_{yj} = 1$$

imamo samo $k-1$ i $c-1$ stupnjeva slobode, tj. $k+c-2$ procijenjenih parametara.

Ukupno imamo $k \cdot c$ frekvencija (n_{ij}).

Jer je

$$\sum_i \sum_j n_{ij} = n$$

to daje $k \cdot c - 1$ stupnjeva slobode.

Ukupan broj stupnjeva slobode je

$$\text{d.f.} = k \cdot c - 1 - (k + c - 2) = k \cdot c - k - c - 1 = (c-1) \cdot (k-1).$$

Statistika χ^2 je distribuirana:

$$\chi^2 \sim \chi^2((c-1)\cdot(k-1))$$

Uočimo da su testovi za homogenost i nezavisnost isti.

Razlikuju se po interpretaciji i načinu određivanja uzorka.

- test homogenosti - n_{yj} je zadan (veličina uzorka)
- test nezavisnosti - n_{yj} je izračunat iz uzorka

U Statistici se za oba testa koristi ista procedura.

Vratimo se primjeru s početka.

Izračunamo očekivane frekvencije $E_{ij} = \frac{n_{xi} \cdot n_{yj}}{n}$ (prikazane u zagradama).

		Boja kose				**Ukupno**
		Svjetla		**Tamna**		
Boja očiju	**Plave**	32	(24.1)	12	(19.9)	44
	Smeđe	14	(19.7)	22	(16.3)	36
	Ostalo	6	(8.2)	9	(6.8)	15
Ukupno		52		43		95

$$\chi^2 = \frac{7.9^2}{24.1} + \frac{(-7.9)^2}{19.9} + \frac{(-5.7)^2}{19.7} + \frac{5.7^2}{16.3} + \frac{(-2.2)^2}{8.2} + \frac{2.2^2}{6.8} = 10.67.$$

$$d.f. = (3-1)\cdot(2-1) = 2$$

$$\chi^2_{0.95}(2) = 5.99$$

Jer je $\chi^2 > \chi^2_{0.95}(2)$ odbacujemo hipotezu o nezavisnosti.

Boja očiju i boja kose su povezani.

Narušavanje pretpostavki χ^2 testa

Pretpostavka χ^2 testa:

Barem 80 % očekivanih frekvencije u klijetkama trebaju biti veće ili jednake od 5 a sve moraju biti veće ili jednake od 1.

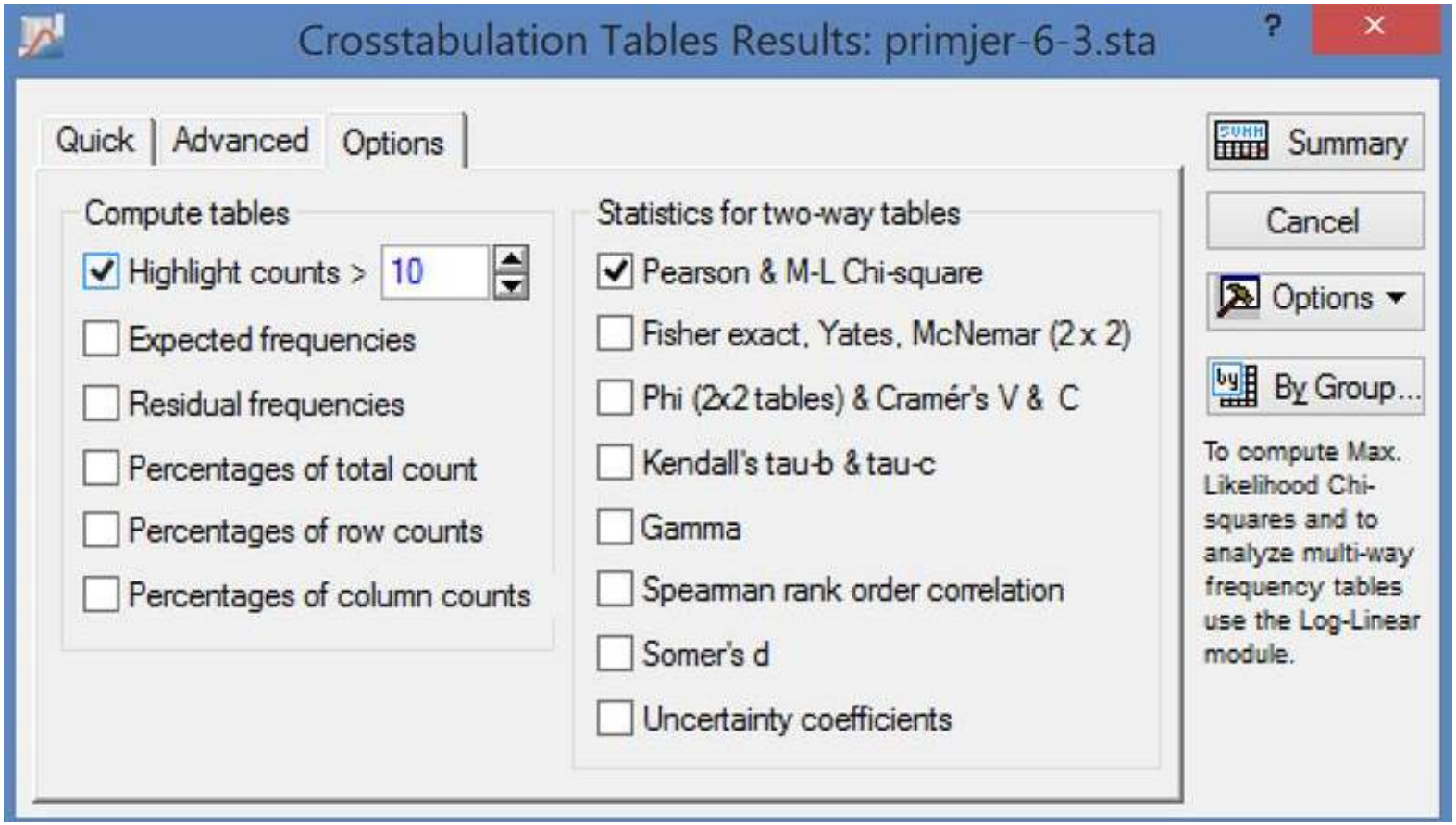
Pretpostavka 2×2 χ^2 testa:

