

Numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačbi:

- Uvod
- Inicijalni problem
- Jednokoračne metode
- (Eksplisitne) Runge-Kuttine metode
- Konvergencija Runge-Kuttinih metoda
- Apsolutna stabilnost i implicitne Runge-Kuttine metode
- Kontrola pogreške
- Linearne višekoračne metode
- Adams-Bashforth-Moultonove metode
- BDF metode
- Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
- Apsolutna stabilnost
- Gearova metoda

Numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednažbi

Obična diferencijalna jednažba (ODJ)

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in (a, b),$$

- početni uvjet $y(a) = y_0$ ili

- rubni uvjet $r(y(a), y(b)) = 0$, gdje je r neka zadana funkcija.

Sustav običnih diferencijalnih jednažbi:

$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n),$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n),$$

$$\vdots$$

$$y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n).$$

Vektorska notacija:

$$\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T \quad \text{i} \quad \mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$$

sustav pišemo u analognom obliku:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)).$$

Primijenjujemo iste numeričke metode kao za rješavanje skalarne diferencijalne jednačbe.

Vodimo računa o tome da se umjesto skalarnih funkcija y i f javljaju vektorske funkcije \mathbf{y} i \mathbf{f} .

Diferencijalne jednačine višeg reda

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

supstitucijama

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

svodimo na sustav jednačini prvog reda:

$$y_1' = y' = y_2,$$

$$y_2' = y'' = y_3,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n,$$

$$y_n' = y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n).$$

I u ovom slučaju možemo koristiti metode razvijene za skalarnu diferencijalnu jednačinu.

I za sustav diferencijalnih jednačbi i za jednačbu višeg reda razlikujemo

- inicijalni (početni ili Cauchyjev) problem
- rubni problem

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednažbu.

Neki teoremi iz teorije običnih diferencijalnih jednažbi

Promatramo sustav od n diferencijalnih jednažbi

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

$\| \cdot \|$ - norma na \mathbb{R}^n

$\| A \|$ - pridružena matrična norma, $\| I \| = 1$

Teorem

Neka je f definirana i neprekidna na traci

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y \in \mathbb{R}^n\}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Nadalje, neka postoji konstanta L takva da je

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \|$$

za sve $x \in [a, b]$ i za sve $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ (Lipshitzov uvjet).

Tada za svaki $x_0 \in [a, b]$ i svaki $y_0 \in \mathbb{R}^n$ postoji točno jedna funkcija $y(x)$ takva da

- $y(x)$ je neprekidna i neprekidno derivabilna za $x \in [a, b]$;*
- $y'(x) = f(x, y(x))$ za $x \in [a, b]$;*
- $y(x_0) = y_0$.*

Ako parcijalne derivacije $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $i, j = 1, \dots, n$ postoje na traci S te su neprekidne i ograničene

$\Rightarrow f$ zadovoljava Lipshitzov uvjet.

$F_N(a, b)$ - skup funkcija za koje postoje sve parcijalne derivacije do reda N te su neprekidne i ograničene.

Funkcija $f \in F_1(a, b)$ zadovoljava pretpostavke teorema.

U primjenama, f je obično neprekidna na S i također neprekidno diferencijabilna ali derivacije $\partial f_i / \partial y_j$ su često neograničene.

Tada je inicijalni problem rješiv, ali rješenje je definirano samo u nekoj okolini oko x_0 (početne točke) a ne na cijelom segmentu $[a, b]$.

Primjer. Inicijalni problem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1$$

ima rješenje

$$y(x) = \frac{1}{1-x},$$

koje je definirano samo za $x < 1$

Inicijalni problem neprekidno ovisi o početnoj vrijednosti.

Teorem

Neka je funkcija $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidna na traci

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y \in \mathbb{R}^n\}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

i neka zadovoljava Lipshitzov uvjet

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \|$$

za sve $(x, y_1), (x, y_2) \in S$. Neka je $a \leq x_0 \leq b$. Tada za $y(x; s)$, rješenje inicijalnog problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0; s) = s$$

vrijedi ocjena

$$\| y(x; s_1) - y(x; s_2) \| \leq e^{L|x-x_0|} \| s_1 - s_2 \|$$

Eulerova metoda

Eulerova metoda - najjednostavnija metoda za rješavanje inicijalnog problema za ODJ oblika

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0.$$

Osnovna ideja: y' se zamijeni s podijeljenom razlikom

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h).$$

Rješenje diferencijalne jednačbe zadovoljava

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + h y'(x) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= y(x) + h f(x, y(x)) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Zanemarimo kvadratni član:

$$y(x + h) \approx y(x) + hf(x, y(x)).$$

Interval $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova:

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n.$$

Prvo aproksimiramo rješenje u točki $x_1 = a + h$

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Dobivenu aproksimaciju y_1 iskoristimo za računanje aproksimacije rješenja u točki $x_2 = x_1 + h$:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

Postupak ponavljamo sve dok ne dođemo do kraja intervala $b = x_n$.

Opisani postupak nazivamo Eulerova metoda, i možemo ga kraće zapisati rekurzijom

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

gdje je početni uvjet y_0 zadan kao inicijalni uvjet diferencijalne jednačbe.

Dobivene vrijednosti y_i su aproksimacije rješenja diferencijalne jednačbe u točkama x_i .

Jednokoračne metode

Koristeći sličnu ideju kao u Eulerovoj metodi, diferencijalnu jednačbu

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0$$

na intervalu $[a, b]$, možemo rješavati tako da podijelimo interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala, označivši

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_i = a + i h, \quad i = 0, \dots, n.$$

y_{i+1} , aproksimaciju rješenja u točki x_{i+1} , računamo iz y_i korištenjem aproksimacije oblika

$$y(x + h) \approx y(x) + h \Phi(x, y(x), h; f),$$

te dobivamo rekurziju:

$$y_{i+1} = y_i + h \Phi(x_i, y_i, h; f), \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

Funkciju Φ nazivamo **funkcija prirasta**, a različiti izbor te funkcije definira različite metode.

Uočimo da je funkcija f iz diferencijalne jednačbe parametar od Φ (tj. Φ zavisi o f).

Tako je npr. u Eulerovoj metodi

$$\Phi(x, y, h; f) = f(x, y).$$

Metode ovog oblika zovemo **jednokoračne metode**

(jer za aproksimaciju y_{i+1} koristimo samo vrijednost y_i u prethodnoj točki x_i , tj. u jednom koraku dobijemo y_{i+1} iz y_i).

Da bismo pojednostavili zapis, ubuduće ćemo f izostaviti kao argument funkcije Φ .

O odabiru funkcije Φ ovisi i točnost metode.

Pogrešku aproksimacije:

$$\tau(x; h) = \Delta(x; h) - \Phi(x, y(x), h),$$

gdje je $y(x)$ točno rješenje diferencijalne jednačbe

$$\Delta(x; h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

nazivamo **lokalna pogreška diskretizacije**.

Red metode odgovara njezinoj točnosti.

Općenito, za jednokoračne metode kažemo da su **reda** p ako je

$$\tau(x; h) = \mathcal{O}(h^p).$$

Što je veći p metoda je točnija, a to postizemo odabirom funkcije Φ .

Pod tačnošću metode podrazumijevamo ponašanje pogreške

$$y(x_i) - y_i.$$

Da bismo pojednostavnili argumentaciju, promatrat ćemo pogrešku u fiksiranoj točki b .

Ako je jednokoračna metoda reda p , tada je

$$y(b) - y_n = \mathcal{O}(h^p).$$

Napomena. Ovo će biti pokazano kasnije.

Uočimo da je $h = (b - a)/n$ te da je y_n uvijek (za svaki n) aproksimacija za $y(b)$.

Runge–Kuttine metode

Najpoznatije jednokoračne metode su svakako Runge–Kuttine metode.

Kod njih je funkcija Φ oblika

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{j=1}^r \omega_j k_j(x, y, h),$$

a k_j su zadani s

$$k_j(x, y, h) = f\left(x + c_j h, y + h \sum_{l=1}^r a_{jl} k_l(x, y, h, f)\right), \quad j = 1, \dots, r.$$

Broj r zovemo **broj stadija** Runge–Kuttine (RK) metode, i on označava koliko puta moramo računati funkciju f u svakom koraku.

Različit izbor koeficijenata ω_j , c_j i a_{jl} definira različite metode.

Iz izraza

$$k_j(x, y, h) = f\left(x + c_j h, y + h \sum_{l=1}^r a_{jl} k_l(x, y, h, f)\right), \quad j = 1, \dots, r.$$

vidimo da se k_j nalazi na lijevoj i na desnoj strani jednačbe.

Zadan je implicitno te govorimo o **implicitnoj** Runge–Kuttinoj metodi.

U praksi se najviše koriste metode gdje je

$$a_{jl} = 0 \quad \text{za} \quad l \geq j.$$

Tada k_j možemo izračunati preko k_1, \dots, k_{j-1} , tj. funkcije k_j su zadane eksplicitno.

Takve RK metode nazivamo **eksplicitnima**.

Nadalje, obično se dodaje uvjet

$$\sum_{l=1}^r a_{jl} = c_j.$$

Ovaj izvor koeficijenata c_j će biti objašnjen kasnije.

Primjer odabira koeficijenata prikazat ćemo na RK metodi s dva stadija:

$$\Phi(x, y, h) = \omega_1 k_1(x, y, h) + \omega_2 k_2(x, y, h),$$

$$k_1(x, y, h) = f(x, y),$$

$$k_2(x, y, h) = f(x + ah, y + ahk_1).$$

Razvojem k_2 u Taylorov red po varijabli h dobivamo

$$k_2(x, y, h) = f + h(f_x a + f_y a f) + \\ + \frac{h^2}{2}(f_{xx} a^2 + 2f_{xy} a^2 f + f_{yy} a^2 f^2) + \mathcal{O}(h^3),$$

- f_x i f_y prve parcijalne derivacije funkcije $f = f(x, y)$ po x i y ,
- f_{xx} , f_{xy} i f_{yy} odgovarajuće druge parcijalne derivacije.

Razvoj rješenja diferencijalne jednadžbe $y(x)$ ima oblik

$$\begin{aligned}y(x+h) &= y(x) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) \\ &\quad + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f)] + \mathcal{O}(h^4).\end{aligned}$$

Ovdje smo iskoristili da je $y(x)$ rješenja diferencijalne jednadžbe:

$$y'(x) = f(x, y) = f,$$

te pravila za deriviranje

$$\begin{aligned}y''(x) &= f_x + f_y f, \\ y'''(x) &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f).\end{aligned}$$

Sada je lokalna pogreška diskretizacije jednaka

$$\begin{aligned}
 & \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x), h) = \\
 = & \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - (\omega_1 k_1(x, y, h) + \omega_2 k_2(x, y, h)) \\
 = & (1 - \omega_1 - \omega_2)f + h(f_x + f_y f) \left(\frac{1}{2} - \omega_2 a \right) \\
 & + h^2 \left[(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega_2 a^2}{2} \right) + \frac{1}{6} f_y (f_x + f_y f) \right] \\
 & + \mathcal{O}(h^3).
 \end{aligned}$$

Da bi metoda bila reda 1 koeficijente treba odabrati tako da se poništi prvi član u gornjem razvoju:

$$1 - \omega_1 - \omega_2 = 0.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x), h) = \\
& = (1 - \omega_1 - \omega_2)f + h(f_x + f_y f) \left(\frac{1}{2} - \omega_2 a \right) \\
& \quad + h^2 \left[(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega_2 a^2}{2} \right) + \frac{1}{6} f_y (f_x + f_y f) \right] \\
& \quad + \mathcal{O}(h^3).
\end{aligned}$$

Ukoliko je zadovoljeno i

$$\frac{1}{2} - \omega_2 a = 0$$

metoda će biti reda 2.

Uvođenjem slobodnog koeficijenta t rješenje ove dvije jednačbe možemo napisati u obliku:

$$\omega_2 = t \neq 0, \quad \omega_1 = 1 - t, \quad a = \frac{1}{2t}.$$

Uočimo da t ne možemo odabrati tako da poništimo i član uz h^2 tako da metoda bude reda 3.

Ukoliko je $\omega_2 = 0$, radi se o metodi s jednim stadijem, i to upravo o Eulerovoj metodi.

Za $t = 1/2$ dobivamo Heunovu metodu:

$$\Phi = \frac{1}{2} (k_1 + k_2),$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f(x + h, y + h k_1).$$

Za $t = 1$ dobiva se modificirana Eulerova metoda:

$$\Phi = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right).$$

lii

$$\Phi = k_2,$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right).$$

Najraširenije su metode sa četiri stadija.

Odgovarajuće jednačbe koje moraju zadovoljavati koeficijenti RK-4 metoda su:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 1,$$

$$\omega_2 c_2 + \omega_3 c_3 + \omega_4 c_4 = \frac{1}{2},$$

$$\omega_2 c_2^2 + \omega_3 c_3^2 + \omega_4 c_4^2 = \frac{1}{3},$$

$$\omega_3 c_2 a_{32} + \omega_4 (c_2 a_{42} + c_3 a_{43}) = \frac{1}{6},$$

$$\omega_2 c_2^3 + \omega_3 c_3^3 + \omega_4 c_4^3 = \frac{1}{4},$$

$$\omega_3 c_2^2 a_{32} + \omega_4 (c_2^2 a_{42} + c_3^2 a_{43}) = \frac{1}{12},$$

$$\omega_3 c_2 c_3 a_{32} + \omega_4 (c_2 a_{42} + c_3 a_{43}) c_4 = \frac{1}{8},$$

$$\omega_4 c_2 a_{32} a_{43} = \frac{1}{24},$$

gdje je

$$c_1 = 0,$$

$$c_3 = a_{31} + a_{32},$$

$$c_2 = a_{21},$$

$$c_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43}.$$

- 1. uvjet treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 1
- 2. uvjet treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 2
- 3.-4. uvjet treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 3
- 5.-8. uvjet treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 4

Za metodu s tri stadija uvrštavanjem

$$c_4 = a_{41} = a_{42} = a_{43} = \omega_4 = 0$$

dobivamo 9 koeficijenata i 7 jednažbi.

Metoda s četiri stadija može postići najviše red četiri.

Ne možemo dva stupnja slobode iz sustava jednažbi iskoristiti da red metode podignemo na pet. Za eksplicitne metode vrijedi:

- za metode s jednim, dva, tri i četiri stadija najveći mogući red metode odgovara broju stadija.
- Za metode s 5, 6 i 7 stadija najveći mogući red je 4, 5 i 6.
- Za metode s 8 i 9 stadija najveći mogući red je 6 i 7.
- Za metode s 10 i više stadija najveći mogući red je barem za dva manji od broja stadija.

Metode s četiri stadija su najpopularnije. Red je 4, a da bismo postigli red 5 trebamo povećati broj stadija barem za dva.

Primjeri RK-4 metoda.

Najpopularnija je “klasična” Runge–Kutta metoda, koja se u literaturi najčešće naziva Runge–Kutta ili RK-4 metoda (iako je to samo jedna u nizu Runge–Kutta metoda):

$$\Phi = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f\left(x + h, y + hk_3\right).$$

3/8-sku metoda:

$$\Phi = \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{2}{3}h, y - \frac{h}{3}k_1 + hk_2\right),$$

$$k_4 = f(x + h, y + h(k_1 - k_2 + k_3))$$

Gillova metoda:

$$\Phi = \frac{1}{6} \left(k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4 \right),$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + h \frac{\sqrt{2}-1}{2} k_1 + h \frac{2-\sqrt{2}}{2} k_2\right),$$

$$k_4 = f\left(x + h, y - h \frac{\sqrt{2}}{2} k_2 + h \frac{2+\sqrt{2}}{2} k_3\right).$$

Butcherova tablica

Koeficijente RK metode uobičajeno je zapisivati pomoću Butcherove tablice:

c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	\cdots	a_{2s}
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	\cdots	a_{3s}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	\cdots	a_{ss}
	ω_1	ω_2	ω_3	\cdots	ω_s

“Klasična” Runge–Kutta metoda:

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Još o koeficijentima za Runge–Kuttine metode

Za RK-2 i RK-4 metode smo vidjeli da treba vrijediti

$$\sum_j \omega_j = 1$$

da bi bile konzistentne s redom većim od 1.

To vrijedi i općenito za sve RK metode.

Teorem

Runge–Kuttina metoda sa s stadija ima red konzistencije veći ili jednak 1 ako i samo ako je

$$\sum_{j=1}^s \omega_j = 1.$$

Dokaz.

Teorem srednje vrijednosti daje nam ocjene

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

i

$$k_j = f\left(x + c_j h, y + h \sum_l a_{jl} k_l\right) = f(x, y) + \mathcal{O}(h),$$

pa lokalna pogreška diskretizacije

$$\tau(x; h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \sum_j \omega_j k_j$$

zadovoljava

$$\tau(x; h) = y'(x) + \mathcal{O}(h) - \sum_j \omega_j [f(x, y) + \mathcal{O}(h)].$$

y je rješenje diferencijalne jednačbe $y' = f(x, y)$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}\tau(x; h) &= f(x, y) - \sum_j \omega_j f(x, y) + \mathcal{O}(h) \\ &= f(x, y) \left(1 - \sum_j \omega_j \right) + \mathcal{O}(h),\end{aligned}$$

odakle lagano slijedi tvrdnja teorema. □

Slijedeća zanimljivost vezana je uz određivanje koeficijenata c_j .

U definiciji metode je spomenuto da je uobičajeni izbor

$$c_j = \sum_l a_{jl}.$$

Možemo li povećati red konzistencije drugačijim izborom c_j .

Odgovor je ne, i to nam pokazuje sljedeći teorem.

Teorem

Neka je RK metoda zadana s

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^s \omega_j \tilde{k}_j, \quad \tilde{k}_j = f\left(x + \tilde{c}_j, y + h \sum_{l=1}^s a_{jl} \tilde{k}_l\right)$$

reda konzistencije \tilde{p} , te neka je p red konzistencije metode

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^s \omega_j k_j, \quad k_j = f\left(x + c_j, y + h \sum_{l=1}^s a_{jl} k_l\right),$$

gdje je $c_j = \sum_{l=1}^s a_{jl}$. Tada je $p \geq \tilde{p}$.

Konvergenција jednokoračnih metoda

U daljnjem tekstu pretpostaviti ćemo da je $f \in F_1(a, b)$.

S y ćemo označiti egzaktno rješenje inicijalnog problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a, b], \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

Uočimo da pretpostavka $f \in F_1(a, b)$ povlači egzistenciju i jedinstvenost rješenja y na intervalu $[a, b]$.

Neka $\Phi(x, y; h)$ definira jednokoračnu metodu

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i; h), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

gdje je $x_{i+1} = x_i + h$.

Zanima nas ponašanje pogreške

$$e_i = y_i - y(x_i).$$

Za fiksirani $x \in [a, b]$ definiramo korak

$$h_n = \frac{x - x_0}{n}$$

i **globalnu pogrešku diskretizacije**

$$e(x; h_n) = y_n - y(x).$$

Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n = x$, te možemo promatrati globalnu pogrešku diskretizacije kada $n \rightarrow \infty$.