Sve frekvencije su veće ili jednake od 5.

Ukoliko pretpostavke nisu zadovoljene treba koristiti **Fisherov egzaktni test**.

Ili spojiti kategorije da bismo povećali očekivane frekvencije.

Statistica koristi Fisherov egzaktni test samo za 2×2 tablice.


Crosstabulation Tables Results: primjer-6-3.sta
Quick
Advanced
Options
Compute tables
Highlight counts > 10
Expected frequencies
Residual frequencies
Percentages of total count
Percentages of row counts
Percentages of column counts
Statistics for two-way tables
Pearson & M-L Chi-square
Fisher exact, Yates, McNemar (2 x 2)
Phi (2x2 tables) & Cramér's V & C
Kendall's tau-b & tau-c
Gamma
Spearman rank order correlation
Somer's d
Uncertainty coefficients
Summary
Cancel
Options
By Group...
To compute Max. Likelihood Chi-squares and to analyze multi-way frequency tables use the Log-Linear module.

Testiranje hipoteze o normalnosti

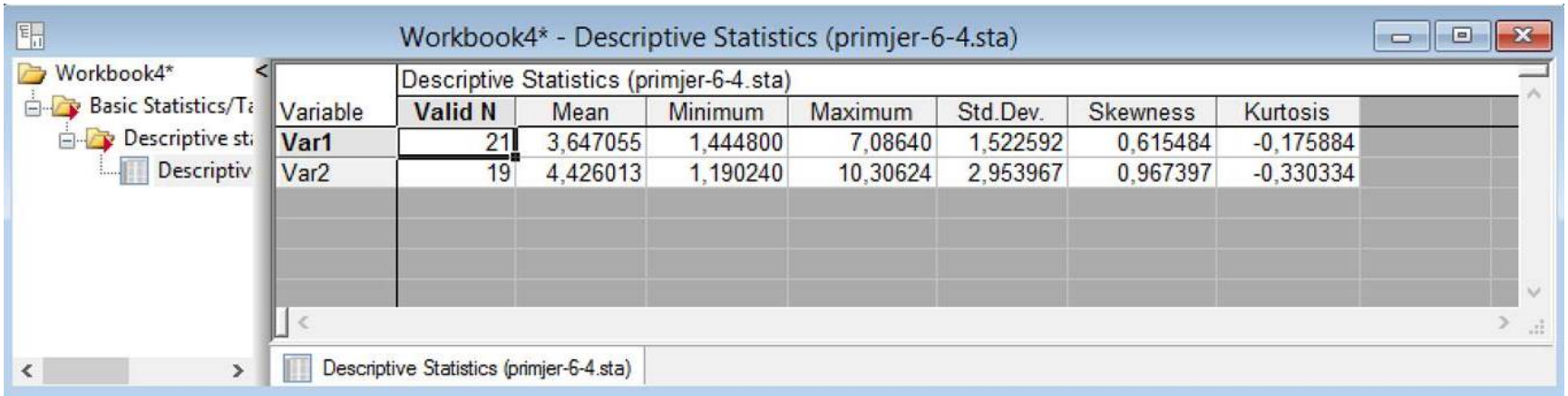
Normalna distribucija obilježja u populaciji je osnovna pretpostavka *t*-testa i ANOVA testa.

Kako provjeriti ovu pretpostavku?

Primjer. Promatrat ćemo dva primjera mjerenja:

V1	V2	V1	V2
3.32304	6.35024	5.93744	4.52704
4.69216	7.83632	4.42384	10.30624
1.86448	1.38976	4.00416	9.47376
3.83904	1.62368	2.79328	5.39392
1.89888	1.80944	5.0568	3.63264
4.58208	2.65568	2.73824	2.3736
3.32304	3.59824	3.27488	3.19232
3.08224	9.79024	2.18784	3.8528
6.03376	1.19024	1.4448	2.6144
7.0864	2.48368	3.13728	
1.86448			

Deskriptivna statistika



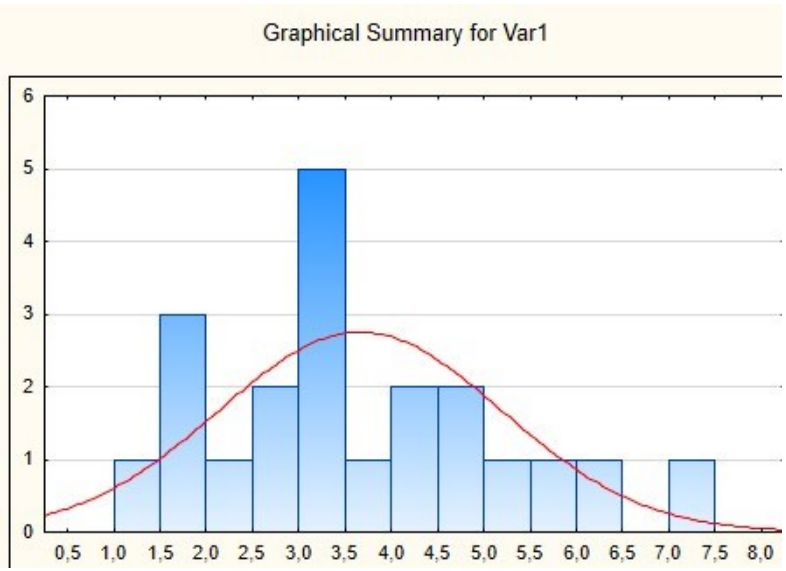
Variable	Valid N	Mean	Minimum	Maximum	Std.Dev.	Skewness	Kurtosis
Var1	21	3,647055	1,444800	7,08640	1,522592	0,615484	-0,175884
Var2	19	4,426013	1,190240	10,30624	2,953967	0,967397	-0,330334

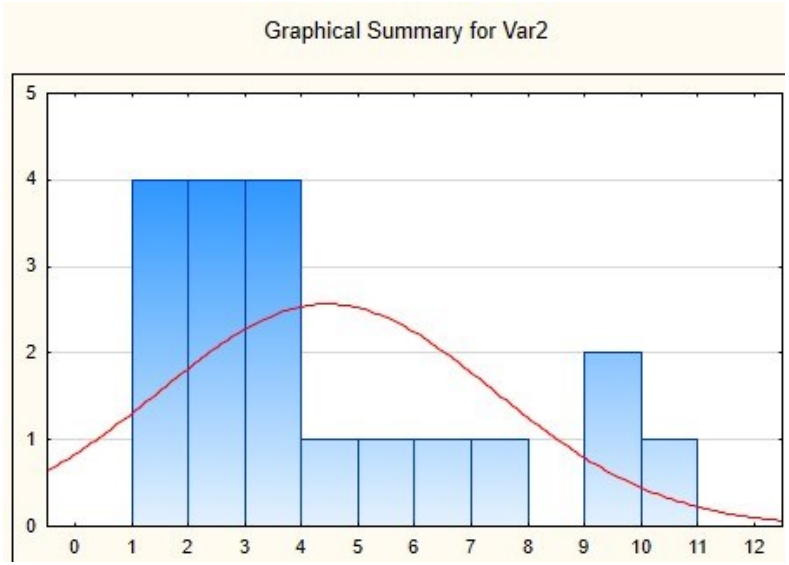
Za normalnu razdiobu je

- zakošenost = 0
- spljoštenost = 0 (kurtosis je 3 ali se koristi pomak od -3)

Grafički prikaz

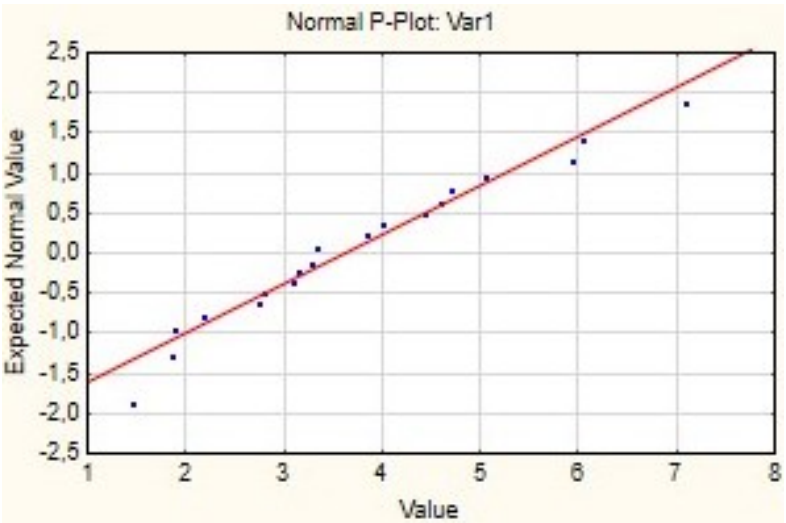
Normalna krivulja

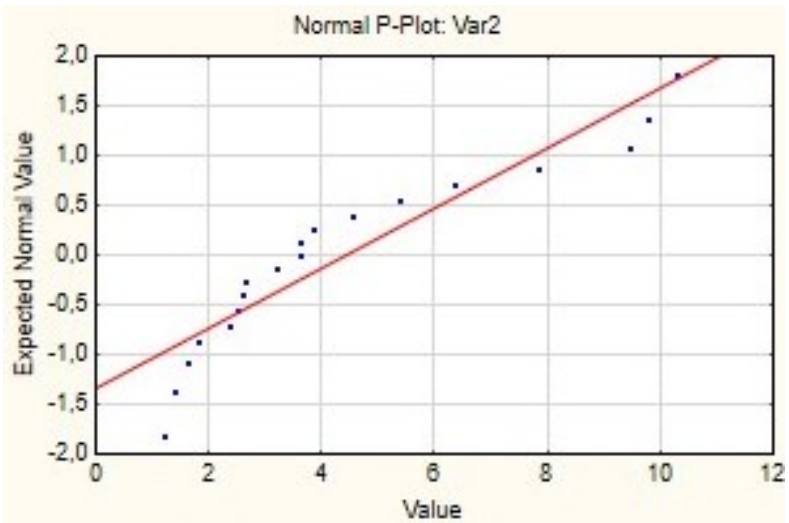




Normalni plot

Normalna razdioba je prikazana kao pravac.