Definicija

Jednokoračna metoda je **konvergentna** ako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(x; h_n) = 0$$

za sve $x \in [a, b]$ i sve $f \in F_1(a, b)$.

Pokazat ćemo da su metode reda $p > 0$ konvergentne, i štoviše, da vrijedi

$$e(x; h_n) = \mathcal{O}(h_n^p).$$

Red globalne pogreške diskretizacije je dakle jednak redu lokalne pogreške diskretizacije.

Lema

Ako brojevi ξ_i zadovoljavaju ocjenu oblika

$$|\xi_{i+1}| \leq (1 + \delta)|\xi_i| + B, \quad \delta > 0, \quad B \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

tada je

$$|\xi_n| \leq e^{n\delta} |\xi_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} B.$$

Dokaz.

Iz pretpostavke direktno slijedi

$$|\xi_1| \leq (1 + \delta)|\xi_0| + B,$$

$$|\xi_2| \leq (1 + \delta)^2|\xi_0| + B(1 + \delta) + B,$$

⋮

$$|\xi_n| \leq (1 + \delta)^n|\xi_0| + B[1 + (1 + \delta) + (1 + \delta)^2 + \dots + (1 + \delta)^{n-1}]$$

$$= (1 + \delta)^n|\xi_0| + B\frac{(1 + \delta)^n - 1}{\delta}$$

$$\leq e^{n\delta}|\xi_0| + B\frac{e^{n\delta} - 1}{\delta},$$

jer je $0 < 1 + \delta < e^\delta$ za $\delta > -1$.

Teorem

Za $x_0 \in [a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}$, *promatramo inicijalni problem*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

koji ima jedinstveno rješenje $y(x)$. Neka je funkcija Φ neprekidna na

$$G = \{(x, y, h) \mid x \in [a, b], |y - y(x)| \leq \gamma, |h| \leq h_0\},$$

za $h_0 > 0$, $\gamma > 0$ i neka postoje pozitivne konstante M i N takve da je

$$|\Phi(x, y_1; h) - \Phi(x, y_2; h)| \leq M|y_1 - y_2|$$

za sve $(x, y_i, h) \in G$, $i = 1, 2$,

$$|\tau(x; h)| = |\Delta(x; h) - \Phi(x, y(x); h)| \leq N|h|^p, \quad p > 0$$

za sve $x \in [a, b]$, $h \leq h_0$.

Tada postoji \bar{h} , $0 < \bar{h} \leq h_0$, takav da globalna pogreška diskretizacije zadovoljava

$$|e(x; h_n)| \leq |h_n|^p N \frac{e^{M|x-x_0|} - 1}{M}$$

za sve $x \in [a, b]$ i $h_n = (x - x_0)/n$, $n = 1, 2, \dots$, uz $|h_n| \leq \bar{h}$. Ako je $\gamma = \infty$, tada je $\bar{h} = h_0$.

Dokaz. Funkcija

$$\tilde{\Phi}(x, y; h) = \begin{cases} \Phi(x, y; h), & \text{za } (x, y, h) \in G, \\ \Phi(x, y(x) + \gamma; h), & \text{za } x \in [a, b], |h| \leq h_0, y \geq y(x) + \gamma, \\ \Phi(x, y(x) - \gamma; h), & \text{za } x \in [a, b], |h| \leq h_0, y \leq y(x) - \gamma \end{cases}$$

je očito neprekidna na

$$\tilde{G} = \{(x, y, h) \mid x \in [a, b], y \in \mathbb{R}, |h| \leq h_0\}$$

i zadovoljava uvjet

$$|\tilde{\Phi}(x, y_1; h) - \tilde{\Phi}(x, y_2; h)| \leq M|y_1 - y_2|$$

za sve $(x, y_i, h) \in \tilde{G}$, $i = 1, 2$.

Zbog $\tilde{\Phi}(x, y(x); h) = \Phi(x, y(x); h)$ također vrijedi

$$|\Delta(x; h) - \tilde{\Phi}(x, y(x); h)| \leq N|h|^p, \quad \text{za } x \in [a, b], \quad |h| \leq h_0.$$

Neka jednokoračna metoda generirana s $\tilde{\Phi}$ definira aproksimacije \tilde{y}_i za $y(x_i)$, $x_i = x_0 + ih$:

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h\tilde{\Phi}(x_i, \tilde{y}_i; h).$$

Zbog

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\Delta(x_i; h),$$

za pogrešku $\tilde{e}_i = \tilde{y}_i - y(x_i)$, oduzimanjem, dobivamo rekurzivnu formulu

$$\tilde{e}_{i+1} = \tilde{e}_i + h[\tilde{\Phi}(x_i, \tilde{y}_i; h) - \tilde{\Phi}(x_i, y(x_i); h)] + h[\tilde{\Phi}(x_i, y(x_i); h) - \Delta(x_i; h)].$$

Sada slijedi

$$|\tilde{\Phi}(x_i, \tilde{y}_i; h) - \tilde{\Phi}(x_i, y(x_i); h)| \leq M|\tilde{y}_i - y(x_i)| = M|\tilde{e}_i|,$$

$$|\tilde{\Phi}(x_i, y(x_i); h) - \Delta(x_i; h)| \leq N|h|^p,$$

te dobivamo rekurzivnu ocjenu

$$|\tilde{e}_{i+1}| \leq (1 + |h|M)|\tilde{e}_i| + N|h|^{p+1}.$$

Korištenjem $\tilde{e}_0 = \tilde{y}_0 - y(x_0) = 0$, iz leme slijedi

$$|\tilde{e}_k| \leq N|h|^p \frac{e^{M|x_k - x_0|} - 1}{M}.$$

Neka je sada $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, fiksiran i $h = h_n = (x - x_0)/n$, $n > 0$.

Tada zbog $x_n = x_0 + nh = x$ i zbog $\tilde{e}(x; h_n) = \tilde{e}_n$ slijedi

$$|\tilde{e}(x; h_n)| \leq N|h|^p \frac{e^{M|x - x_0|} - 1}{M}$$

za sve $x \in [a, b]$ i h_n za koje je $|h_n| \leq h_0$.

Budući da je $|x - x_0| \leq |b - a|$ i $\gamma > 0$, postoji \bar{h} , $0 < \bar{h} \leq h_0$ takav da je $|\tilde{e}(x; h_n)| \leq \gamma$ za sve $x \in [a, b]$, $|h_n| \leq \bar{h}$, tj. za jednokoračnu metodu generiranu s Φ :

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i; h)$$

imamo za $|h| \leq \bar{h}$, zbog definicije za $\tilde{\Phi}$,

$$\tilde{y}_i = y_i, \quad \tilde{e}_i = e_i \quad \text{i} \quad \tilde{\Phi}(x_i, \tilde{y}_i; h) = \Phi(x_i, y_i; h).$$

Tvrđnja teorema dakle slijedi za sve $x \in [a, b]$ i sve $h_n = (x - x_0)/n$, $n = 1, 2, \dots$, uz $|h_n| \leq \bar{h}$. □

Iz prethodnog teorema posebno slijedi da je metoda reda $p > 0$, koja u okolini rješenja zadovoljava Lipschitzov uvjet, konvergentna.

Uočimo da je ovaj uvjet ispunjen ako $\frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y; h)$ postoji i neprekidna je u domeni G danoj u teoremu.

Teorem, također, daje i gornju ogradu za globalnu pogrešku diskretizacije, koja u principu može biti izračunata ako znamo M i N .

To je u praksi nepraktično. Tako je za Eulerovu metodu

$$N \approx \frac{1}{2} |f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))f(x, y(x))|$$

i

$$M \approx \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| = |f_y(x, y(x))|,$$

dok za RK-4 metode treba ocijeniti četvrte derivacije funkcije f .

Druga varijanta teorema o konvergenciji.

Teorem

Pretpostavimo da jednokoračna metoda zadovoljava Lipschitzov uvjet

$$|\Phi(x, y_1; h) - \Phi(x, y_2; h)| \leq M|y_1 - y_2|$$

za sve $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ i $x \in [a, b]$.

Tada rješenje $y(x)$ inicijalnog problema $y' = f(x, y)$ i niz aproksimacija (y_i) dobivenih jednokoračnom metodom zadovoljavaju

$$\max_{0 \leq i \leq n} |y(x_i) - y_i| \leq e^{b-x_0} L |y(x_0) - y_0| + \left[\frac{e^{(b-x_0)L} - 1}{L} \right] \tau(h)$$

gdje je

$$\tau(h) = \max_i |\tau(x_i; h)|$$

Ako je metoda konzistentna tada numeričko aproksimacija y_n konvergira prema $y(b)$.

Obratimo pažnju na član $|y(x_0) - y_0|$:

$$\max_{0 \leq i \leq n} |y(x_i) - y_i| \leq e^{b-x_0} L |y(x_0) - y_0| + \left[\frac{e^{(b-x_0)L} - 1}{L} \right] \tau(h)$$

Nije nužno da iteracije započnemo s $y(x_0)$!

Ako napravimo malu perturbaciju na početku $y_0 = y(x_0) + \varepsilon$ ta pogreška se ograničeno širi bez obzira na n (ili h)!

Ovaj teorem zapravo kaže da su jednokoračne metode **stabilne**.

Konvergencija Runge-Kuttinih metoda

Konvergencija jednokoračnih metoda je garantirana zadovoljavanjem Lipschitzovog uvjeta:

$$|\Phi(x, y_1; h) - \Phi(x, y_2; h)| \leq M|y_1 - y_2|.$$

Ako f zadovoljava Lipschitzov uvjet:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

Zadovoljava li ga i $\Phi = \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \dots + \omega_s k_s$ iz RK metode?

Pogledajmo **eksplicitnu** RK metodu sa s stadija:

$$k_1(y) = f(x, y)$$

$$k_2(y) = f(x + c_2 h, y + h a_{21} k_1(y))$$

$$k_3(y) = f(x + c_3 h, y + h(a_{31} k_1(y) + a_{32} k_2(y)))$$

$$\vdots$$

$$k_s(y) = f(x + c_s h, y + h(a_{s1} k_1(y) + a_{s2} k_2(y) + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1}(y)))$$

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^s \omega_i k_i(y)$$

Promatramo

$$\begin{aligned}
 |\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| &= \left| \sum_{i=1}^s \omega_i (k_i(y_1) - k_i(y_2)) \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^s |\omega_i| |k_i(y_1) - k_i(y_2)|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |k_1(y_1) - k_1(y_2)| &= |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \\
 &\leq L|y_1 - y_2|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |k_2(y_1) - k_2(y_2)| &= |f(x + c_2 h, y_1 + h a_{21} k_1(y_1)) - \\
 &\quad - f(x + c_2 h, y_2 + h a_{21} k_1(y_2))| \\
 &\leq L|y_1 + h a_{21} k_1(y_1) - y_2 - h a_{21} k_1(y_2)|
 \end{aligned}$$

$$\leq L \left(|y_1 - y_2| + h |a_{21}| |k_1(y_1) - k_1(y_2)| \right)$$

$$\leq L \left(|y_1 - y_2| + h |a_{21}| L |y_1 - y_2| \right)$$

$$= L(1 + hL |a_{21}|) |y_1 - y_2| = L_2 |y_1 - y_2|$$

$$|k_3(y_1) - k_3(y_2)| = |f(x + c_3 h, y_1 + h a_{31} k_1(y_1) + a_{32} k_2(y_1)) - f(x + c_3 h, y_2 + h a_{31} k_1(y_2) + a_{32} k_2(y_2))|$$

$$\leq L |y_1 + h a_{31} k_1(y_1) + a_{32} k_2(y_1) - y_2 - h a_{31} k_1(y_2) - a_{32} k_2(y_2)|$$

$$\leq L \left(|y_1 - y_2| + h |a_{31}| |k_1(y_1) - k_1(y_2)| \right)$$

$$+ h |a_{32}| |k_2(y_1) - k_2(y_2)| \leq \dots \leq L_3 |y_1 - y_2|$$

Indukcijom slijedi:

$$\begin{aligned}
 & |k_i(y_1) - k_i(y_2)| = \\
 & = |f(x + c_i h, y_1 + h(a_{i1}k_1(y_1) + a_{i2}k_2(y_1) + \dots + a_{i,i-1}k_{i-1}(y_1))) - \\
 & \quad - f(x + c_i h, y_2 + h(a_{i1}k_1(y_2) + a_{i2}k_2(y_2) + \dots + a_{i,i-1}k_{i-1}(y_2))))| \\
 & \leq \dots \\
 & \leq L_i |y_1 - y_2|
 \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
 |\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| & \leq \sum_{i=1}^s |\omega_i| |k_i(y_1) - k_i(y_2)| \\
 & \leq \sum_{i=1}^s |\omega_i| L_i |y_1 - y_2| = M |y_1 - y_2|
 \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali:

Teorem

Ako f zadovoljava Lipschitzov uvjet onda i eksplicitna Runge-Kuttina metoda zadovoljava Lipschitzov uvjet.

- Što s implicitnim metodama?
- Do sada su spomenute samo eksplicitne.
- Implicitne metode su kompliciranije. Treba rješavati nelinearni sustav!
- Postoji li rješenje?
- Zašto koristiti kompliciraniju metodu?
- Kruti (stiff) problemi i A-stabilnost.
- Nekoliko rezultata o egzistenciji rješenja i konvergenciji.

Teorem

Neka f zadovoljava Lipschitzov uvjet:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

i neka je $a = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Tada za $h < 1/(La)$ sustav jednažbi

$$k_i = f\left(x + c_i, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right), \quad i = 1, \dots, s$$

ima jedinstveno rješenje a niz generiran s

$$k_i^{(n+1)} = f\left(x + c_i, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j^{(n)}\right), \quad i = 1, \dots, s$$

konvergira prema tom rješenju.

Dokaz. Sustav možemo zapisati kao

$$\mathbf{k} = F(\mathbf{k}).$$

Pokazat ćemo da je F kontrakcija.

$$\begin{aligned} |(F(\mathbf{k}^1) - F(\mathbf{k}^2))_i| &= \left| f\left(x + c_i, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j^1\right) \right. \\ &\quad \left. - f\left(x + c_i, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j^2\right) \right| \\ &\leq Lh \left| \sum_{j=1}^s a_{ij} (k_j^1 - k_j^2) \right| \leq Lh \sum_{j=1}^s |a_{ij}| |k_j^1 - k_j^2| \\ &\leq Lh \sum_{j=1}^s |a_{ij}| \|k_j^1 - k_j^2\|_\infty \leq Lha \|k_j^1 - k_j^2\|_\infty \end{aligned}$$

Dakle,

$$\| (F(\mathbf{k}^1) - F(\mathbf{k}^2)) \|_{\infty} \leq Lha \| \mathbf{k}_j^1 - \mathbf{k}_j^2 \|_{\infty}$$

gdje je $Lha < 1$.

\Rightarrow uz $F(\mathbb{R}^s) \subset \mathbb{R}^s$, F je kontrakcija.

\Rightarrow postoji jedinstvena fiksna točka $\mathbf{k} = F(\mathbf{k})$ i jednostavne iteracije

$$\mathbf{k}^{(n+1)} = F(\mathbf{k}^{(n)})$$

konvergiraju prema njoj.



Još je ostalo pitanje konvergencije implicitnih RK metoda.

Teorem

Ako f zadovoljava Lipshitzov uvjet

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

i neka za $a = \max_i \sum_j |a_{ij}|$. vrijedi $h < 1/(La)$, tada i RK metoda zadovoljava Lipshitzov uvjet.

Dokaz.

$$k_i(y) = f\left(x + c_i, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j(y)\right), \quad i = 1, \dots, s$$

$$\begin{aligned} |k_i(y_1) - k_i(y_2)| &= \left| f\left(x + c_i, y_1 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j(y_1)\right) - \right. \\ &\quad \left. - f\left(x + c_i, y_2 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j(y_2)\right) \right| \\ &\leq L \left| y_1 - y_2 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} (k_j(y_1) - k_j(y_2)) \right| \\ &\leq L |y_1 - y_2| + Lh \sum_{j=1}^s |a_{ij}| |k_j(y_1) - k_j(y_2)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |k_i(y_1) - k_i(y_2)| &\leq L|y_1 - y_2| + Lh \sum_{j=1}^s |a_{ij}| |k_j(y_1) - k_j(y_2)| \\ &\leq L|y_1 - y_2| + Lh \sum_{j=1}^s |a_{ij}| \max_j |k_j(y_1) - k_j(y_2)| \\ &\leq L|y_1 - y_2| + Lha \max_j |k_j(y_1) - k_j(y_2)| \end{aligned}$$

Sada je

$$\max_i |k_i(y_1) - k_i(y_2)| \leq L|y_1 - y_2| + Lha \max_j |k_j(y_1) - k_j(y_2)|$$

odnosno ($Lha < 1$)

$$\max_i |k_i(y_1) - k_i(y_2)| \leq \frac{L}{1 - Lha} |y_1 - y_2|.$$

RK metoda sada zadovoljava

$$\begin{aligned} |\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| &= \left| \sum_i \omega_i (k_i(y_1) - k_i(y_2)) \right| \\ &\leq \sum_i |\omega_i| |k_i(y_1) - k_i(y_2)| \\ &\leq \sum_i |\omega_i| \max_i |k_i(y_1) - k_i(y_2)| \\ &\leq \sum_i |\omega_i| \frac{L}{1 - Lha} |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$



Runge–Kutta–Fehlbergove metode.

Određivanje koraka integracije.

Do sada smo pretpostavljali da je korak integracije h konstantan.

Očito je da se h može mijenjati u svakom koraku integracije:

$$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(x_i, y_i, h_i).$$

Cilj: odrediti duljinu koraka h_i tako da bude postignuta neka unaprijed zadana točnost ε .

Neka su Φ i $\bar{\Phi}$ zadane dvije metode reda p i $p + 1$.

Tada računamo aproksimacije

$$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(x_i, y_i, h_i),$$

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h_i \bar{\Phi}(x_i, y_i, h_i).$$

Tada je:

$$y(x_i + h_i) = y(x_i) + h_i \Phi(x_i, y(x_i), h_i) + C(x_i) h_i^{p+1} + \mathcal{O}(h_i^{p+2}),$$

$$y(x_i + h_i) = y(x_i) + h_i \bar{\Phi}(x_i, y(x_i), h_i) + \mathcal{O}(h_i^{p+2}).$$

Cilj je da pogreška u i -tom koraku bude manja od ε .

Stoga ćemo pretpostaviti da je aproksimacija y_i za $y(x_i)$ tačna, tj. $y_i = y(x_i)$.