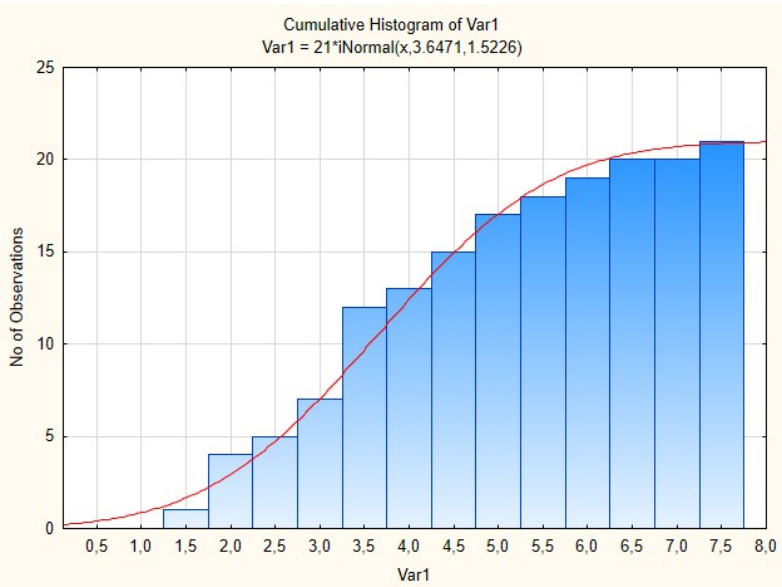


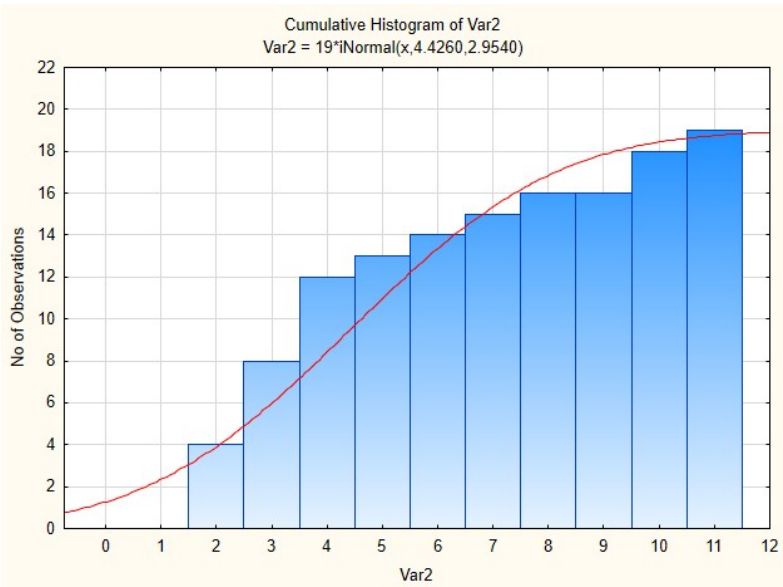
Kolmogorov-Smirnov test

Na osnovu uzorka odredimo eksperimentalnu funkciju distribucije.

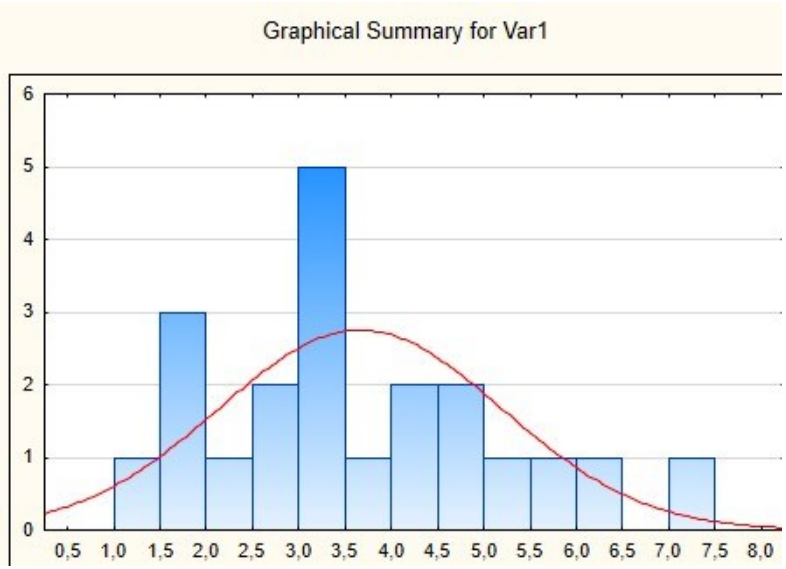
Izračunamo $\bar{X}$ i S^2.