Oduzimanjem ove dvije jednačbe slijedi

$$h_i[\Phi(x_i, y_i, h_i) - \bar{\Phi}(x_i, y_i, h_i)] = C(x_i)h_i^{p+1} + \mathcal{O}(h_i^{p+2}).$$

Iz prve dvije jednakosti oduzimanjem slijedi

$$h_i[\Phi(x_i, y_i, h_i) - \bar{\Phi}(x_i, y_i, h_i)] = \bar{y}_{i+1} - y_{i+1},$$

te uvrštavanjem u prvu jednačbu dobivamo

$$y_{i+1} - \bar{y}_{i+1} = C(x_i)h_i^{p+1} + \mathcal{O}(h_i^{p+2}).$$

Zanemarivanjem viših članova u razvoju pogreške, dobivamo

$$y_{i+1} - \bar{y}_{i+1} \approx C(x_i)h_i^{p+1}$$

i

$$y_i - \bar{y}_i \approx C(x_{i-1})h_{i-1}^{p+1}.$$

Uz pretpostavku da se član $C(x)$ u pogrešci ne mijenja brzo, tj. $C(x_i) \approx C(x_{i-1})$, uvjet da pogreška u i -tom koraku bude manja od ε sada glasi:

$$\varepsilon \geq |y(x_{i+1}) - y_{i+1}| \approx |C(x_i)h_i^{p+1}| \approx |C(x_{i-1})h_i^{p+1}| \approx \left| \frac{\bar{y}_i - y_i}{h_{i-1}^{p+1}} \right| h_i^{p+1},$$

odnosno

$$h_i^{p+1} \leq h_{i-1}^{p+1} \frac{\varepsilon}{|\bar{y}_i - y_i|}.$$

Iz ovoga slijedi da za novi korak trebamo izabrati

$$h_i = h_{i-1} \rho^{p+1} \sqrt{\frac{\varepsilon}{|\bar{y}_i - y_i|}}.$$

Ukoliko je prethodni korak bio uspješan, tada je zadovoljeno

$$|\bar{y}_i - y_i| \leq \varepsilon,$$

te je stoga $h_i \geq h_{i+1}$.

Ako gornja nejednakost ne vrijedi, $(i - 1)$ -vi korak treba ponoviti uz manji h_{i-1} .

To se obično radi samo ako je nejednakost značajnije narušena, npr. ako je $|\bar{y}_i - y_i| > 2\varepsilon$.

Izbor koraka možemo modificirati, tako da zahtijevamo da je pogreška u svakom koraku proporcionalna koraku integracije, tj. da je manja od $h_i \varepsilon$.

Uvrštavanjem ovog zahtjeva dobivamo izbor:

$$h_i = h_{i-1} \sqrt[p]{\frac{\varepsilon h_{i-1}}{|\bar{y}_i - y_i|}}.$$

Sljedeća modifikacija koristi korigirajući faktor α :

$$h_i = \alpha h_{i-1} \sqrt[p]{\frac{\varepsilon h_{i-1}}{|\bar{y}_i - y_i|}},$$

koji služi da ispravi pogrešku nastalu odbacivanjem viših članova u ocjeni pogreške. Obično je $\alpha = 0.9$.

Prikazani izbor koraka vrijedi za bilo koji par jednokoračnih metoda reda p i $p + 1$.

Primjena Runge–Kutta metoda zahtijevala bi

- jednu metodu sa s stadija
- jednu sa $s + 1$ stadija
- funkciju f treba računati $2s + 1$ puta.

Može jednostavnije.

Prvih s stadija iz k_1, \dots, k_s, k_{s+1} , korištenih za računanje funkcije prirasta $\bar{\Phi}$ iskoristimo za računanje funkcije Φ :

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{i=1}^s \omega_i k_i(x, y, h),$$

$$\bar{\Phi}(x, y, h) = \sum_{i=1}^{s+1} \bar{\omega}_i k_i(x, y, h).$$

Sada u svakom koraku funkciju f računamo samo $s + 1$ puta.

Ovu ideju ćemo ilustrirati na paru Runge–Kutta metoda reda 2 i 3.

Promatramo metode s 3 i 4 stadija:

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{i=1}^3 \omega_i k_i(x, y, h),$$

$$\bar{\Phi}(x, y, h) = \sum_{i=1}^4 \bar{\omega}_i k_i(x, y, h).$$

Da bi metoda definirana s $\bar{\Phi}$ bila reda 3 treba biti zadovoljiti 4 jednačbe s 10 koeficijenata.

Metoda reda 2 s 3 stadija ima 3 dodatna koeficijenta (ω_1 , ω_2 i ω_3) i treba zadovoljavati 2 dodatna uvjeta

Ukupno, 13 koeficijenata u ovom paru metoda treba zadovoljavati 6 uvjeta.

Preostalih 7 stupnjeva slobode iskoristit ćemo za smanjivanje broja računanja funkcije f .

Zahtijevat ćemo da $k_4(x_i, y_i, h_i, f)$, zadnji stadij iz računanja $\bar{\Phi}$ u i -tom koraku, iskoristimo kao $k_1(x_{i+1}, y_{i+1}, h_{i+1}, f)$, prvi stadij u $(i + 1)$ -om koraku:

$$\begin{aligned} f(x + c_4 h_i, y_i + h_i(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)) &= f(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ &= f(x_i + h_i, y_i + h_i\Phi(x_i, y_i, h_i, f)) \\ &= f(x_i + h_i, y_i + h_i(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \omega_3 k_3)). \end{aligned}$$

Odavde slijede dodatna 3 uvjeta:

$$a_{41} = \omega_1, \quad a_{42} = \omega_2, \quad a_{43} = \omega_3.$$

Uvjet $c_4 = 1$ automatski je ispunjen zbog

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1.$$

Jedno od rješenja ovog sustava jednačbi je prikazano u sljedećoj tablici.

i	c_i	a_{ij}			ω_j	$\bar{\omega}_j$
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$		
1	0				$\frac{214}{891}$	$\frac{533}{2106}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{33}$	0
3	$\frac{27}{40}$	$-\frac{189}{800}$	$\frac{729}{800}$		$\frac{650}{891}$	$\frac{800}{1053}$
4	1	$\frac{214}{891}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{650}{891}$		$-\frac{1}{78}$

Apsolutna stabilnost

Krute jednačbe

Primjer. Rješenje inicijalnog problema

$$y' = -2yx, \quad y(0) = 1$$

je $y(x) = e^{-x^2}$.

Uočimo da je

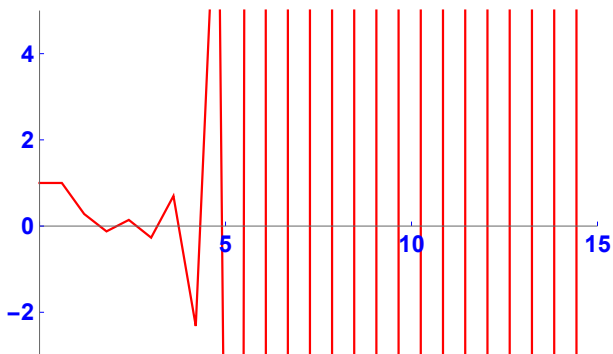
$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$$

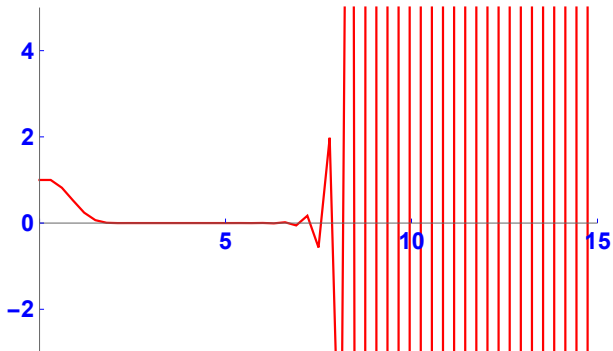
Isto svojstvo očekujemo i od numeričke aproksimacije.

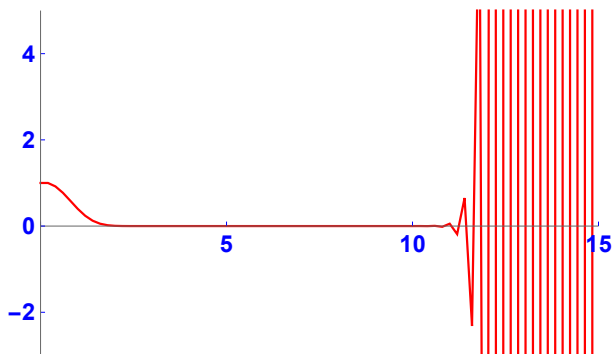
Obratite pažnju na Lipschitzov uvjet:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = 2|x||y_1 - y_2|.$$

Za veliki x i L je velik.

Eulerova metoda $n = 25$ 

Eulerova metoda $n = 50$ 

Eulerova metoda $n = 75$ 

U ovom primjeru:

- povećanjem n -a metoda je sve točnija.
- To je u skladu s konvergentnošću metode.
- U jednom trenutku pogreška 'eksplodira'.
- Pogreška naglo poraste iako je funkcija 'pitoma' (e^{-x^2})

Cilj nam je objasniti ovakvo ponašanje. I eventualno riješiti problem.

Apsolutna stabilnost Eulerove metode

Da bismo bolje razumjeli uzrok ovakve nestabilnosti, razmotrimo jednostavniji problem: primjena Eulerove metode na inicijalni problem

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0,$$

gdje je λ konstanta.

Za Eulerovu metodu je

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1 + h\lambda)y_i.$$

Zbog toga imamo

$$y_0 = y_0 \quad (\text{inicijalni uvjet})$$

$$y_1 = (1 + h\lambda)y_0$$

$$y_2 = (1 + h\lambda)y_1 = (1 + h\lambda)^2 y_0$$

.....

$$y_i = (1 + h\lambda)y_{i-1} = (1 + h\lambda)^i y_0$$

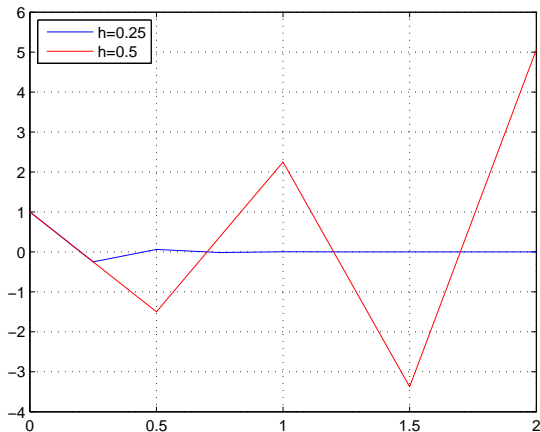
Kada je $\lambda < 0$, egzaktno rješenje $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$ zadovoljava $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$.

- Aproksimacija rješenja dobivena Eulerovom metodom $y_i = (1 + \lambda h)^i y_0$ također se približava ka $y = 0$ samo ako je $|1 + \lambda h| < 1$, tj. $\lambda h \in \langle -2, 0 \rangle$.
- Kada je $1 + \lambda h < -1$, aproksimacija će ispoljiti rastuće oscilacije oko $y = 0$.

Sljedeća slika prikazuje aproksimacije rješenja dobivene Eulerovom metodom inicijalnog problema

$$y' = -5y, \quad y(0) = 1$$

za $h = 0.25$ i $h = 0.5$.



$$\lambda h = -5 \cdot 0.25 = -1.25 \in \langle -2, 0 \rangle$$

$$\lambda h = -5 \cdot 0.5 = -2.5 \notin \langle -2, 0 \rangle$$

Interval apsolutne stabilnosti

Na temelju prethodnih razmatranja možemo dati sljedeću definiciju.

Definicija

Interval apsolutne stabilnosti numeričke metode je interval vrijednosti λh za koje se aproksimacija y_i rješenja $y(x_i) = y_0 e^{\lambda x_i}$ jednačbe $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$ približava nuli kada $i \rightarrow \infty$ (λ je svojstvena vrijednost matrice A).

Pristup se može i malo proširiti.

Ako promatramo sustav diferencijalnih jednačbi:

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0,$$

vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \quad \forall y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall i.$$

Definicija

Područje apsolutne stabilnosti numeričke metode je područje vrijednosti λh za koje se aproksimacija y_i rješenja $y(x_i) = y_0 e^{Ax_i}$ jednačbe $y' = Ay$, $y(0) = y_0$, približava nuli kada $i \rightarrow \infty$.

Primjer. Za Eulerovu metodu je uvjet stabilnosti bio

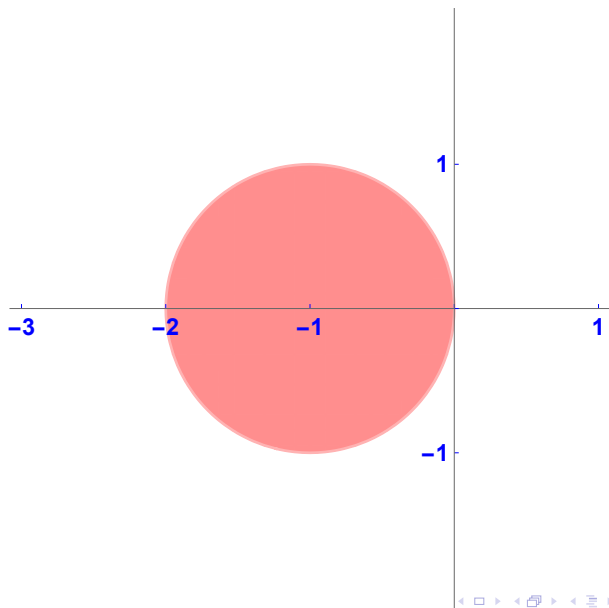
$$|1 + \lambda h| < 1$$

pa je područje stabilnosti

$$|1 + z| < 1,$$

krug radijusa 1 sa središtem u -1 .

Područje stabilnosti za Eulerovu metodu.



Kada se jednokoračna metoda primjeni na testni problem $y' = Ax$, korak je oblika:

$$y + h\Phi(x, y; h) = \varphi(Ah)y.$$

φ - **funkcija stabilnosti** (*stability function*)

Jer je

$$y_{i+1} = \varphi(Ah)y_i = \dots = \left(\varphi(Ah)\right)^{n+1} y_0,$$

uvjet stabilnosti je

$$\lim_i y_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\varphi(Ah)| < 1.$$

Područje apsolutne stabilnosti je skup:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\varphi(z)| < 1\}.$$

Definicija

Za jednokoračnu metodu kažemo da je **A-stabilna (apsolutno stabilna)** ako je funkcija stabilnosti φ pridružena funkciji prirasta Φ definirana na lijevoj strani kompleksne ravnine i zadovoljava

$$|\varphi(z)| < 1 \quad \text{za sve } z \text{ za koje je } \operatorname{Re} z < 0.$$

Ako je red metode p tada je

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y; h) = \mathcal{O}(h^p)$$

odnosno

$$y(x+h) - y(x) - h\Phi(x, y; h) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

U terminima funkcije stabilnosti uz $y(x+h) = y(x)e^{Ah}$:

$$\left[e^{Ah} - \varphi(Ah) \right] y(x) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Dakle, za metodu reda p je

$$e^z = \varphi(z) + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Ideja koncepta apsolutne stabilnosti je zahtjev da ako je diferencijalna jednadžba

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

stabilna:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0, \quad \forall y_0$$

tada i numerička aproksimacija treba zadovoljavati

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0.$$

Ukoliko je f Dahlquistova test funkcija Ay , diferencijalna jednadžba

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0$$

je stabilna ako i samo ako svojstvene vrijednosti λ zadovoljavaju

$$\operatorname{Re} \lambda < 0.$$

Krute (*stiff*) jednačbe

- Ne postoji striktna definicija krute jednačbe.
- Ako jedna ili više svojstvenih vrijednosti matrice A iz $y' = Ay$ su negativne i $|\lambda| \gg 1$ i po veličini odskaku od ostalih svojstvenih vrijednosti.
- Ukoliko je $f(x, y)$ nelinearna funkcija, to se odnosi na Jacobijevu matricu.
- Svojstvena vrijednost $\lambda < 0$ i $|\lambda| \gg 1$ odgovara procesu koji se brzo prigušuje ($e^{-|\lambda|x}$).
- U numeričkoj metodi je brzina prigušavanja $|\varphi(\lambda h)|^i$.
- To može biti i rast, potpuno obrnuto ponašanje.
- U primjenama, $|\lambda|$ može biti iznimno velik.
- Veliki $|\lambda|$ zahtjeva mali korak h u metodi. Značajno usporava metodu iako je pripadno egzaktno rješenje 'dobro' (npr. $e^{-|\lambda|x}$).

Apsolutna stabilnost Runge–Kuttinih metoda

Područje apsolutne stabilnosti za Runge–Kutta metode može se naći na sličan način kao kod Eulerove metode.

Nađimo područje apsolutne stabilnosti za RK metodu sa 2 stadija: modificiranu Eulerovu metodu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))].$$

Kako je $f(x_i, y_i) = \lambda y_i$ imamo

$$y_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2\right) y_i.$$

Područje apsolutne stabilnosti:

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2\right| < 1 \quad \text{tj.} \quad \left|1 + z + \frac{1}{2}z^2\right| < 1.$$

Interval apsolutne stabilnosti ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$1 + z + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}(z + 1)^2 + \frac{1}{2}$$

Gornji uvjet na z je ekvivalentan $|z + 1| < 1$.

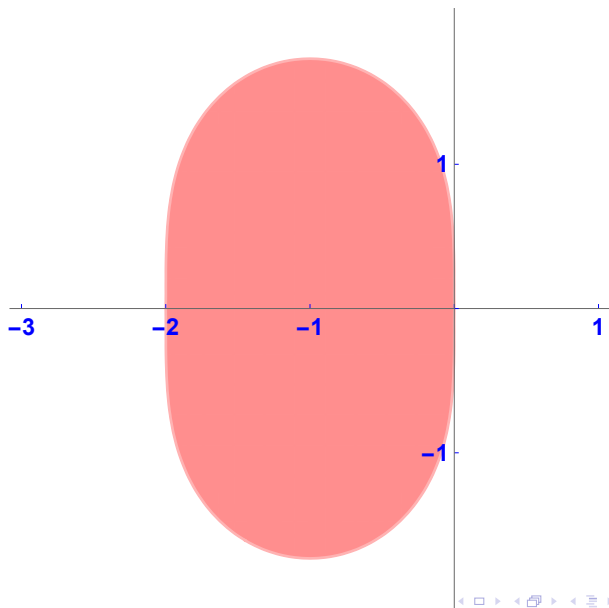
Interval apsolutne stabilnosti za modificiranu Eulerovu metodu jednak

$$\lambda h \in \langle -2, 0 \rangle,$$

kao i za Eulerovu metodu.

Područje apsolutne stabilnosti je ipak drugačije.

Područje apsolutne stabilnosti za modificiranu Eulerovu metodu.



Za metode iz primjera vidjeli smo:

Eulerova metoda: $\varphi(z) = 1 + z$

Modificirana Eulerova metoda: $\varphi(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2$

Teorem

Za eksplicitne Runge-Kuttine metode funkcija stabilnosti $\varphi(z)$ je polinom.

Dokaz. Jednostavnom indukcijom.

Teorem

Eksplicitne Runge-Kuttine metode nisu A-stabilne.

Dokaz. Funkcija stabilnosti $\varphi(z)$ je polinom.

Polinomi nisu ograničeni za $x \in \mathbb{R}$ i $x < 0$.

Pa ne mogu zadovoljiti

$$|\varphi(x)| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, x < 0$$

pa to ne mogu zadovoljiti niti na \mathbb{C} za $\operatorname{Re} z < 0$. □

Pokazali smo da za metodu reda p funkcija stabilnosti zadovoljava

$$e^z = \varphi(z) + \mathcal{O}(h^{p+1}) = \varphi(z) + \mathcal{O}(z^{p+1})$$

Za eksplicitne RK metode φ je polinom.

$$\Rightarrow \varphi(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p} + \mathcal{O}(z^{p+1}).$$

Za metodu sa s stadija je $\partial\varphi = s$ (broj stadija).

\Rightarrow Ako je $s = p$, φ je Taylorov polinom eksponencijalne funkcije stupnja p .

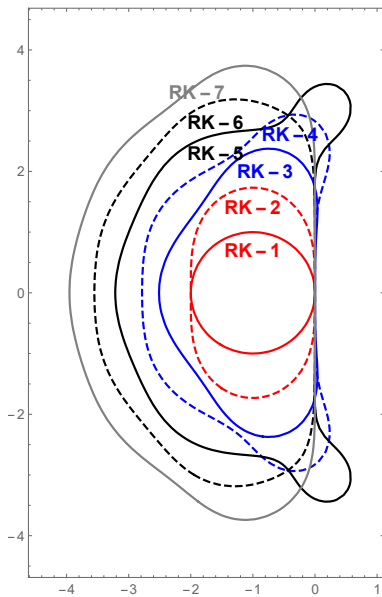
\Rightarrow Sve eksplicitne RK metode istog maksimalnog reda imaju istu funkciju stabilnosti.

Ovo je moguće samo za metode do 4 stadija.

Funkcija stabilnosti i intervali apsolutne stabilnosti

Red metode	$\varphi(z)$	Interval aps. stab.
1	$1 + z$	$\langle -2, 0 \rangle$
2	$1 + z + \frac{1}{2}z^2$	$\langle -2, 0 \rangle$
3	$1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$	$\langle -2.51, 0 \rangle$
4	$1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$	$\langle -2.78, 0 \rangle$

Područja apsolutne stabilnosti za eksplicitne Runge-Kuttine metode.



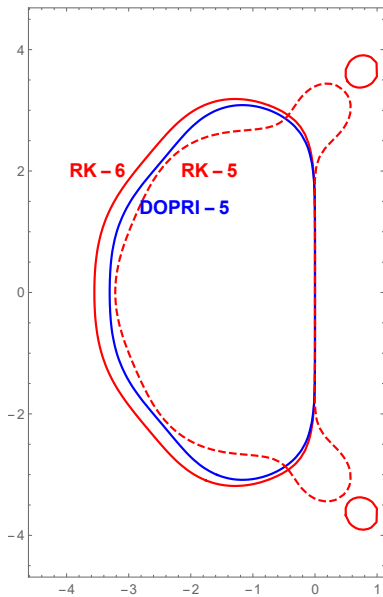
Područja za RK-5, 6 i 7 su ilustrativna.

Nacrtano je područje za $\varphi(z) = \sum_{i=0}^s \frac{z^i}{i!}$.

Npr. Dormand&Prince metoda, $s = 6$, $p = 5$:

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^5 \frac{z^i}{i!} + \frac{z^6}{600}$$

Područja apsolutne stabilnosti za Dormand&Prince metodu (DOPRI5).



Primjeri implicitnih Runge-Kuttinih metoda

Da bismo usporedili eksplicitne i implicitne RK metode trebamo nekoliko primjera implicitnih RK metoda.

Jedan način dobivanja numeričkih metoda za ODJ je primjena integracijskih metoda.

Diferencijalnu jednačbu

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

integriramo:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

i primijenimo neku integracijsku formulu:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx = \mathcal{I}_i = \sum_{j=1}^s w_j f(t_j, y(t_j)).$$

Korištenjem integracijskih metoda dobivamo:

- formula lijevog ruba \rightarrow Eulerova metoda

$$\mathcal{I}_i \approx h f(x_i, y(x_i))$$

- formula desnog ruba \rightarrow implicitna Eulerova metoda

$$\mathcal{I}_i \approx h f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

- formula srednje točke \rightarrow modificirana Eulerova metoda

$$\mathcal{I}_i \approx h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right),$$

pri čemu se koristi aproksimacija

$$y(x_i + h/2) \approx y(x_i) + \frac{h}{2} y'(x_i) = y(x_i) + \frac{h}{2} f(x_i, y(x_i)).$$

- trapezna formula \rightarrow Implicitna trapezna metoda ili Crank–Nicolsonova metoda

$$\mathcal{I}_i \approx \frac{h}{2}(f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1})))$$

Za izvod implicitnih RK metoda mogu se koristiti i Gaussove integracijske formule.

Butcherova tablica za Gaussovu metodu reda 2 (pravilo srednje točke)

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Butcherova tablica za Gaussovu metodu reda 4

$(3-\sqrt{3})/6$	$1/4$	$(3-2\sqrt{3})/12$
$(3+\sqrt{3})/6$	$(3+2\sqrt{3})/12$	$1/4$
	$1/2$	$1/2$

Butcherova tablica za Gaussovu metodu reda 6

$(5-\sqrt{15})/10$	$5/36$	$2/9 - \sqrt{15}/5$	$5/36 - \sqrt{15}/30$
$1/2$	$5/36 + \sqrt{15}/24$	$2/9$	$5/36 - \sqrt{15}/24$
$(5+\sqrt{15})/10$	$5/36 + \sqrt{15}/30$	$2/9 + \sqrt{15}/5$	$5/36$
	$5/18$	$4/9$	$5/18$

Butcherova tablica za Radauovu metodu reda 3

$1/3$	$5/12$	$-1/12$
1	$3/4$	$1/4$
	$3/4$	$1/4$

Butcherova tablica za Radauovu metodu reda 5

$(4-\sqrt{6})/10$	$(88-7\sqrt{6})/360$	$(296-169\sqrt{6})/1800$	$(-2+3\sqrt{6})/255$
$(4+\sqrt{6})/10$	$(296+169\sqrt{6})/1800$	$(88+7\sqrt{6})/360$	$(-2+3\sqrt{6})/255$
1	$(16-\sqrt{6})/36$	$(16+\sqrt{6})/36$	$1/9$
	$(16-\sqrt{6})/36$	$(16+\sqrt{6})/36$	$1/9$

Butcherova tablica za Lobattovu metodu reda 4

0	0	0	0
1/2	1/4	1/4	0
1	0	1	0
	1/6	2/3	1/6

Butcherova tablica za Lobattovu metodu reda 6

0	0	0	0	0
$(5-\sqrt{5})/10$	$(5+\sqrt{5})/60$	$1/6$	$(15-7\sqrt{5})/60$	0
$(5+\sqrt{5})/10$	$(5-\sqrt{5})/60$	$(15+7\sqrt{5})/60$	$1/6$	0
1	$1/6$	$(5-\sqrt{5})/12$	$(5+\sqrt{5})/12$	0
	$1/12$	$5/12$	$5/12$	$1/12$

Butcherova tablica za **eksplicitnu Runge-Kuttinu metodu (ERK)**

c_1	0						
c_2	a_{21}	0					
c_3	a_{31}	a_{32}	0				
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		\ddots		
c_{s-1}	$a_{s-1,1}$	$a_{s-1,2}$	$a_{s-1,3}$	\cdots	$a_{s-1,s-2}$	0	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	\cdots	$a_{s,s-2}$	$a_{s,s-1}$	0
	ω_1	ω_2	ω_3	\cdots	ω_{s-2}	ω_{s-1}	ω_s

Butcherova tablica za **implicitnu Runge-Kuttinu metodu (IRK)**

c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	\cdots	a_{2s}
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	\cdots	a_{3s}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	\cdots	a_{ss}
	ω_1	ω_2	ω_3	\cdots	ω_s

Butcherova tablica za **dijagonalno implicitnu Runge-Kuttinu metodu (DIRK)**

c_1	a_{11}						
c_2	a_{21}	a_{22}					
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}				
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		\ddots		
c_{s-1}	$a_{s-1,1}$	$a_{s-1,2}$	$a_{s-1,3}$	\cdots	$a_{s-1,s-2}$	$a_{s-1,s-1}$	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	\cdots	$a_{s,s-2}$	$a_{s,s-1}$	$a_{s,s}$
	ω_1	ω_2	ω_3	\cdots	ω_{s-2}	ω_{s-1}	ω_s

Butcherova tablica za **jednako dijagonalno implicitnu Runge-Kuttinu metodu (SDIRK)** (singly diagonally implicit RK)

c_1	a							
c_2	a_{21}	a						
c_3	a_{31}	a_{32}	a					
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		\ddots			
c_{s-1}	$a_{s-1,1}$	$a_{s-1,2}$	$a_{s-1,3}$	\cdots	$a_{s-1,s-2}$	a		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	\cdots	$a_{s,s-2}$	$a_{s,s-1}$	a	
	ω_1	ω_2	ω_3	\cdots	ω_{s-2}	ω_{s-1}	ω_s	

Apsolutna stabilnost implicitne trapezne metode

Primjenom trapezne formule na integraciju ODJ dobije se implicitna trapezna metoda

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})).$$

Metoda je implicitna jer se y_{i+1} nalazi i na lijevoj i na desnoj strani jednačbe.

- U svakoj iteraciji rješava se gornji problem nekom od metoda za numeričko rješavanje nelinearnih jednačbi, npr. Newtonovom metodom sa fiksnim brojem iteracija.
- Pokazano je da i jednostavne iteracije konvergiraju za implicitnu RK metodu kada je h dovoljno malen (i da postoji rješenje jednačbe).
- Implicitna trapezna metoda je reda 2 jer je takva točnost i trapezne integracijske formule.

Područje apsolutne stabilnosti.

Uvrštavamo $f(x, y) = \lambda y$ u jednačbu implicitne trapezne metode:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(\lambda y_i + \lambda y_{i+1}) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}h\lambda\right) y_i + \frac{1}{2}h\lambda y_{i+1},\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\left(1 - \frac{1}{2}h\lambda\right) y_{i+1} = \left(1 + \frac{1}{2}h\lambda\right) y_i,$$

Odnosno

$$y_{i+1} = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda} y_i.$$

Funkcija stabilnosti je

$$\varphi(z) = \frac{2+z}{2-z}.$$

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{2+z}{2-z} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |2+z| < |2-z|$$

Područje apsolutne stabilnosti je $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z < 0\}$

Metoda je apsolutno stabilna.

Apsolutna stabilnost implicitne Eulerove metode

Implicitna Eulerova metoda

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Područje apsolutne stabilnosti.

Uvrstimo $f(x, y) = \lambda y$ u jednačbu implicitne Eulerove metode:

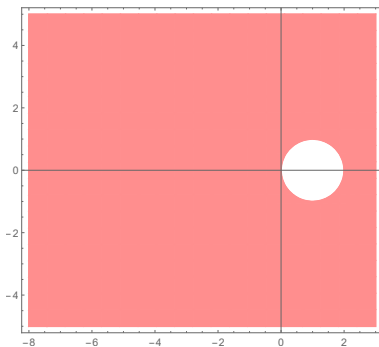
$$y_{i+1} = y_i + h \lambda y_{i+1}$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_i.$$

Funkcija stabilnosti je

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

Područja apsolutne stabilnosti za implicitnu Eulerovu metodu.



Metoda je apsolutno stabilna.

Krute jednačbe (sustavi)

Implicitne metode su efikasnije za rješavanje krutih (“stiff”) jednačbi (sustava).

- Kruta jednačba (*stiff*): $\lambda < 0$ i $|\lambda| \gg 1$
- Primjenom numeričke metode na krutu jednačbu veći utjecaj na veličinu koraka h_i ima interval apsolutne stabilnosti nego uvjet na održavanje male lokalne pogreške diskretizacije.
- Takve jednačbe se teško rješavaju pomoću eksplicitnih Runge–Kutta metoda jer zahtijevaju puno vrlo sitnih koraka (kao npr. za jednačbu $y' = \lambda y$, $\lambda < 0$ kada je $|\lambda|$ velik), dok za implicitnu trapeznu metodu to nije slučaj.

Primjer apsolutne stabilnosti metoda

Rješavamo inicijalni problem

$$\begin{aligned}y'(x) &= -100(y(x) - \cos x) - \sin x, \quad x \in [0, 1], \\y(0) &= 1,\end{aligned}$$

Ako napravimo transformaciju varijable:

$$z = y - \cos(x)$$

tada se gornji problem transformira u:

$$\begin{aligned}z'(x) &= -100z, \quad x \in [0, 1], \\z(0) &= 0.\end{aligned}$$

Egzaktno rješenje ovog problema je $z = 0$, a rješenje originalnog problema je $y = \cos(x)$.

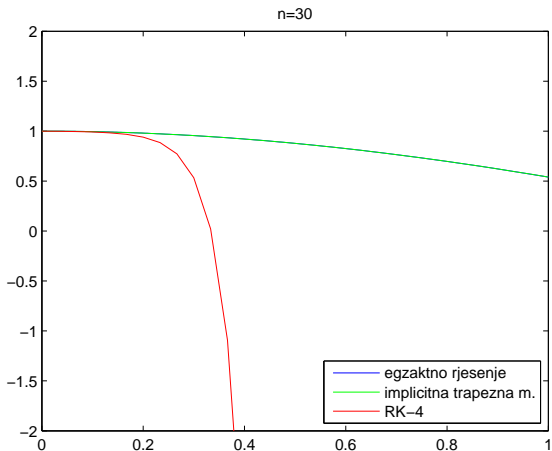
Originalni problem rješavat ćemo

- klasičnom Runge–Kutta metodom (RK-4)
- implicitnom trapeznom metodom

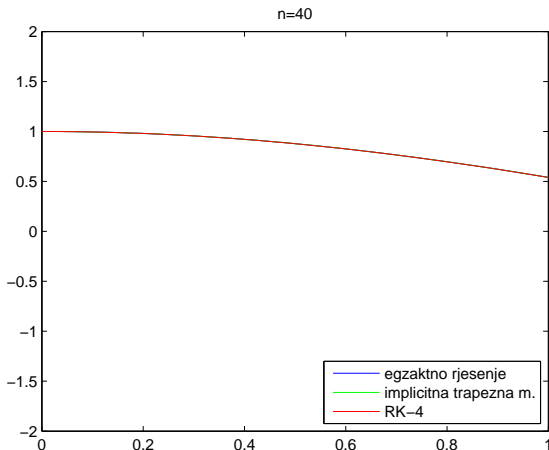
Vidimo da na transformirani problem (pa onda i na originalni) možemo primijeniti prethodna razmatranja, što znači da

- klasična Runge–Kutta metoda će biti apsolutno stabilna za $100h = 100/n < 2.78$
- implicitna trapezna metoda će biti apsolutno stabilna za sve h , odnosno n .

Sljedeće slike nam potvrđuju ove pretpostavke.



Apromksimacije dobivene RK-4 metodom i implicitnom trapeznom metodom za $n = 30$. U ovom slučaju je $100/30 = 3.33 > 2.78$ pa RK-4 nije stabilna.



Aproksimacije dobivene RK-4 metodom i implicitnom trapeznom metodom za $n = 40$. U ovom slučaju je $100/40 = 2.5 < 2.78$ pa je RK-4 stabilna.

Funkcija stabilnosti za

implicitnu Eulerovu metodu: $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$

implicitnu trapeznu metodu: $\varphi(z) = \frac{2+z}{2-z}$

Funkcija stabilnosti je racionalna funkcija.

To vrijedi za sve implicitne RK metode.

Teorem

Funkcija stabilnosti za implicitne Runge-Kuttine metode sa s stadija je racionalna funkcija

$$\varphi(z) = \frac{P_s(z)}{Q_s(z)}$$

gdje su P_s i Q_s polinomi stupnja manjeg ili jednakog od s .

Dokaz. U

$$k_i = f \left(x + c_i, y + h \sum_{i=1}^s a_{ij} k_j \right), \quad i = 1, \dots, s$$

uvrstimo test funkciju iz $y' = \lambda y$, tj. $f(x, y) = \lambda y$:

$$k_i = \lambda y + \lambda h \sum_{i=1}^s a_{ij} k_j.$$

Uvedimo vektorsku notaciju:

$$k = [k_1, \dots, k_s]^T, \quad A = [a_{ij}], \quad \mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T.$$

Jednadžba glasi

$$k = \lambda y \mathbf{1} + h \lambda A k$$

k je dan s:

$$k = \lambda y(I - h\lambda A)^{-1}\mathbf{1}$$

Označimo

$$\omega = [\omega_1, \dots, \omega_s]^T.$$

Jedan korak IRK metode je

$$\begin{aligned}y + h\Phi &= y + h \sum_{j=1}^s \omega_j k_j = y + h \langle k, \omega \rangle \\ &= y + h \langle \lambda y(I - h\lambda A)^{-1}\mathbf{1}, \omega \rangle \\ &= \left[\mathbf{1} + \lambda h \langle (I - h\lambda A)^{-1}\mathbf{1}, \omega \rangle \right] y\end{aligned}$$

Funkcija stabilnosti:

$$\varphi(z) = 1 + z \langle (I - zA)^{-1} \mathbf{1}, \omega \rangle$$

Matrica $B = (I - zA)$ na (i, j) -tom elementu je polinom 1. stupnja.

Jer je

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det B_{ij}}{\det B},$$

$\det B$ je polinom stupnja s , $\det B_{ij}$ je polinom stupnja $s - 1$

$\Rightarrow b_{ij}$ je racionalna funkcija.

Brojnik je stupnja $s - 1$ a nazivnik stupnja s .

$\langle (I - zA)^{-1} \mathbf{1}, \omega \rangle$ je također racionalna funkcija s istim stupnjem brojnika i nazivnika kao i b_{ij} .

$1 + z \langle (I - zA)^{-1} \mathbf{1}, \omega \rangle$ je racionalna funkcija.

Brojnik je stupnja s a nazivnik stupnja s .

Već smo koristili da je za metodu reda p

$$e^z = \varphi(z) + \mathcal{O}(z^{p+1}).$$

Racionalna funkcija s brojnikom i nazivnikom stupnja s koja najbolje aproksimira eksponencijalnu funkciju je **Padéov aproksimant** $[s, s]$ funkcije e^z :

$$e^z = [s, s] + \mathcal{O}(z^{2s+1}).$$

Odavdje možemo zaključiti:

- Najveći mogući red IRK metode sa s stadija je $2s$.
- Ukoliko je red IRK metode $2s$ onda je njezina funkcija stabilnosti Padéov aproksimant $[s, s]$ funkcije e^z .

Teorem

Ako je funkcija stabilnosti jednokoračne metode Padéov aproksimant $[n, n]$ funkcije e^z ili Padéov aproksimant $[n, n + 1]$ funkcije e^z , $n = 0, 1, 2, \dots$ tada je metoda A-stabilna.

Teorem (Butcher 1964, Ehle 1968)

Gaussova metoda sa s stadija je reda $2s$. Njezina funkcija stabilnosti je Padéov aproksimant $[s, s]$ i metoda je A-stabilna.

Napomena. Red metode direktno slijedi iz reda Gauss-Legendreovih integracijskih formula.