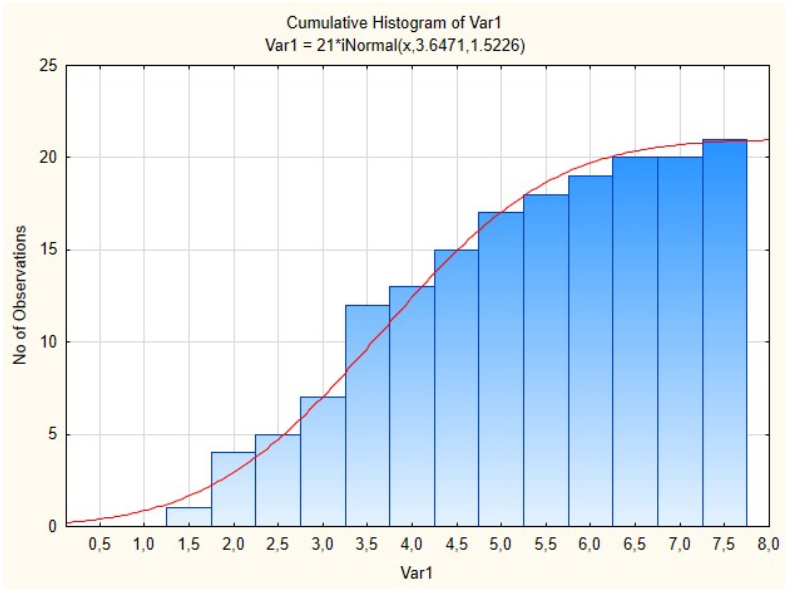
Usporedimo eksperimentalnu funkciju distribucije s funkcijom distribucije normalne razdiobe $N(\bar{X}, S^2)$.



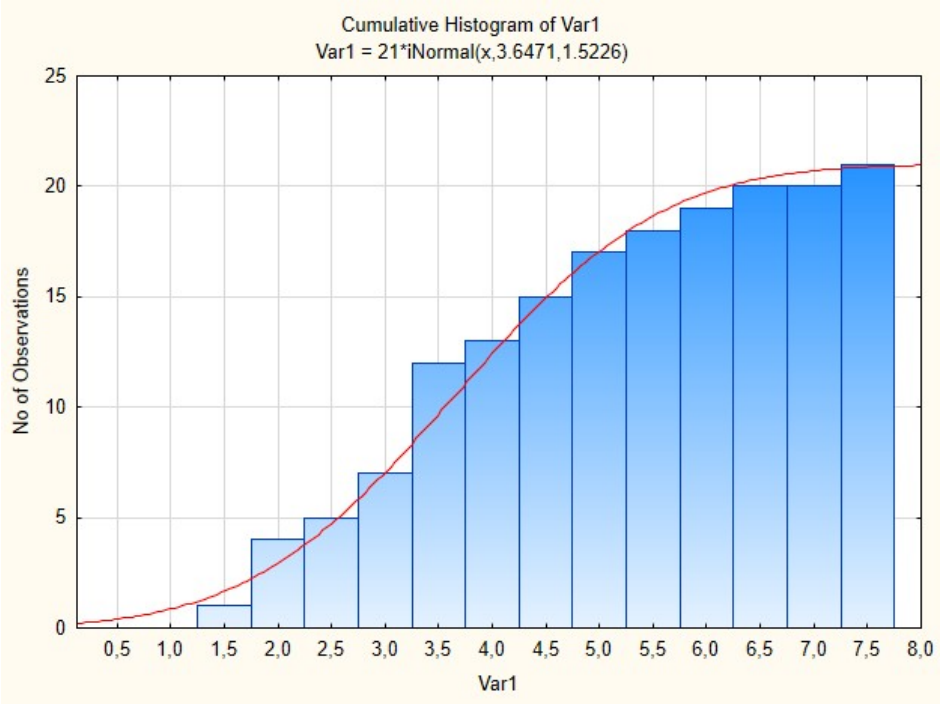


Funkcija gustoće i funkcija distribucije





Kolmogorov-smirnov test koristi statistiku D=najveće odstupanje eksperimentalne funkcije distribucije i očekivane normalne funkcije distribucije.

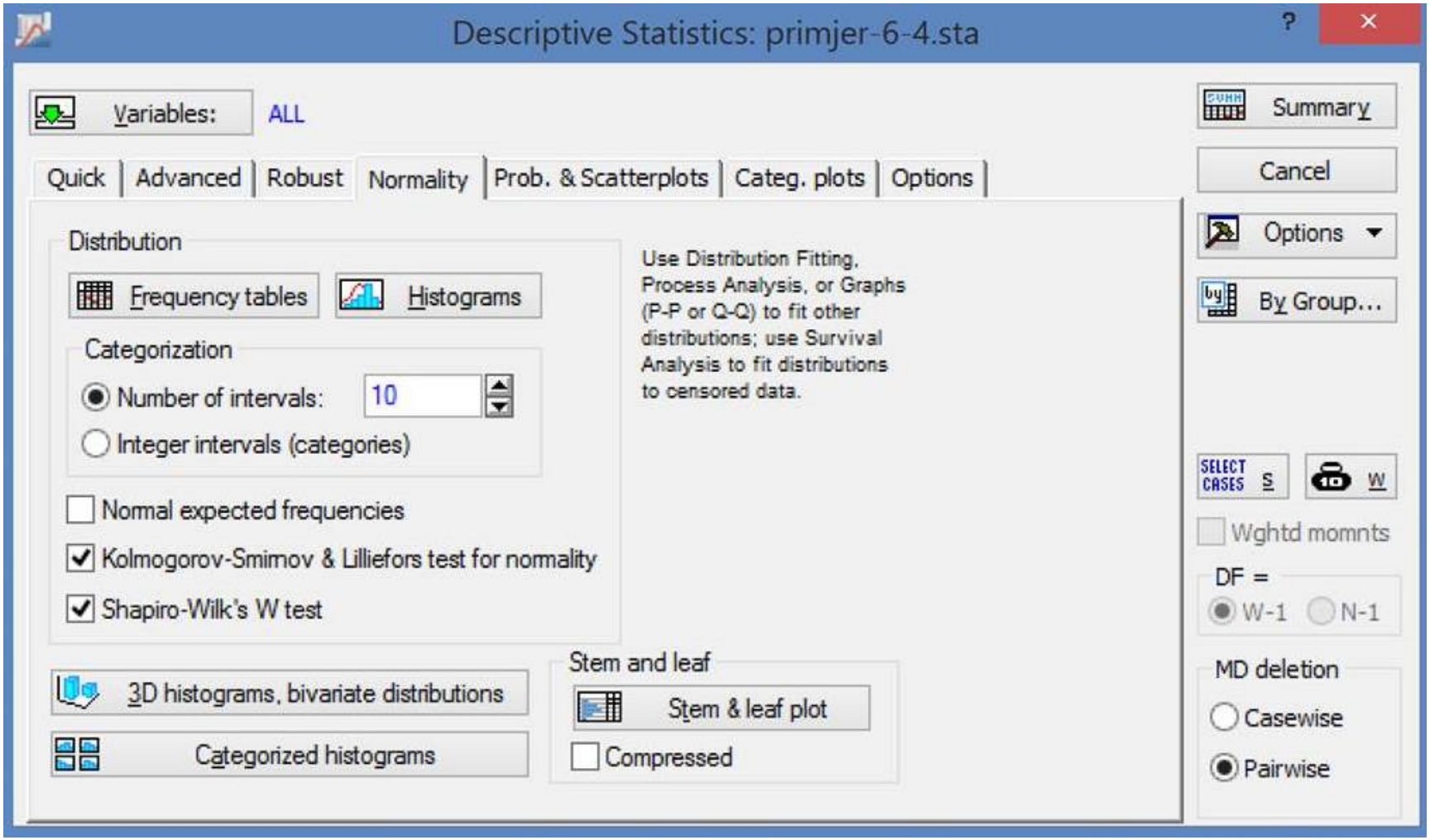


Kolmogorov-Smirnov test se može koristiti za proizvoljnu razdiobu.

Shapiro-Wilkov test - testira hipotezu o normalnosti populacije.

Snaga je veća nego kod Kolmogorov-Smirnov testa.

Izbor statistike (Deskriptivna statistika)