Pokazali smo da ako je red $2s$ da funkcija stabilnosti mora biti $[s, s]$.

A-stabilnost slijedi iz teorema.

Teorem

Radauove metode sa s stadija tipa IA i IIA su reda $2s - 1$. Njihova funkcija stabilnosti je Padéov aproksimant $[s - 1, s]$ i obje metode su A-stabilne.

Napomena.

Radau IA - $c_0 = 0$.

Radau IIA - $c_s = 1$.

Teorem

Lobattove metode sa s stadija tipa IIIA, IIIB i IIIC su reda $2s - 2$. Funkcija stabilnosti za IIIA i IIIB metodu je Padéov aproksimant $[s - 1, s - 1]$. Funkcija stabilnosti za IIIC metodu je Padéov aproksimant $[s - 2, s]$. Sve tri metode su A-stabilne.

Napomena.

Lobatto: $c_0 = 0$ i $c_s = 1$

Lobatto IIIA - $a_{1j} = 0$. Prvi redak u Butcherovoj tablici je 0.
($k_1 = f(x, y)$ je eksplicitno zadan)

Lobatto IIIB - $a_{is} = 0$. Zadnji stupac u Butcherovoj tablici je 0. (k_s je eksplicitno zadan)

Lobatto IIIC - $a_{ij} \neq 0$.

L-stabilnost

Za jednokoračne metode na test problemu je:

$$y_{i+1} = [\varphi(\lambda h)]^n y_0$$

i za A-stabilne metode je

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$$

kada je $\lambda < 0$.

Iako je $|\varphi(z)| < 1$ ova konvergencija može biti spora kada je $|\varphi(z)| \approx 1$.

Tako je za implicitnu trapeznu metodu

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{2+z}{2-z} = 1$$

dok je za implicitnu Eulerovu metodu

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-z} = 0.$$

Ovo znači da će za velike vrijednosti z (tj. λh) y_i puno brže ići u 0 kod implicitne Eulerove metode nego kod implicitne trapezne metode (iako je implicitna trapezna metode većeg reda).

Primjer.

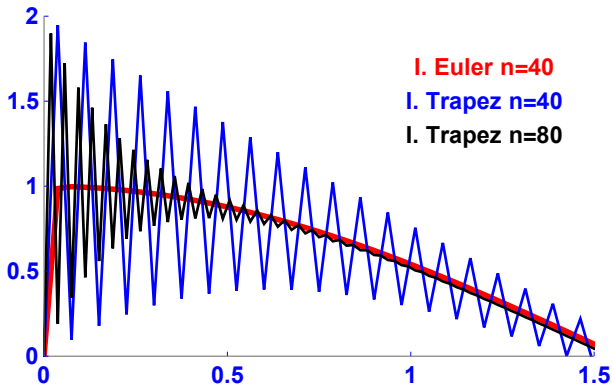
Rješavamo inicijalni problem

$$\begin{aligned}y'(x) &= -2000(y(x) - \cos x) - \sin x, & x \in [0, 1.5], \\y(0) &= 0,\end{aligned}$$

Egzaktno rješenje je

$$y = \cos(x) - e^{-2000x}.$$

Usporedba implicitne Eulerove metode i implicitne trapezne metode



Definicija (Ehle, 1969)

Metodu nazivamo **L-stabilna** ukoliko je A-stabilna i njezina funkcija stabilnosti zadovoljava

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = 0.$$

Napomena. Iako je interesantno samo kada je $z < 0$, vrijedi

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(z) = 0.$$

IRK metode kod kojih je stupanj brojnika jednak stupnju nazivnika u funkciji stabilnosti nisu L-stabilne.

Npr., za Gaussove metode (koje su najvećeg mogućeg reda) je funkcija stabilnosti $\varphi(z) = [s, s]$ i

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |\varphi(z)| = 1.$$

Ovo slijedi iz svojstava Padéovih aproksimanata funkcije e^z .

Radauove metode su L-stabilne ($\varphi(z) = [s - 1, s]$).

Lobattova metoda tipa III C je L-stabilna ($\varphi(z) = [s - 2, s]$).

Linearne višekoračne metode

Kod jednokoračnih metoda je za aproksimaciju y_{i+1} u točki x_{i+1} bilo potrebno poznavanje samo aproksimacije y_i u točki x_i :

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x, y, h).$$

Promatrajmo ponovno diferencijalnu jednadžbu

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Integracijom, te primjenom formule srednje točke za aproksimaciju integrala, slijedi da je

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \\ &\approx 2hf(x_i, y(x_i)). \end{aligned}$$

Prethodna formula vodi na rekurzivno definiranu aproksimaciju

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i).$$

- U ovoj metodi za određivanje vrijednosti y_{i+1} trebamo poznavati prethodne vrijednosti y_i i y_{i-1} , a budući da je se radi o dvije točke, govorimo o dvokoračnoj metodi.
- Aproksimacija y_{i+1} zadana je eksplicitno s izrazom na desnoj strani, pa govorimo o eksplicitnoj metodi.

Ako umjesto formule srednje točke pri računanju integrala primijenimo Simpsonovu formulu, dobivamo drugu aproksimaciju:

$$\begin{aligned}y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \\ &\approx \frac{h}{3} [f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 4f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))],\end{aligned}$$

što vodi na metodu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} [f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Ovdje se y_{i+1} javlja i na lijevoj strani i na desnoj strani kao argument funkcije f . Dakle, y_{i+1} je zadan implicitno, pa govorimo o implicitnoj dvokoračnoj metodi.

Uočimo da gornjim formulama ne možemo odrediti y_1 , pa za njegovo određivanje treba upotrebiti jednu od jednokoračnih metoda.

Adams-Bashforth-Moultonova metoda

Definicija opće višekoračne metode

Općenito, linearne višekoračne metode su oblika

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^r \beta_j f_{i+1-j},$$

gdje je $f_k = f(x_k, y_k)$, $\alpha_0 \neq 0$ i $|\alpha_r| + |\beta_r| \neq 0$.

- Ovu metodu zovemo r -koračna metoda.
- Ukoliko je $\beta_0 = 0$ metoda je eksplicitna,
- a za $\beta_0 \neq 0$ metoda je implicitna.

Uočimo da prikaz višekoračne metode pomoću koeficijenata α_j i β_j nije jedinstven.

Često se koristi normalizacija $\alpha_0 = 1$ te je zapis metode oblika:

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^r \alpha_j y_{i+1-j} = \beta_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=1}^r \beta_j f_{i+1-j}.$$

Primjenom različitih integracijskih metoda možemo dobiti cijeli niz višekoračnih metoda.

Integracijom jednadžbe $y'(x) = f(x, y(x))$ na nekom zadanom intervalu $[x_{p-j}, x_{p+k}]$ dobivamo

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) = \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} f(t, y(t)) dt.$$

Integral aproksimiramo kao u Newton-Cotesovim formulama.

Podintegralnu funkciju $f(t, y(t))$ zamijenimo interpolacijskim polinomom P_q stupnja q koji interpolira $f(t, y(t))$ u točkama x_i :

$$P_q(x_i) = y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)), \quad i = p, p-1, \dots, p-q,$$

Lagrangeova forma:

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^q f(x_{p-i}, y(x_{p-i})) L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{x - x_{p-l}}{x_{p-i} - x_{p-l}}.$$

Dobivamo izraz

$$\begin{aligned} y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) &\approx \sum_{i=0}^q f(x_{p-i}, y(x_{p-i})) \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(t) dt \\ &= h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f(x_{p-i}, y(x_{p-i})), \end{aligned}$$

gdje je

$$\beta_{qi} = \frac{1}{h} \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(t) dt = \int_{-j}^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds, \quad i = 0, \dots, q.$$

Zamjenom vrijednosti $y(x_i) \leftrightarrow y_i$ dobivamo višekoračnu metodu oblika

$$y_{p+k} = y_{p-j} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i}.$$

Najpoznatiji primjeri višekoračnih metoda ovog tipa su

- Adams–Bashforthova metoda i
- Adams–Moultonova metoda.

Adams–Bashforthova metoda

Adams–Bashforthova metoda: $k = 1$ i $j = 0$.

$$y_{p+1} = y_p + h(\beta_{q0} f_p + \beta_{q1} f_{p-1} + \cdots + \beta_{qq} f_{p-q}).$$

	i				
β_{qi}	0	1	2	3	4
β_{0i}	1				
$2\beta_{1i}$	3	-1			
$12\beta_{2i}$	23	-16	5		
$24\beta_{3i}$	55	-59	37	-9	
$720\beta_{4i}$	1901	-2774	2616	-1274	251

Adams–Moultonova metoda

Adams–Moultonova metoda: $k = 0$ i $j = 1$ dobijamo

$$y_p = y_{p-1} + h(\beta_{q0} f_p + \beta_{q1} f_{p-1} + \cdots + \beta_{qq} f_{p-q}).$$

$$y_{p+1} = y_p + h(\beta_{q0} f_{p+1} + \beta_{q1} f_p + \cdots + \beta_{qq} f_{p+1-q}).$$

	i				
β_{qi}	0	1	2	3	4
β_{0i}	1				
$2\beta_{1i}$	1	1			
$12\beta_{2i}$	5	8	-1		
$24\beta_{3i}$	9	19	-5	1	
$720\beta_{4i}$	251	646	-264	106	-19

Od ostalih višekoračnih metoda izvedenih iz integracijskih formula, poznatije su još

- Nyströmove ($k = 1$ i $j = 1$)

$$y_{p+1} = y_{p-1} + h(\beta_{q0} f_p + \beta_{q1} f_{p-1} + \cdots + \beta_{qq} f_{p-q}).$$

- Milneove metode ($k = 0$ i $j = 2$).

$$y_p = y_{p-2} + h(\beta_{q0} f_p + \beta_{q1} f_{p-1} + \cdots + \beta_{qq} f_{p-q}).$$

$$y_{p+1} = y_{p-1} + h(\beta_{q0} f_{p+1} + \beta_{q1} f_p + \cdots + \beta_{qq} f_{p+1-q}).$$

BDF metode

Metode za ODJ iz formula za deriviranje

Niz metoda možemo dobiti i pomoću formula za deriviranje.

Neka je $P(x)$ polinom koji interpolira $y(x)$ u točkama x_{n-i} :

$$P(x_{n-i}) = y(x_{n-i}), \quad i = 0, \dots, k.$$

Lagrangeova forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^k L_i(x)y(x_{n-i}), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{x - x_{n-j}}{x_{n-i} - x_{n-j}}.$$

Deriviranjem u čvoru x_{n-r} dobivamo

$$P'(x_{n-r}) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k hL'_i(x_{n-r})y(x_{n-i}).$$

Supstitucijama

$$y_{n-i} \approx y(x_{n-i}) \quad \text{i} \quad f_{n-r} = f(x_{n-r}, y_{n-r}) \approx P'(x_{n-r})$$

dobivamo metodu

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n-i} = h f_{n-r}.$$

Uvođenjem oznake $p = (x - x_n)/h$, vidimo da koeficijenti

$$\alpha_i = h L'_i(x_{n-r}) = \frac{d}{dp} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{p+j}{j-i} \Big|_{p=-r} = \frac{1}{r-i} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, r}}^k \frac{j-r}{j-i}$$

ne ovise o čvorovima x_{n-i} i koraku mreže h .

Za $r = 1$ dobivamo eksplicitnu metodu

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n-i} = h f_{n-1},$$

a za izbor $r = 0$ je metoda implicitna:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i^* y_{n-i} = h f_n.$$

Napomena. Zbog alternativnog načina izvoda ovih metoda korištenjem podijeljenih razlika unazad, ove metode poznate su pod nazivom BDF metode (engl. *backward difference formulas*).

Koeficijenti eksplicitne BDF metode

k	η_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
1	1	1						
2	2	0	1					
3	3	$-\frac{3}{2}$	3	$-\frac{1}{2}$				
4	4	$-\frac{10}{3}$	6	$-\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$			
5	5	$-\frac{65}{12}$	10	-5	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{4}$		
6	6	$-\frac{77}{10}$	15	-10	30	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{5}$	
7	7	$-\frac{203}{20}$	21	$-\frac{35}{2}$	$\frac{35}{3}$	$-\frac{21}{4}$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{6}$

Koeficijenti implicitne BDF metode

k	η_1^*	α_1^*	α_2^*	α_3^*	α_4^*	α_5^*	α_6^*	α_7^*
1	1	1						
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$					
3	$\frac{6}{11}$	$\frac{18}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$				
4	$\frac{12}{25}$	$\frac{48}{25}$	$-\frac{36}{25}$	$\frac{16}{25}$	$-\frac{3}{25}$			
5	$\frac{60}{137}$	$\frac{300}{137}$	$-\frac{300}{137}$	$\frac{200}{137}$	$-\frac{75}{137}$	$\frac{12}{137}$		
6	$\frac{60}{147}$	$\frac{360}{147}$	$-\frac{450}{147}$	$\frac{400}{147}$	$-\frac{225}{147}$	$\frac{72}{147}$	$-\frac{10}{147}$	
7	$\frac{140}{363}$	$\frac{20}{363}$	$-\frac{1470}{363}$	$\frac{4900}{1089}$	$-\frac{1225}{363}$	$\frac{588}{363}$	$-\frac{490}{1089}$	$\frac{20}{363}$

Konzistentnost višekoračne metode

Kao i kod jednokoračnih metoda, prvo ćemo promatrati koliko dobro rješenje diferencijalne jednačbe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a, b], \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

zadovoljava rekurzivnu formulu

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^r \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j}),$$

koja definira višekoračnu metodu.

U gornju ćemo rekurziju umjesto y_j uvrstiti rješenje diferencijalne jednačbe $y(x_j)$, a zatim dobiveni izraz razviti u Taylorov red:

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j y(x_{i+1-j}) - h \sum_{j=0}^r \beta_j f(x_{i+1-j}, y(x_{i+1-j})) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j h^j.$$

Metoda će biti točnija što je više prvih članova u razvoju jednako nuli.

Općenito, ukoliko je

$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0 \quad \text{i} \quad C_{p+1} \neq 0$$

kažemo da je metoda reda p . Ukoliko je $p \geq 1$ kažemo da je metoda konzistentna.

Primjer. Za metodu

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$$

uvršćavanje točnog rješenja i razvoj u red oko točke x_i daje

$$\begin{aligned}y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) - 2hy'(x_i) &= \\&= \sum_{j=0}^{\infty} y^{(j)}(x_i) \frac{h^j}{j!} - \sum_{j=0}^{\infty} y^{(j)}(x_i) \frac{(-1)^j h^j}{j!} - 2hy'(x_i) = \\&= \sum_{j=1}^{\infty} y^{(2j+1)}(x_i) \frac{2}{(2j+1)!} h^{2j+1} = \\&= \frac{y^{(3)}(x_i)}{3} h^3 + \mathcal{O}(h^5) = \\&= \mathcal{O}(h^3),\end{aligned}$$

te je ova metoda reda 2.

Uočimo da smo iskoristili da je y rješenje diferencijalne jednačbe, tj. da vrijedi $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$.

Pretpostavili smo da je $y \in C^\infty(a, b)$, no očito je dovoljno zahtijevati da y ima neprekidnu treću derivaciju, tj. $y \in C^3(a, b)$.

Dakle, prethodni izraz pokazuje kvalitetu aproksimacije višekoračne metode.

U daljnjem tekstu koristit ćemo malo promijenjen izraz za pogrešku, tzv. **lokalnu pogrešku diskretizacije**:

$$\tau(x; h) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^r \alpha_j y(x + (1-j)h) - \sum_{j=0}^r \beta_j y'(x + (1-j)h),$$

gdje je y egzaktno rješenje diferencijalne jednačbe.

Uočimo da je lokalna pogreška diskretizacije dobivena uvrštavanjem tačnog rješenja u rekurziju metode uz zamjenu $x = x_j$.

Definicija

Višekoračnu metodu zovemo **konzistentnom** ako za svaki $f \in F_1(a, b)$ i $x \in [a, b]$ lokalna pogreška diskretizacije τ zadovoljava

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(x; h) = 0.$$

Ukoliko je

$$\tau(x; h) = \mathcal{O}(h^p)$$

kažemo da je metoda **reda p** .

Razvoj lokalne pogreške diskretizacije

Označimo $\bar{x} = x - (r - 1)h$. Tada je

$$\begin{aligned}
 \tau(x; h) &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^r \alpha_j y(x + (1 - j)h) - \sum_{j=0}^r \beta_j y'(x + (1 - j)h) \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^r \alpha_{r-j} y(\bar{x} + jh) - \sum_{j=0}^r \beta_{r-j} y'(\bar{x} + jh) \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^r \alpha_{r-j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(\bar{x})}{k!} j^k h^k - \sum_{j=0}^r \beta_{r-j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k+1)}(\bar{x})}{k!} j^k h^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(\bar{x}) h^{k-1} \sum_{j=0}^r \alpha_{r-j} \frac{j^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k+1)}(\bar{x}) h^k \sum_{j=0}^r \beta_{r-j} \frac{j^k}{k!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau(x; h) &= \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(\bar{x}) h^{k-1} \sum_{j=0}^r \alpha_{r-j} \frac{j^k}{k!} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} y^{(k)}(\bar{x}) h^{k-1} \sum_{j=0}^r \beta_{r-j} \frac{j^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \frac{1}{h} y(\bar{x}) \sum_{j=0}^r \alpha_{r-j} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} y^{(k)}(\bar{x}) h^{k-1} \left[\sum_{j=0}^r \left(\alpha_{r-j} \frac{j^k}{k!} - \beta_{r-j} \frac{j^{k-1}}{(k-1)!} \right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} C_k y^{(k)}(\bar{x}) h^{k-1}
\end{aligned}$$

Red $(r + 1)$ -koračne Adams–Bashforthove m.

Izvod je sličan kao za ocjenu pogreške Newton-Cotesovih formula.

$$\tau(x; h) = \frac{1}{h}(y(x + h)) - y(x) - \sum_{i=0}^r \beta_{ri} y'(x - ih).$$

Radi jednostavnosti, označimo $x_{p+j} = x + jh$, $j = -r, \dots, 1$.

$$\tau(x; h) = \frac{1}{h}(y(x_{p+1})) - y(x_p) - \sum_{i=0}^r \beta_{ri} y'(x_{p-i}).$$

Uvrštavanjem izraza za koeficijente β_{ri} , dobivamo

$$\begin{aligned}
 \tau(x; h) &= \frac{1}{h} \int_{x_p}^{x_{p+1}} y'(t) dt - \sum_{i=0}^r \left(\frac{1}{h} \int_{x_p}^{x_{p+1}} L_i(t) dt \right) y'(x_{p-i}) \\
 &= \frac{1}{h} \int_{x_p}^{x_{p+1}} y'(t) dt - \frac{1}{h} \int_{x_p}^{x_{p+1}} P_r(t) dt \\
 &= \frac{1}{h} \int_{x_p}^{x_{p+1}} [y'(t) - P_r(t)] dt,
 \end{aligned}$$

gdje je P_r polinom koji interpolira y' u točkama x_{p-r}, \dots, x_p .