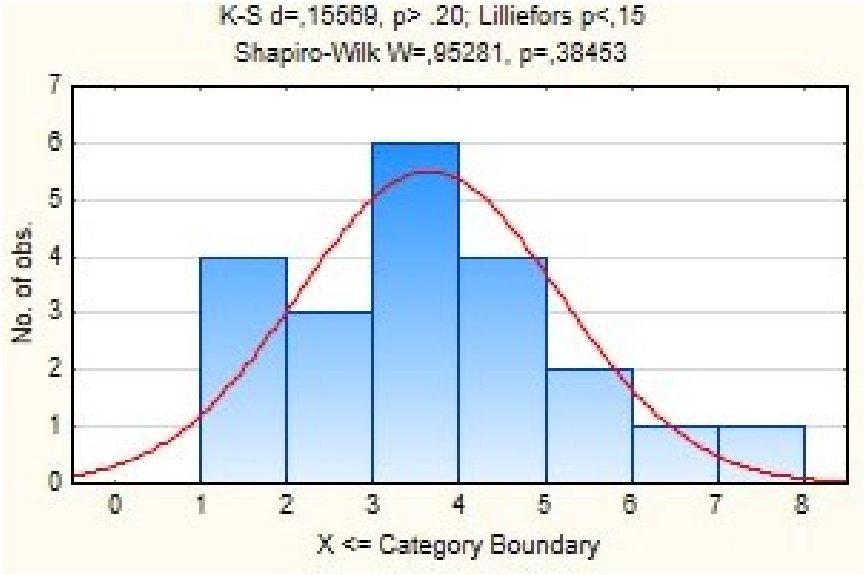


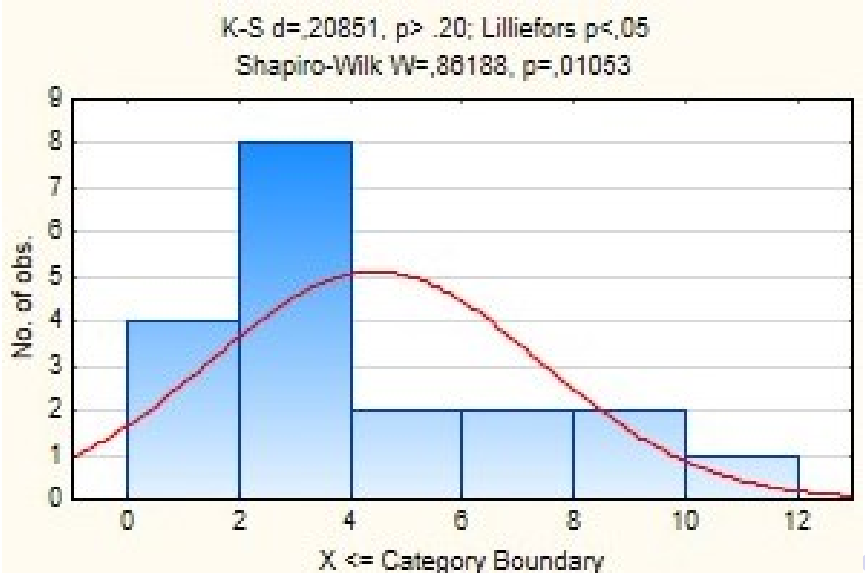
Frequency table

Category	Frequency table: Var1 (primjer-6-4.sta) K-S d=,15569, p> .20; Lilliefors p<,15 Shapiro-Wilk W=,95281, p=,38453 **Count**	Cumulative Count	Percent of Valid	Cumul % of Valid	% of all Cases	Cumulative % of All
0,000000<x<=1,000000	0	0	0,00000	0,0000	0,00000	0,0000
1,000000<x<=2,000000	4	4	19,04762	19,0476	19,04762	19,0476
2,000000<x<=3,000000	3	7	14,28571	33,3333	14,28571	33,3333
3,000000<x<=4,000000	6	13	28,57143	61,9048	28,57143	61,9048
4,000000<x<=5,000000	4	17	19,04762	80,9524	19,04762	80,9524
5,000000<x<=6,000000	2	19	9,52381	90,4762	9,52381	90,4762
6,000000<x<=7,000000	1	20	4,76190	95,2381	4,76190	95,2381
7,000000<x<=8,000000	1	21	4,76190	100,0000	4,76190	100,0000
Missing	0	21	0,00000		0,00000	100,0000

Category	Frequency table: Var2 (primjer-6-4.sta) K-S d=,20851, p> .20; Lilliefors p<,05 Shapiro-Wilk W=,86188, p=,01053 **Count**	Cumulative Count	Percent of Valid	Cumul % of Valid	% of all Cases	Cumulative % of All
0,000000<x<=2,000000	4	4	21,05263	21,0526	19,04762	19,0476
2,000000<x<=4,000000	8	12	42,10526	63,1579	38,09524	57,1429
4,000000<x<=6,000000	2	14	10,52632	73,6842	9,52381	66,6667
6,000000<x<=8,000000	2	16	10,52632	84,2105	9,52381	76,1905
8,000000<x<=10,00000	2	18	10,52632	94,7368	9,52381	85,7143
10,00000<x<=12,00000	1	19	5,26316	100,0000	4,76190	90,4762
Missing	2	21	10,52632		9,52381	100,0000

Graphs 1

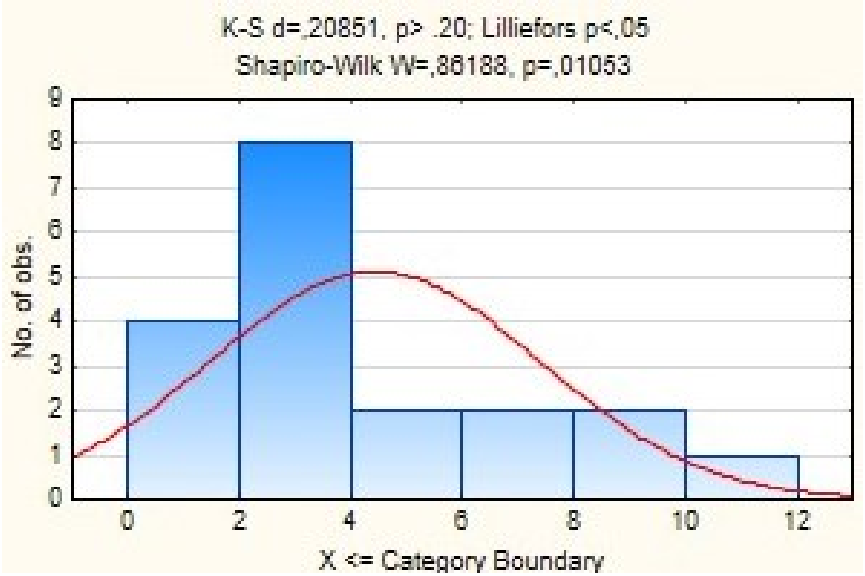

K-S d=,15569, p> .20; Lilliefors p<,15
Shapiro-Wilk W=,95281, p=,38453
No. of obs.
X <= Category Boundary