Primjenom ocjene za pogrešku interpolacije

$$y'(t) - P_r(t) = \omega(t) \frac{y^{(r+2)}(\xi(t))}{(r+1)!}, \quad \xi(t) \in \langle x_{p-r}, x_p \rangle,$$

$$\omega(t) = (t - x_{p-r})(t - x_{p-r+1}) \cdots (t - x_p),$$

-
dobivamo

$$\tau(x; h) = \frac{1}{h} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \omega(t) \frac{y^{r+2}(\xi(t))}{(r+1)!} dt.$$

Budući da su x_{p-r}, \dots, x_p sve nultočke polinoma ω , ω ne mijenja predznak na intervalu $[x_p, x_{p+1}]$ pa vrijedi

$$\tau(x; h) = \frac{y^{r+2}(\eta)}{(r+1)!} \frac{1}{h} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \omega(t) dt.$$

Supstitucijom $u = (t - x_p)/h$ dobivamo

$$t - x_{p-j} = h(u + j) \quad \text{i} \quad \omega(t) = h^{r+1} u(u+1) \cdots (u+r),$$

pa gornji integral prelazi u

$$\begin{aligned}\tau(x; h) &= \frac{y^{r+2}(\eta)}{(r+1)!} \frac{1}{h} h^{r+1} h \int_0^1 u(u+1) \cdots (u+r) du \\ &= h^{r+1} \frac{y^{r+2}(\eta)}{(r+1)!} \int_0^1 \prod_{j=0}^r (u+j) du,\end{aligned}$$

te je red $(r+1)$ -koračne Adams–Bashforthove metode jednak $r+1$.

Teorem

Red r -koračne Adams–Bashforthove metode je r .

Red r -koračne Adams–Moultonove metode je $r + 1$.

Red r -koračne eksplicitne BDF metode je r .

Red r -koračne implicitne BDF metode je r .

Dokaz. Red Adams-Bashforthove metode smo upravo izveli.

Adams-Moultonova metoda je izvedena pomoću interpolacijskog polinoma za jedan stupanj većeg nego eksplicitna Adams-Bashforthova metoda pa je i red za jedan veći.

BDF metode su izvedene iz derivacije interpolacijskog polinoma. Interpolacijska pogreška kod $r + 1$ točke je h^{r+1} pa je pogreška derivacije u točki interpolacije reda h^r i to je red BDF metode. □

Konzistentnost \Rightarrow konvergencija?

Korištenjem iste ideje kao kod Runge–Kutta metoda, koeficijente u r -koračnoj metodi

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^r \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j})$$

možemo određivati tako da red metode bude što je moguće veći, tj. da poništimo što više prvih članova u Taylorovom razvoju.

- Fiksiranjem $\alpha_0 = 1$ imamo $2r$ slobodnih koeficijenata za eksplicitnu metodu.
- Koeficijenti C_j u Taylorovom razvoju zavisit će o koeficijentima α_j i β_j .

- Nije teško pokazati da je ta zavisnost linearna, te s $2r$ slobodnih koeficijenata možemo poništiti prvih $2r$ članova razvoja:
$$C_0 = C_1 = \dots = C_{2r-1}.$$
- Također, može se pokazati da će vrijediti $C_{2r} \neq 0$, pa na taj način možemo konstruirati metodu reda $2r - 1$.
- Slično vrijedi i za r -koračne implicitne metode.
- Ovdje imamo jedan koeficijent više (β_0), te možemo poništiti jedan član više u Taylorovom razvoju i dobiti metodu reda $2r$.

Zašto koristiti navedene metode, ako postoje metode dvostrukog reda s istim brojem koraka?!

- Za razliku od jednokoračnih metoda gdje je konzistentnost metode bio dovoljan uvjet za konvergenciju,
- kod višekoračnih metoda, da bi aproksimacija konvergirala k točnom rješenju, uz konzistentnost treba biti zadovoljen još jedan dodatni uvjet, a to je stabilnost.
- Preciznije, jednokoračne metode su uvijek stabilne.

Primjer. Konstruirajmo dvokoračnu eksplicitnu metodu:

$$y_{i+1} + a_1 y_i + a_2 y_{i-1} = h[b_1 f(x_i, y_i) + b_2 f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

tako da red konzistencije bude što je moguće veći.

Razvojem lokalne pogreške diskretizacije u $x = x_i$

$$\begin{aligned} \tau(x; h) = & \frac{1}{h} [y(x+h) + a_1 y(x) + a_2 y(x-h)] \\ & - [b_1 y'(x) + b_2 y'(x-h)] \end{aligned}$$

u Taylorov red, dobivamo

$$\begin{aligned}\tau(x; h) &= \frac{1}{h} y(x)(1 + a_1 + a_2) + y'(x)(1 - a_2 - b_1 - b_2) \\ &\quad + hy''(x) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_2 + b_2 \right) + h^2 y'''(x) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{2}b_2 \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^3).\end{aligned}$$

Koeficijente a_1 , a_2 , b_1 i b_2 odredimo tako da poništimo što je moguće više početnih članova u Taylorovom razvoju.

$$1 + a_1 + a_2 = 0$$

$$1 - a_2 - b_1 - b_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_2 + b_2 = 0$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{2}b_2 = 0$$

Rješenje ovog sustava je

$$a_1 = 4, \quad a_2 = -5, \quad b_1 = 4, \quad b_2 = 2.$$

Metoda:

$$y_{i+1} + 4y_i - 5y_{i-1} = h(4f_i + 2f_{i-1}).$$

Ova metoda je reda 3 jer je $\tau(x; h) = \mathcal{O}(h^3)$, a može se provjeriti da je član uz h^3 različit od nule.

Promatrat ćemo numeričko rješavanje diferencijalne jednadžbe

$$y' = -y, \quad y(0) = 1,$$

s egzaktnim rješenjem $y = e^{-x}$.

Uz korak $h = 10^{-2}$ i egzaktne početne vrijednosti $y_0 = 1$ i $y_1 = e^{-h}$ dobivamo tablicu:

i	$y_i - y(x_i)$	i	$y_i - y(x_i)$
2	$-0.164 \cdot 10^{-8}$	96	$-0.101 \cdot 10^{58}$
3	$+0.501 \cdot 10^{-8}$	97	$+0.512 \cdot 10^{58}$
4	$-0.300 \cdot 10^{-7}$	98	$-0.257 \cdot 10^{59}$
5	$+0.144 \cdot 10^{-6}$	99	$+0.129 \cdot 10^{60}$
\vdots	\vdots	100	$-0.652 \cdot 10^{60}$

Iz tablice je jasno da metoda **divergira**.

Prediktor–korektor par

Implementacija implicitnih metoda

Kako izračunati y_{i+1} u implicitnoj metodi (korektor)

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^k \alpha_j^* y_{i+1-j} = \beta_0^* hf(x_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=1}^k \beta_j^* f_{i+1-j}.$$

Ako označimo

$$c = - \sum_{j=1}^k \alpha_j^* y_{i+1-j} + h \sum_{j=1}^k \beta_j^* f_{i+1-j}, \quad \varphi(y) = \beta_0^* hf(x_{i+1}, y) + c,$$

y_{i+1} je rješenje nelinearne jednačbe $y = \varphi(y)$.

Budući da možemo izabrati dovoljno malen korak integracije h takav da je nejednakost

$$|\varphi'(y)| = h|\beta_0^*| \left| \frac{\partial f(x_{i+1}, y)}{\partial y} \right| < 1$$

zadovoljena, slijedi da jednostavne iteracije

$$y^{[m+1]} = \varphi(y^{[m]}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

konvergiraju prema rješenju jednadžbe.

Za odabir početne aproksimacije $y^{[0]}$ koristi se neka od eksplicitnih metoda (prediktor)

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^{\bar{k}} \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=1}^{\bar{k}} \beta_j f_{i+1-j}.$$

Sada možemo zapisati cijeli algoritam:

$$y_{i+1}^{[0]} = - \sum_{j=1}^{\bar{k}} \alpha_j y_{i+1-j} + h \sum_{j=1}^{\bar{k}} \beta_j f_{i+1-j},$$

$$y_{i+1}^{[m+1]} = \beta_0^* h f(x_{i+1}, y_{i+1}^{[m]}) - \sum_{j=1}^k \alpha_j^* y_{i+1-j} + h \sum_{j=1}^k \beta_j^* f_{i+1-j},$$

$$y_{i+1} = y_{i+1}^{[M]} \quad m = 0, \dots, M - 1$$

Broj iteracija (M) može biti unaprijed zadan ili se iteracije provode dok se jednadžba ne riješi do na neku unaprijed zadanu točnost. U primjeni, broj iteracije nije velik, uvijek se radi o nekoliko iteracija.

Odabir prediktora i korektora

Znamo da jednostavne iteracije konvergiraju linearno prema rješenju jednadžbe. Konvergenciju možemo ubrzati primjenom Newtonove metode.

To se koristi kod krutih jednadžbi.

Još nam je ostalo za promotriti kako odabrati korektor–prediktor par.

- Točnost metode definirana je s točnošću korektora, tj. implicitne metode.
- Ako je red prediktora, eksplicitne metode kojom određujemo početnu aproksimaciju $y_{i+1}^{[0]}$, za jedan veći od reda korektora početna će aproksimacija biti pretočna.

- S druge strane, ako je red prediktora manji od reda korektora, početna aproksimacija je preslaba, te bi trebalo previše iteracija korektora da se nelinearna jednačba riješi na zadovoljavajuću točnost.
- Stoga je uobičajeno da se za prediktor–korektor par uzimaju eksplicitna i implicitna metoda istoga reda.
 - Često korišten par je k -koračna Adams–Bashforthova metoda kao prediktor i $(k - 1)$ -koračna Adams–Moultonova metoda kao korektor.
 - Uz ovakav odabir prediktor-korektor para govorimo o Adams–Bashforth–Moultonovim metodama.
 - Isto tako, eksplicitna i implicitna k -koračna metoda izvedena iz formula za numeričko deriviranje koristi se kao prediktor-korektor par.

Stabilnost višekoračne metode

Višekoračna metoda

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^r \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j})$$

definira dva polinoma

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^r \alpha_j z^{r-j} \quad \text{i} \quad \sigma(z) = \sum_{j=0}^r \beta_j z^{r-j}.$$

Ujedno, ova dva polinoma određuju jednu višekoračnu metodu, pa se često umjesto višekoračne metode koristi naziv (ρ, σ) -shema.

Pomoću polinoma ρ i σ može opisati red i konzistentnost metode.

Razvijmo lokalnu pogrešku diskretizacije u red (samo prva dva člana) oko $\bar{x} = x - r h$:

$$\begin{aligned}
 h\tau(x; h) &= \sum_{j=0}^r \alpha_j y(x - j h) - h \sum_{j=0}^r \beta_j y'(x - j h) \\
 &= \sum_{j=0}^r \alpha_j y(\bar{x} + (r - j) h) - h \sum_{j=0}^r \beta_j y'(\bar{x} + (r - j) h) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} C_j y^{(j)}(\bar{x}) h^j.
 \end{aligned}$$

$$(h^0 y(\bar{x})) \quad C_0 = \sum_{j=0}^r \alpha_j = \rho(1)$$

$$(h^1 y'(\bar{x})) \quad C_1 = \sum_{j=0}^r (r - j) \alpha_j - \sum_{j=0}^r \beta_j = \rho'(1) - \sigma(1)$$

Time smo dokazali

Lema

Linearna višekoračna metoda je konzistentna ako i samo ako je $\rho(1) = 0$ i $\rho'(1) = \sigma(1)$.

Ovaj rezultat se može i poopćiti.

Teorem

Linearna višekoračna metoda je reda p ako i samo ako je $z = 1$ p -struka nultočka funkcije

$$\varphi(z) = \frac{\rho(z)}{\ln z} - \sigma(z).$$

Dokaz. Primijenimo metodu na diferencijalnu jednačbu $y' = y$ ($y(x) = e^x$).

Lokalna pogreška diskretizacije je

$$\begin{aligned}\tau(x, h) &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^r \alpha_j e^{x-jh} - \sum_{j=0}^r \beta e^{x-jh} \\ &= e^{x-rh} \frac{1}{h} \sum_{j=0}^r \alpha_j e^{(r-j)h} - e^{x-rh} \sum_{j=0}^r \beta e^{(r-j)h}\end{aligned}$$

Sada je, uz $z = e^h$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(h^p) = e^{-x+rh} \tau(x, h) &= \frac{1}{\ln z} \sum_{j=0}^r \alpha_j z^{(r-j)} - \sum_{j=0}^r \beta z^{(r-j)} \\ &= \frac{\rho(z)}{\ln z} - \sigma(z) = \varphi(z).\end{aligned}$$

Dakle, $h = 0$ je p -struka nultočka funkcije

$$\frac{\rho(e^h)}{h} - \sigma(e^h) = \varphi(e^h)$$

ako i samo ako je $z = e^0 = 1$ p -struka nultočka funkcij $\varphi(z)$. □

Napomena. Iz teorema slijedi i prethodna lema, da je metoda konzistentna ako i samo ako je 1 nultočka funkcije $\rho(z)/\ln z - \sigma(z)$. Zbog $\ln 1 = 0$ treba vrijediti i $\rho(1) = 0$.

Jednako tako, zbog

$$\left. \frac{\rho(z)}{\ln z} \right|_{z=1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\rho(z)}{\ln z} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\rho'(z)}{\frac{1}{z}} = \rho'(1)$$

treba vrijediti i $\rho'(1) - \sigma(1) = 0$. □

Vratimo se na problem stabilnosti.

Višekoračnu metodu

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^r \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j})$$

možemo ptomatrati i kao (linearnu) diferencijisku jednadžbu

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j y_{i+1-j} = c_{i+1}.$$

(Zanemarimo za sada da i c_i ovisi o y_i .)

Osnovno pitanje (stabilnosti): ako o i -tom koraku napravimo pogrešku τ_i kako ta pogreška utječe na konačno rješenje? Da li se pogreška povećava ili ostaje ograničena?

Kao i kod linearnih diferencijalnih jednađbi, rješenje se može prikazati kao zbroj partikularnog rješenja i rješenja homogene jednađbe

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j y_{i+1-j} = 0.$$

Očito je da je za svaki skup početnih vrijednosti y_0, \dots, y_{r-1} jednoznačno određen niz brojeva $u_j, j = 0, 1, 2, \dots$ koji rješava ovu jednađbu.

Uz gornju diferencijску jednađbu veđemo karakteristični polinom

$$\rho(z) = \alpha_0 z^r + \alpha_1 z^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1} z + \alpha_r.$$

Rješenje diferencijске jednađbe dobivamo pomoću nultočka polinoma ρ .

Teorem

Neka polinom $\rho(z)$ ima k različitih nultočaka λ_i višestrukosti σ_i , $i = 1, \dots, k$. Tada za proizvoljne polinome $P_i(t)$ stupnja strogo manjeg od σ_i , $i = 1, \dots, k$, niz

$$u_j = P_1(j)\lambda_1^j + P_2(j)\lambda_2^j + \dots + P_k(j)\lambda_k^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

je rješenje diferencijalne jednačine. Obratno, svako rješenje diferencijalne jednačine može se jedinstveno prikazati u ovom obliku.

Polinomi, odnosno njihovi koeficijenti se određuju iz r početnih uvjeta.

Asimptotski, u_j se ponaša kao po apsolutnoj vrijednosti najveć svojstvena vrijednost (recimo λ_1).

Recimo da je $\tau_i^{(0)} = \tau_i$ pogreška nastala u i -tom koraku.
Nakon n koraka

$$\tau_i^{(n)} \propto n^{\sigma_1 - 1} \lambda_1^n.$$

Ukoliko je $|\lambda_1| > 1$ ili $|\lambda_1| = 1$ i $\sigma_1 > 1$ tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\tau_i^{(n)}| = \infty.$$

Znači, da bi širenje pogreške bilo ograničeno, treba vrijediti $|\lambda_i| \leq 1$ i ako je $|\lambda_i| = 1$ tada to treba biti jednostruka nultočka.

Ako linearna višekoračna metoda zadovoljava ovo svojstvo, ka v zemo da je stabilna.

Definicija

Za višekoračnu metodu kažemo da je **stabilna** ako nultočke z_j polinoma $\rho(z)$ zadovoljavaju

1. Sve nultočke su po apsolutnoj vrijednosti manje od 1 ($|z_j| \leq 1$).
2. Ako je $|z_j| = 1$ tada je z_j jednostruka nultočka ($\rho'(z_j) \neq 0$).

Zajedno uvjete 1 i 2 zovemo uvjet stabilnosti.

Za metodu iz prošlog primjera je

$$\rho(z) = z^2 + 4z - 5.$$

Nultočke su mu $z_1 = 1$ i $z_2 = -5$.

Budući da je $|z_2| > 1$, ρ ne zadovoljava uvjet stabilnosti, tj. metoda nije stabilna.

Za r -koračnu Adams-Bashfortovu metodu a i za Adams-Moultonovu je

$$\rho(z) = z^r - z^{r-1}.$$

Jedna jednostruka nultočka je 1 a 0 je $(r - 1)$ -struka nultočka.

Obje metode su stabilne.

Stabilnost BDF metoda je složeniji problem.

r koračna BDF metoda je stabilna za $r = 1, 2, \dots, 6$.

Vidjeli smo da r -koračna metoda može postići red konzistentnosti $2r$.

Na primjeru smo vidjeli da za $r = 2$ takva metoda nije stabilna.

Koliki red može postići stabilna metoda?

Djelomičan odgovor nam može dati teorem o funkciji $\rho(z)/\ln z - \sigma(z)$.

Neka je polinom $\rho(z)$ zadan (tj. zadani su koeficijenti α_j).

Razvijmo $\rho(z)/\ln z$ u red oko $z = 0$:

$$\frac{\rho(z)}{\ln z} = c_0 + c_1(z - 1) + \cdots + c_r(z - 1)^r + \cdots$$

Ako izaberemo

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= c_0 + c_1(z - 1) + \cdots + c_r(z - 1)^r = \\ &= \beta_r + \beta_{r-1}z + \cdots + \beta_0z^r \end{aligned}$$

dobit ćemo implicitnu metodu reda barem $r + 1$.

Ako pak izaberemo

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= c_0 + c_1(z-1) + \dots + c_{r-1}(z-1)^{r-1} = \\ &= \beta_{r-1} + \beta r - 2z + \beta_0 z^{r-1} + 0 \cdot z^r\end{aligned}$$

dobit ćemo eksplicitnu metodu reda barem r .

Točna granica na red stabilne metode je:

Teorem (Prva Dahlquistova barijera)

Red p stabilne linearne r -koračne metode zadovoljava

- $p \leq r + 2$ ako je k paran;
- $p \leq r + 1$ ako je k neparan;
- $p \leq r$ ako je $\beta_0/\alpha_0 \leq 0$ (ovo uključuje eksplicitne metode - $\beta_0 = 0$)

Konvergencija višekoračnih metoda

Kao i kod jednokoračnih metoda, kada govorimo o konvergenciji metode mislimo na ponašanje globalne pogreške diskretizacije:

$$e(x; h) = y_n - y(x),$$

gdje je $x \in \langle a, b \rangle$, $h = h_n = (x - a)/n$.

Jasno je da globalna pogreška diskretizacije ovisi o lokalnoj pogrešci diskretizacije.

Međutim, to nije jedini izvor pogreške.

- Da bismo startali r -koračnu metodu, prvo je potrebno izračunati r početnih vrijednosti y_0, \dots, y_{r-1} .
- Dok y_0 možemo odrediti iz početnog uvjeta diferencijalne jednačbe, ostale vrijednosti moramo odrediti nekom drugom, najčešće jednokoračnom, metodom.

- U svakom slučaju, pri njihovom određivanju javit će se određena pogreška ε_i .

$$y(x_i) = y_i + \varepsilon_i, \quad i = 0, \dots, r - 1.$$

- Ova pogreška ne ovisi o promatranoj višekoračnoj metodi, već o načinu na koji određujemo početne vrijednosti.
- Očito je, da ako želimo da globalna pogreška diskretizacije teži nuli kada $n \rightarrow \infty$, pogreške početnih vrijednosti trebaju zadovoljavati

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0, \quad i = 0, \dots, r - 1.$$

Sada možemo izreći definiciju konvergencije višekoračne metode.

Definicija

Višekoračnu metodu zovemo konvergentnom ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(x; h_n) = 0, \quad h_n = \frac{x - a}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

za sve $x \in [a, b]$, sve $f \in F_1(a, b)$ i sve $y_i, i = 0, \dots, r - 1$ za koje je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y(x_i) - y_i) = 0, \quad i = 0, \dots, r - 1.$$

Pokažimo sada vezu između stabilnosti i konzistentnosti te konvergencije linearne višekoračne metode.

Glavni teorem koji povezuje konzistenciju, stabilnost i konvergenciju linearnih višekoračnih metoda je:

Teorem

Linearna višekoračna metoda je konvergentna ako i samo ako je konzistentna i stabilna.

Teorem se često iskazuje i kao

$$\text{konvergencija} = \text{konzistencija} + \text{stabilnost}$$

Isti teorem zapravo vrijedi i za jednokoračne metode. Kod njih stabilnost nije naglašena jer proizlazi iz konzistencije.

Teorem se dokazuje preko tri zasebna teorema.

Teorem

Stabilne i konzistentne linearne višekoračne metode su konvergentne.

Dokaz. Neka je y egzaktno rješenje jednadžbe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad f \in F_1(a, b).$$

Fiksirajmo $x \in [a, b]$ i za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $h = h_n = (x - x_0)/n$.

y_i - aproksimacija dobivena linearnom višekoračnom metodom:

$$y_i + \alpha_1 y_{i-1} + \cdots + \alpha_r y_{i-r} = h(\beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} + \cdots + \beta_r f_{i-r}),$$

$i = r, r + 1, \dots$, uz

$$y_i = y(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 0, \dots, r - 1,$$

gdje je $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$.

Uvjet $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$ znači da postoji funkcija $\varepsilon(h)$ takva da je $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon(h)$ za $i = 0, \dots, r - 1$ i $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Zbog konzistentnosti metode, lokalna pogreška diskretizacije kada računamo točku x_i

$$\tau(x_i; h) = \tau_i = \frac{1}{h} \left[y(x_i) + \sum_{j=1}^r \alpha_j y(x_{i-j}) \right] - \sum_{j=0}^r \beta_j f(x_{i-j}, y(x_{i-j}))$$

zadovoljava

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_i = 0,$$

tj. τ_i možemo omeđiti nekom funkcijom $t(h)$, $|\tau_i| \leq t(h)$, koja zadovoljava $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 0$.

Oduzimanjem jednakosti za lokalnu pogrešku diskretizacije pomnožene s h od rekurzije metode dobivamo rekurziju za pogreške $e_i = y_i - y(x_i)$:

$$e_i + \alpha_1 e_{i-1} + \dots + \alpha_r e_{i-r} = c_i, \quad i = r, r+1, \dots$$

UZ

$$e_i = \varepsilon_i, \quad i = 0, \dots, r-1$$

$$c_i = h \sum_{j=0}^r \beta_j [f(x_{i-j}, y_{i-j}) - f(x_{i-j}, y(x_{i-j}))] - h \tau_i.$$

Budući da je $f \in F_1(a, b)$, postoji konstanta $m > 0$ takva da je

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq m \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{i} \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

te vrijedi

$$|f(x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k))| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, \eta)(y_k - y(x_k)) \right| \leq m |e_k|.$$

Iskoristivši ovu nejednakost, dobivamo da c_i zadovoljava

$$|c_i| \leq hM \sum_{j=0}^r |e_{i-j}| + |h|t(h),$$

gdje je

$$M = m \max_{j=0, \dots, r} |\beta_j|.$$

Pomoću vektora

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{i-r+1} \\ \mathbf{e}_{i-r+2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r,$$

i matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_r & \dots & \dots & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

rekurziju za pogreške možemo zapisati u ekvivalentnom vektorskom zapisu

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_{i-1} + c_i\mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \varepsilon_{r-1} \end{bmatrix}.$$

- Uočimo da polinom ρ , definiran višekoračnom metodom, je ujedno i svojstveni polinom matrice \mathbf{A} (matrica pratilac polinoma ρ).
- Stabilnost metode povlači da su sve nultočke od ρ , tj. svojstvene vrijednosti od \mathbf{A} , po apsolutnoj vrijednosti manje od 1, a ako su jednake 1 tada su jednostruke.
- To znači da postoji vektorska norma $\| \cdot \|$ na \mathbb{C}^r takva da za induciranu matričnu normu vrijedi $\|\mathbf{A}\| \leq 1$.

- Budući da su sve norme na \mathbb{C}^r ekvivalentne, postoji konstanta $k > 0$ takva da je

$$\frac{1}{k} \|\mathbf{e}_i\| \leq \sum_{j=0}^{r-1} |\mathbf{e}_{i-j}| = \|\mathbf{e}_i\|_1 \leq k \|\mathbf{e}_i\|.$$

Podsjetnik. Za sve A i sve $\varepsilon > 0$ postoji operatorska norma $\|\cdot\|_*$ takva da je

$$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Norma $\|\cdot\|_*$ ovisi i o A , i o ε .

Ako svaka svojstvena vrijednost λ od A takva da je $|\lambda| = \rho(A)$ ima geometrijsku kratnost 1, tada postoji takva norma za koju je

$$\|A\|_* = \rho(A).$$

Uočivši da je

$$|e_{i-r}| \leq \sum_{j=1}^r |e_{i-j}| \leq k \|e_{i-1}\|$$

iz nejednakosti za $|c_j|$ slijedi

$$|c_j| \leq |h| Mk (\|e_j\| + \|e_{j-1}\|) + |h|t(h).$$

Iskoristivši vektorski zapis rekurzije za pogrešku i činjenice da je

$$\|\mathbf{b}\| \leq k \|\mathbf{b}\|_1 = k,$$

slijedi da je

$$\|e_j\| \leq |h| Mk^2 \|e_j\| + (1 + |h| Mk^2) \|e_{j-1}\| + k |h| t(h), \quad j = 0, 1, \dots$$

odnosno

$$(1 - |h| Mk^2) \|e_j\| \leq (1 + |h| Mk^2) \|e_{j-1}\| + k |h| t(h), \quad j = 0, 1, \dots$$

i

$$\|\mathbf{e}_0\| \leq k\|\mathbf{e}_0\|_1 \leq kr\varepsilon(h).$$

Za

$$|h| \leq \frac{1}{2Mk^2}$$

je

$$1 - |h|Mk^2 \geq \frac{1}{2}$$

i

$$\frac{1 + |h|Mk^2}{1 - |h|Mk^2} \leq 1 + 4|h|Mk^2.$$

Sada prethodna nejednakost za $\|\mathbf{e}_j\|$ prelazi u

$$\|\mathbf{e}_j\| \leq (1 + 4|h|Mk^2)\|\mathbf{e}_{j-1}\| + 2k|h|t(h), \quad j = 0, 1, \dots$$

Iz leme koja prethodi teoremu o konvergenciji jednokoračne metode slijedi

$$\|\mathbf{e}_n\| \leq e^{4n|h|Mk^2} kr\varepsilon(h) + t(h) \frac{e^{4n|h|Mk^2} - 1}{2Mk},$$

tj. za $x \neq x_0$, $h = h_n = (x - x_0)/n$, $|h_n| \leq 1/(2Mk^2)$ vrijedi

$$\|\mathbf{e}_n\| \leq e^{4Mk^2|x-x_0|} kr\varepsilon(h_n) + t(h_n) \frac{e^{4Mk^2|x-x_0|} - 1}{2Mk}.$$

Dakle, postoje konstante C_1 i C_2 , nezavisne o h , takve da je

$$|e(x; h)| = |e_n| = |y_n - y(x_n)| \leq C_1\varepsilon(h_n) + C_2t(h_n)$$

za dovoljno veliki n .

Konvergenција metode sada slijedi iz činjenice da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(h_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(h_n) = 0.$$

Iz zadnje ocjene u dokazu prethodnog torema dobivamo sljedeći korolar.

Korolar

Neka je linearna višekoračna metoda stabilna i konzistentna reda p , te $f \in F_p(a, b)$. Tada globalna pogreška diskretizacije zadovoljava

$$e(x; h_n) = \mathcal{O}(h_n^p)$$

za sve $h_n = (x - x_0)/n$ čim pogreške ε_i zadovoljavaju

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon(h_n), \quad i = 0, \dots, r - 1$$

uz $\varepsilon(h_n) = \mathcal{O}(h_n^p)$ za $n \rightarrow \infty$.

Ovaj korolar ujedno kazuje koju metodu moramo izabrati za određivanje početnih vrijednosti y_0, \dots, y_{r-1} .

- Da bismo postigli da se pogreška ponaša kao $\mathcal{O}(h^p)$, tako se mora ponašati i pogreška početnih vrijednosti.
- Ukoliko za njihovo određivanje koristimo jednokoračnu metodu reda \tilde{p} , iz teorema o konvergenciji jednokoračnih metoda slijedi da je pogreška **u jednom koraku**

$$|e(x_i; h)| \leq C |h|^{\tilde{p}+1}$$

- To znači da za početne vrijednosti možemo odrediti metodom reda $\tilde{p} = p - 1$ da bi se pogreška višekoračne metode ponašala kao $\mathcal{O}(h^p)$.

Sljedeća dva teorema govore o svojstvima konvergentnih višekoračnih metoda.

Teorem

Konvergentne linearne višekoračne metode su stabilne.

Dokaz. Promatrajmo diferencijalnu jednačbu

$$y' = 0, \quad y(a) = 0$$

s egzaktnim rješenjem $y = 0$.

Za fiksirani $x \in [a, b]$ neka je y_n aproksimacija za $y(x)$ uz $h = (x - a)/n$, $n = 1, 2, \dots$, te neka su zadane početne vrijednosti

$$y_i = \varepsilon_i, \quad i = 0, \dots, r - 1.$$

Budući da je metoda konvergentna, vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

ako je zadovoljeno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0 \quad i = 0, \dots, r-1. \quad (1)$$

Izaberimo sada

$$\varepsilon_i = hu_i \quad i = 0, \dots, r-1,$$

za neke fiksne konstante u_0, \dots, u_{r-1} .

Uz ovakav izbor ε_i zadovoljili smo uvjet (1).

Sada definirajmo niz y_i rekurzivnom formulom

$$y_{j+r} + \alpha_1 y_{j+r-1} + \cdots + \alpha_r y_j = 0$$

uz početne vrijednosti

$$y_i = \varepsilon_i \quad i = 0, \dots, r-1.$$

Sada vrijedi $y_i = hu_i$, gdje je niz u_i dobiven rekurzijom

$$u_{j+r} + \alpha_1 u_{j+r-1} + \cdots + \alpha_r u_j = 0.$$

Budući da je metoda konvergentna, vrijedi

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (hu_n) = (x - a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n}.$$

Tvrđnja teorema sada slijedi direktno iz leme. □

Teorem

Konvergentne linearne višekoračne metode su konzistentne.

Dokaz. Promatrajmo inicijalni problem

$$y' = 0, \quad y(0) = 1$$

s egzaktnim rješenjem $y(x) = 1$.

Za početne vrijednosti $y_i = 1, i = 0, \dots, r - 1$, metoda daje vrijednosti $y_{j+r}, j = 0, 1, \dots$ gdje je

$$y_{j+r} + \alpha_{r-1}y_{j+r-1} + \dots + \alpha_0y_j = 0. \quad (2)$$

Stavivši $h = x/n$, zbog konvergencije metode vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y(x) = 1.$$

Sada direktno iz (2) za $j \rightarrow \infty$ slijedi

$$C_0 = 1 + \alpha_{r-1} + \dots + \alpha_0 = 0.$$

Da bismo dokazali da je i $C_1 = 0$, iskoristit ćemo činjenicu da je metoda konvergentna i za inicijalni problem

$$y' = 1, \quad y(0) = 0,$$

s egzaktnim rješenjem $y(x) = x$.

Već smo vidjeli da je $C_0 = \rho(1) = 0$.

Zbog konvergentnosti metode, iz prethodnog teorema slijedi i njena stabilnost, pa je $\lambda = 1$ jednostruka nultočka od ρ , tj. $\rho'(1) \neq 0$.

Dakle, konstanta

$$K = \frac{\sigma(1)}{\rho'(1)}$$

je dobro definirana.

Uz početne uvjete

$$y_j = jhK \quad j = 0, \dots, r-1,$$

za inicijalni problem $y' = 1$, $y(0) = 0$, uzevši u obzir da je $y(x_j) = x_j = jh$, imamo

$$y_j = y(x_j) + \varepsilon_j \quad \text{uz} \quad \varepsilon_j = jh(K-1), \quad j = 0, \dots, r-1.$$

Očito je zadovoljeno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0 \quad \text{za} \quad j = 0, \dots, r-1.$$

Metoda, uz ove početne vrijednosti, daje niz y_j koji zadovoljava

$$y_{j+r} + \alpha_{r-1}y_{j+r-1} + \dots + \alpha_0y_j = h(\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_r) = h\sigma(1).$$

Uvrštavanjem u gornju jednadžbu, uzevši u obzir da je $\rho(1) = 0$, lagano se može provjeriti da je

$$y_j = jhk \quad \text{za sve } j.$$

Fiksirajmo sada x i stavimo $h = x/n$.

Zbog konvergencije metode je

$$x = y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (nhK) = \lim_{n \rightarrow \infty} (xK) = Kx.$$

Dakle, $K = 1$, odnosno $\rho'(1) = \sigma(1)$, te je $C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 0$, što znači da je metoda konzistentna. □

Apsolutna stabilnost višekoračnih metoda

Apsolutnu stabilnost definiramo u istom smislu kao i za jednokoračne metode.

Definicija

Linearna višekoračna metoda je **A-stabilna** ukoliko primjenom na jednadžbu

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad \operatorname{Re} \lambda < 0.$$

dobiveni niz aproksimacija (y_i) zadovoljava

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0, \quad \forall y_0.$$

Metoda mora rješavati (asimptotski) stabilne diferencijalne jednadžbe.

Ako višekoračnu metodu

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^r \alpha_j y_{i+1-j} = \beta_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=1}^r \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j}).$$

primjenimo na test problem

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad \lambda < 0.$$

dobivamo da aproksimacije y_i generirane višekoračnom metodom zadovoljavaju linearnu homogenu diferencijsku jednadžbu

$$(1 - \beta_0 h \lambda) y_{i+1} + \sum_{j=1}^r (\alpha_j - \beta_j h \lambda) y_{i+1-j} = 0.$$

Karakteristični polinom metode je u tom slučaju dan sa

$$\pi(z; h\lambda) = (1 - \beta_0 h\lambda)z^r + \sum_{j=1}^r (\alpha_j - \beta_j h\lambda)z^{r-j} = \rho(z) - h\lambda\sigma(z).$$

Uvedimo oznaku $\mu = h\lambda$:

$$\pi(z; \mu) = (1 - \beta_0 \mu)z^r + \sum_{j=1}^r (\alpha_j - \beta_j \mu)z^{r-j} = \rho(z) - \mu\sigma(z).$$

A-stabilnost je ekvivalentna s zahtjevom da nultočke karakterističnog polinoma $z_i = z_i(\mu)$ zadovoljavaju

$$|z_i(\mu)| < 1, \quad i = 1, \dots, r, \quad \forall \mu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \mu < 0.$$

Vidjeli smo da postoje A-stabilne implicitne RK metode.

Višekoračne su problematičnije.

Teorem (Druga Dahlquistova barijera)

- 1 *Ne postoji A-stabilna eksplicitna višekoračna metoda.*
- 2 *A-stabilna višekoračna metoda je najviše reda 2.*
- 3 *A-stabilna višekoračna metoda reda 2 s najmanjom konstantom pogreške je implicitna trapezna metoda.*

Iskaz teorema je obeshrabrujući.

Jer metode nisu A-stabilne, potrebno je pogledati područje A-stabilnosti.

Područje apsolutne stabilnosti:

$$\{\mu \mid |z_i(\mu)| < 1, i = 1, \dots, r\}.$$

Za određivanje područja apsolutne stabilnosti, okrenut ćemo problem.

Za koji μ je

$$\pi(z, \mu) = \rho(z) - \mu\sigma(z) = 0.$$

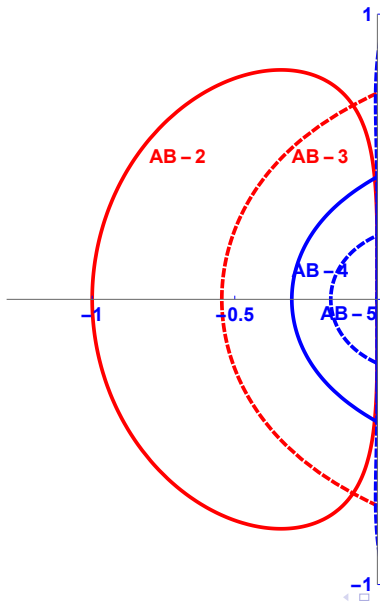
$$\mu = \frac{\rho(z)}{\sigma(z)}$$

Granica područja apsolutne stabilnosti je dana s $|z| = 1$.