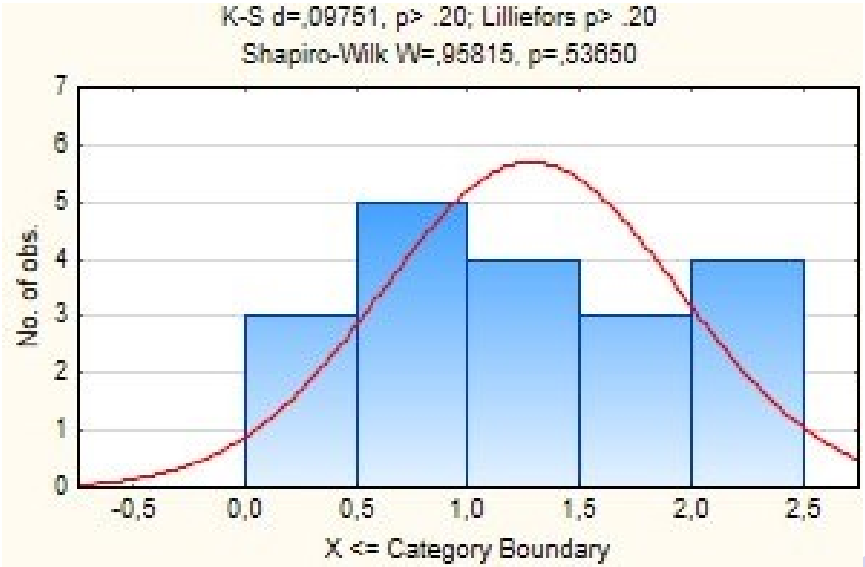

K-S d=,20851, p> .20; Lilliefors p<,05
Shapiro-Wilk W=,86188, p=,01053
No. of obs.
X <= Category Boundary

Ako populacija nije normalna:

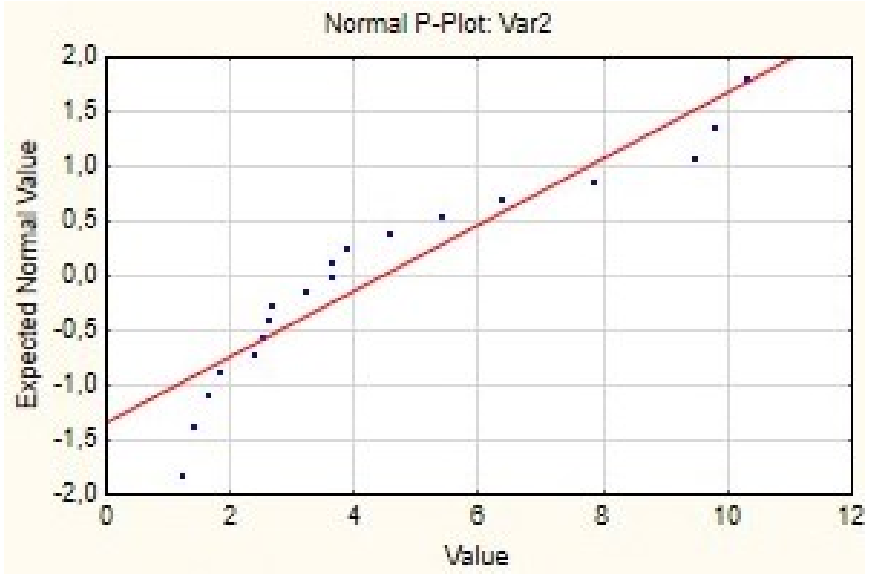
- izabrati test koji nema pretpostavku o normalnosti populacije (neparametarski testovi)
- transformirati podatke (npr. logaritamska transformacija, Box-Coxova transformacija, korijen, inverzna transformacija, . . .)

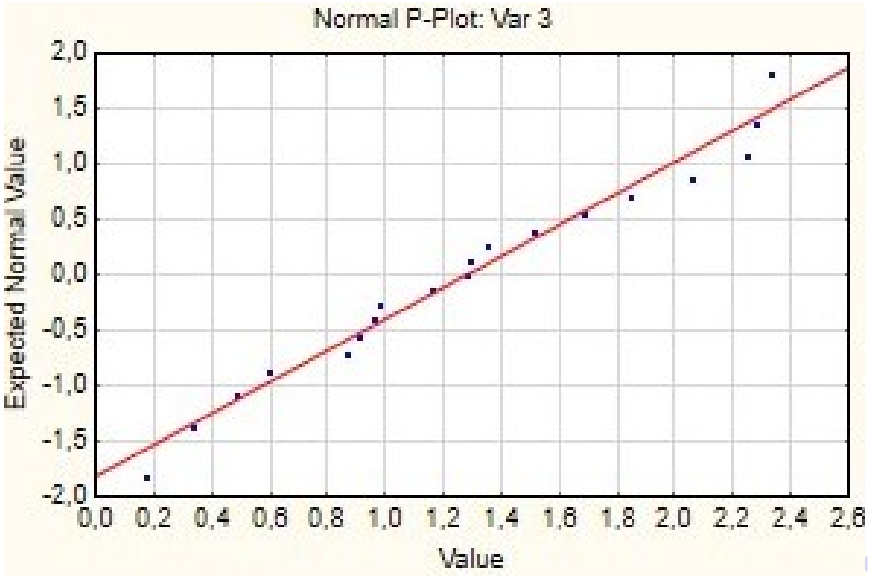
Za ilustraciju ćemo logaritmirati drugi set podataka iz primjera ($V2$)





Normal plot


Normal P-Plot: Var2
Expected Normal Value
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
-1,5
-2,0
0
2
4
6
8
10
12
Value


Normal P-Plot: Var 3
Expected Normal Value
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
-1,5
-2,0
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6
Value