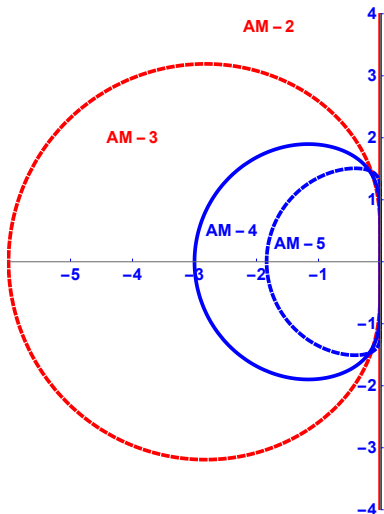
Parametrizacijom $z = e^{i\theta}$, ($i = \sqrt{-1}$), dobijemo parametrizaciju ruba područja apsolutne stabilnosti

$$\mu = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Područje apsolutne stabilnosti za Adams-Bashforthove metode

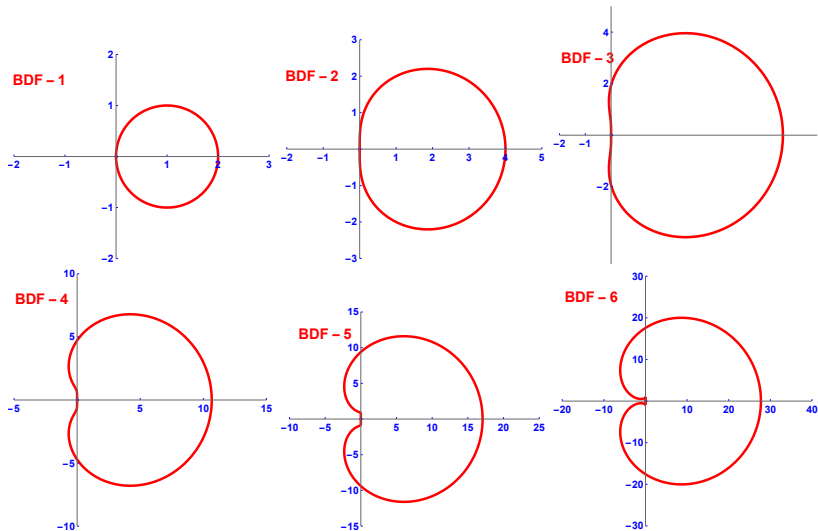


Područje apsolutne stabilnosti za Adams-Moultonove metode

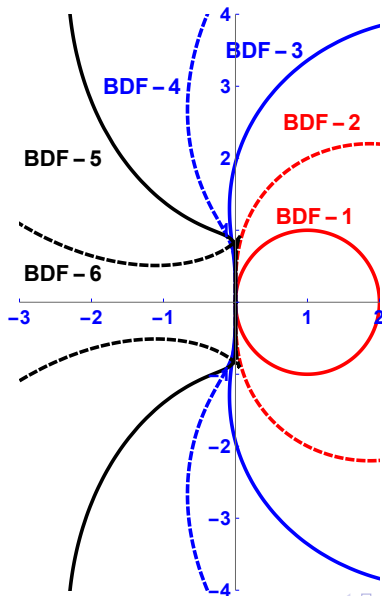


AM-2 je implicitna trapezna metoda (apsolutno stabilna).

Područje apsolutne stabilnosti za eksplicitne BDF metode



Područje apsolutne stabilnosti za eksplicitne BDF metode



Vidimo da BDF metode reda 3 do 6 iako nisu apsolutno stabilne, područje apsolutne stabilnosti sadrži negativni dio realne osi.

To je dobro svojstvo te se ove metode koriste za krute jednadžbe.

A-stabilnost je prejako svojstvo za linearne višekoračne metode pa se za njih koristi svojstvo $A(\alpha)$ -stabilnosti.

Definicija

Linearna višekoračna metoda je $A(\alpha)$ -stabilna, $0 < \alpha \leq \pi/2$ ukoliko je skup

$$W_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg}(-z)| < \alpha, z \neq 0\}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

sadržan u području apsolutne stabilnosti.

α za implicitne BDF metode

k	1	2	3	4	5	6
α	90°	90°	86.03°	73.35°	51.84°	17.84°

Gearova metoda

- Do sada razmatrane formule za višekoračne metode - ekvidistantni izbor koraka h .
- Ne može se primijeniti adaptivna metoda uz kontrolu pogreške.
- Jedino ponavljanjem cijelog postupka s drugačijim korakom.
- To se može napraviti drugačijim zapisom metode.
- Koristit ćemo Adams–Bashforth–Moultonove metode. Analogno se primjenjuje i na druge (BDF).

Kod k -koračnih ABM metoda za računanje y_{i+1} trebamo poznavati (pamtiti) prijašnje vrijednosti $y_n, f_n, \dots, f_{n+1-k}$.

Ovih $k + 1$ vrijednosti možemo zapamtiti u vektoru \mathbf{y}_n :

$$\mathbf{y}_n = [y_n, hf_n, hf_{n-1}, \dots, hf_{n+1-k}]^T.$$

Prediktor u ABM metodi računamo prema

$$y_n^{[0]} = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^k \beta_j f_{n-j},$$

dok je korektor zadan s

$$y_n^{[m+1]} = y_{n-1} + h\beta_0^* f(x_n, y_n^{[m]}) + h \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j^* f_{n-j}, \quad m = 0, \dots, M-1.$$

Oduzimanjem dviju uzastopnih aproksimacija dobivamo

$$y_n^{[m+1]} - y_n^{[m]} = \beta_0^* [hf(x_n, y_n^{[m]}) - hf(x_n, y_n^{[m-1]})]$$

za $m = 1, \dots, M - 1$, dok za $m = 0$ slijedi

$$\begin{aligned} y_n^{[1]} - y_n^{[0]} &= h\beta_0^* f(x_n, y_n^{[0]}) + h \sum_{j=1}^k (\beta_j^* - \beta_j) f_{n-j} \\ &= \beta_0^* \left[hf(x_n, y_n^{[0]}) - h \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j - \beta_j^*}{\beta_0^*} hf_{n-j} \right]. \end{aligned}$$

Ovdje smo označili $\beta_k^* = 0$.

Uz oznaku

$$\delta_j = \frac{\beta_j - \beta_j^*}{\beta_0^*} \quad \text{i} \quad d_n = \sum_{j=1}^k h\delta_j f_{n-j},$$

možemo pisati

$$y_n^{[1]} - y_n^{[0]} = \beta_0^* [hf(x_n, y_n^{[0]}) - d_n].$$

Slično kao i vektor \mathbf{y}_n , definiramo vektor

$$\mathbf{y}_n^{[0]} = [y_n^{[0]}, d_n, hf_{n-1}, \dots, hf_{n+1-k}]^T.$$

Sada vrijedi

$$\mathbf{y}_n^{[0]} = \mathbf{B} \mathbf{y}_{n-1}$$

gdje je

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \dots & \beta_k \\ 0 & \delta_1 & \dots & \dots & \delta_k \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, za $m = 1, \dots, M$ definiramo vektor

$$\mathbf{y}_n^{[m]} = [y_n^{[m]}, hf(x_n, y_n^{[m-1]}), hf_{n-1}, \dots, hf_{n+1-k}]^T$$

i funkciju

$$F(\mathbf{y}_n^{[m]}) = \begin{cases} hf(x_n, y_n^{[m]}) - hf(x_n, y_n^{[m-1]}), & m = 1, \dots, M, \\ hf(x_n, y_n^{[0]}) - d_n, & m = 0. \end{cases}$$

Uočimo da funkcija F koristi samo prve dvije komponente vektora $\mathbf{y}_n^{[m]}$:

$$F([u_0, u_1, \dots, u_k]^T) = hf(x_n, u_0) - u_1.$$

Sada je

$$\mathbf{y}_n^{[m+1]} = \mathbf{y}_n^{[m]} + \mathbf{c}F(\mathbf{y}_n^{[m]}), \quad m = 0, \dots, M-1, \quad (3)$$

gdje je

$$\mathbf{c} = [\beta_0^*, 1, 0, \dots, 0]^T.$$

Za \mathbf{y}_n odabrat ćemo zadnju iteraciju:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_n^{[M]}.$$

Za izvod Adams–Bashforthove metode iskoristili smo interpolacijski polinom P koji interpolira vrijednosti f_{n-i} u točkama x_{n-i} za $i = 1, \dots, k$ te definirali metodu pomoću

$$y_n - y_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_n} P(x) dx.$$

Definirajmo polinom

$$Q(x) = \int_{x_{n-1}}^x P(z) dz + y_{n-1}.$$

Zbog $Q'(x) = P(x)$ izlazi

$$Q'(x_{n-i}) = f_{n-i}, \quad i = 1, \dots, k,$$

te iz prethodnog slijedi

$$Q(x_{n-1}) = y_{n-1} \quad \text{i} \quad Q(x_n) = y_n.$$

Očito da iz vektora \mathbf{y}_n možemo jednoznačno odrediti polinom Q , i obratno, iz polinoma Q i lagano i jednoznačno određujemo \mathbf{y}_n . Razvojem polinoma Q u Taylorov red oko točke x_{n-1} dobivamo

$$Q(x) = \sum_{i=0}^k \frac{Q^{(i)}(x_{n-1})}{i!} (x - x_{n-1})^i = \sum_{i=0}^k \frac{h^i}{i!} Q^{(i)}(x_{n-1}) \left(\frac{x - x_{n-1}}{h} \right)^i.$$

Koeficijente polinoma Q možemo zapisati vektorom \mathbf{z}_{n-1} :

$$\mathbf{z}_{n-1} = \left[Q(x_{n-1}), h \frac{Q'(x_{n-1})}{1!}, h^2 \frac{Q''(x_{n-1})}{2!}, \dots, h^k \frac{Q^{(k)}(x_{n-1})}{k!} \right]^T.$$

Važnost ovoga zapisa je u tome što su \mathbf{y}_{n-1} i \mathbf{z}_{n-1} linearno povezani i vrijedi:

$$\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{D}\mathbf{z}_{n-1},$$

gdje je \mathbf{D} regularna matrica koja ne ovisi o izboru koraka i n .

Označivši još s $\mathbf{z}_{n-1}^{[m]}$:

$$\mathbf{y}_{n-1}^{[m]} = \mathbf{D}\mathbf{z}_{n-1}^{[m]}, \quad m = 0, \dots, M,$$

korak višekoračne metode možemo pisati u obliku

$$\mathbf{z}_n^{[0]} = \mathbf{DBD}^{-1}\mathbf{z}_{n-1},$$

$$\mathbf{z}_n^{[m+1]} = \mathbf{z}_n^{[m]} + \mathbf{DcF}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{z}_n^{[m]}), \quad m = 0, \dots, M-1,$$

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n^{[M]}.$$

S \mathbf{P} označimo matricu

$$\mathbf{P} = \mathbf{DBD}^{-1}.$$

Matrica \mathbf{P} je gornjotrokutasta matrica čiji su elementi binomni koeficijenti:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k \\ & & 1 & 3 & 6 & \dots & \\ & & & 1 & 4 & \dots & \\ & & & & 1 & \dots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da su prve dvije komponente vektora \mathbf{y}_n i \mathbf{z}_n , odnosno \mathbf{y}_{n-1} i \mathbf{z}_{n-1} jednake:

$$Q(x_{n-1}) = y_{n-1} \quad \text{i} \quad hQ'(x_{n-1}) = hf_{n-1}.$$

Funkcija F ovisi samo o prva dva elementa vektora \mathbf{y}_{n-1} , pa vrijedi

$$F(\mathbf{y}_n) = F(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{z}_n) = F(\mathbf{z}_n).$$

Označimo još s

$$\mathbf{l} = \mathbf{D}\mathbf{c},$$

i višekoračnu metodu možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_n^{[0]} &= \mathbf{P}\mathbf{z}_{n-1}, \\ \mathbf{z}_n^{[m+1]} &= \mathbf{z}_n^{[m]} + F(\mathbf{z}_n^{[m]})\mathbf{l}, \quad m = 0, \dots, M-1, \\ \mathbf{z}_n &= \mathbf{z}_n^{[M]}. \end{aligned}$$

Iteracije korektora možemo napisati u obliku

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n^{[0]} + [F(\mathbf{z}_n^{[0]}) + \cdots + F(\mathbf{z}_n^{[M-1]})]\mathbf{l}.$$

Budući da F koristi prve dvije komponente od $\mathbf{z}_n^{[m]}$, dovoljno je tijekom iteracija računati samo njih.

Uz oznaku

$$e_n = F(\mathbf{z}_n^{[0]}) + \cdots + F(\mathbf{z}_n^{[M-1]})$$

prethodna relacija postaje

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n^{[0]} + e_n\mathbf{l}.$$

Koeficijenti vektora l za Adams–Bashforth–Moultonovu metodu

	Red metode (k)					
	1	2	3	4	5	6
l_0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$
l_1	1	1	1	1	1	1
l_2		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{137}{120}$
l_3			$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{5}{24}$
l_4				$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{17}{96}$
l_5					$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{40}$
l_6						$\frac{1}{720}$

Koeficijenti vektora \mathbf{l} za BDF metodu

BDF ima isti matični prikaz s istom matricom \mathbf{P} i funkcijom F , jedino se razlikuju vektori \mathbf{l} .

	Red metode (k)					
	1	2	3	4	5	6
l_0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{60}{137}$	$\frac{60}{147}$
l_1	1	1	1	1	1	1
l_2		$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{225}{274}$	$\frac{406}{441}$
l_3			$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{85}{274}$	$\frac{245}{588}$
l_4				$\frac{1}{50}$	$\frac{15}{274}$	$\frac{175}{1764}$
l_5					$\frac{1}{274}$	$\frac{7}{558}$
l_6						$\frac{1}{1764}$

Važnost ovog prikaza je u tome da vektor \mathbf{z}_n čuva $k + 1$ informaciju u jednoj jedinoj točki, dok prijašnji prikaz koristi isti broj informacija, ali u k različitih točaka.

Za korak integracije h vektor \mathbf{z}_n je oblika

$$\mathbf{z}_n = \left[Q(x_n), Q'(x_n) \frac{h}{1!}, \dots, Q^{(k)}(x_n) \frac{h^k}{k!} \right]^T.$$

Analogno, za korak αh imali bismo

$$\bar{\mathbf{z}}_n = \left[Q(x_n), Q'(x_n) \frac{\alpha h}{1!}, \dots, Q^{(k)}(x_n) \frac{(\alpha h)^k}{k!} \right]^T.$$

Za prijelaz s koraka h na korak αh treba i -tu komponentu vektora \mathbf{z}_n

pomnožiti s α^i .

Za $(k - 1)$ -koračnu metodu vektor \mathbf{z}_n je oblika

$$\bar{\mathbf{z}}_n = \left[Q(x_n), Q'(x_n) \frac{h}{1!}, \dots, Q^{(k-1)}(x_n) \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} \right]^T,$$

te ga možemo dobiti iz vektora \mathbf{z}_n ispuštanjem zadnje komponente.

Za prijelaz na metodu s jednim korakom više u odgovarajućem vektoru

$$\bar{\bar{\mathbf{z}}}_n = \left[Q(x_n), Q'(x_n) \frac{h}{1!}, \dots, Q^{(k)}(x_n) \frac{h^k}{k!}, Q^{(k+1)}(x_n) \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \right]^T$$

treba aproksimirati zadnju komponentu.

Koristeći podijeljene razlike unazad dobivamo

$$\begin{aligned}
 Q^{(k+1)}(x_n) &\approx y^{(k+1)}(x_n) \approx \frac{y^{(k)}(x_n) - y^{(k)}(x_{n-1})}{h} \\
 &\approx \frac{k!}{h^{k+1}} \left(\frac{h^k y^{(k)}(x_n)}{k!} - \frac{h^k y^{(k)}(x_{n-1})}{k!} \right) \\
 &\approx \frac{k!}{h^{k+1}} (z_{n,k} - z_{n-1,k}).
 \end{aligned}$$

Uočimo da su zbog oblika matrice \mathbf{P} zadnje komponente vektora \mathbf{z}_{n-1} i $\mathbf{z}_n^{[0]}$ jednake, te vrijedi

$$z_{n,k} - z_{n-1,k} = z_{n,k} - z_{n,k}^{[0]} = \mathbf{e}_n l_k$$

gdje smo i s l_k označili zadnju komponentu vektora \mathbf{l} .

Sada za aproksimaciju zadnje komponente vektora $\bar{\mathbf{z}}_n$ možemo iskoristiti

$$\frac{h^{k+1}}{(k+1)!} Q^{(k+1)}(x_n) = \frac{e_n l_k}{k+1}.$$

Ovakav prikaz višekoračnih metoda omogućava

- laganu promjenu koraka integracije
- povećanje ili smanjenje reda metode
- riješen je problem početnih vrijednosti. Dovoljno je početi integraciju s jednokoračnom metodom i vektorom

$$\mathbf{z}_0 = [y_0, hf(x_0, y_0)]^T.$$

Još je ostalo za razmotriti izbor veličine koraka i reda metode.

Iteracije korektora nisu ništa drugo nego metoda jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe

$$F(\mathbf{z}_n)\mathbf{I} = 0.$$

- Problem se javlja kod krutih sustava.
- Tada iteracije konvergiraju samo ako je korak integracije h dovoljno malen.
- Nerealno smanjenje koraka integracije značajno povećava broj koraka integracije.

Rješenje: jednadžbu možemo rješavati Newtonovom metodom umjesto jednostavnim iteracijama:

$$\mathbf{z}_n^{[m+1]} = \mathbf{z}_n^{[m]} + WF(\mathbf{z}_n^{[m]})\mathbf{I}, \quad m = 0, \dots, M - 1,$$

gdje je

$$W = \left[-\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \left(\mathbf{z}_n^{[m]} \right) \mathbf{I} \right]^{-1} = \left[l_1 - hl_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} \right]^{-1}.$$

Računanje W -a je relativno zahtjevno.

Radi ubrzanja se u iteracijama koristi W izračunat u prvoj iteraciji.

Ako nije zadovoljen kriterij konvergencije. W se ponovno računa.

Apsolutna pogreška metode dana je s

$$c_{k+1} h^{k+1} y^{(k+1)}(x_n) + \mathcal{O}(h^{k+2}),$$

- za Adamsove metode $c_{k+1} = \gamma_k^*$
- za BDF metode je $c_{k+1} = 1/(k+1)$.

Ako želimo da relativna točnost $k+1$ -og koraka bude manja od unaprijed zadane vrijednosti ε , tada moramo zahtijevati

$$\frac{c_{k+1} h^{k+1} |y^{(k+1)}(x_n)|}{y_\infty} \leq \varepsilon,$$

gdje je

$$y_\infty = \max_{0 \leq i \leq k} |y_i|.$$

Za aproksimaciju $y^{(k+1)}(x_n)$ koristimo stražnje diferencije

$$y^{(k+1)}(x_n) \approx \frac{y^{(k)}(x_n) - y^{(k)}(x_{n-1})}{h}.$$

Odavde slijedi

$$h^{k+1} y^{(k+1)}(x_n) \approx k! \left(\frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_n) - \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_{n-1}) \right).$$

Vrijednost $\frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_n)$ nalazi se u zadnjoj komponenti $z_{n,k}$ vektora \mathbf{z}_n , te (240) prelazi u

$$h^{k+1} y^{(k+1)}(x_n) \approx k!(z_{n,k} - z_{n-1,k}).$$

Budući da je

$$\mathbf{z}_n^{[0]} = \mathbf{P} \mathbf{z}_{n-1},$$

i jer matrica \mathbf{P} ne mijenja zadnju komponentu vektora \mathbf{z}_{n-1} , slijedi da je

$$z_{n,k}^{[0]} = z_{n-1,k}.$$

Sada pogrešku možemo zapisati u obliku

$$h^{k+1} y^{(k+1)}(x_n) \approx k! e_n l_k.$$

Koristeći ove aproksimacije, uvjet postignute točnosti zamjenjujemo s

$$\frac{c_{k+1} |e_n| |l_k| k!}{y_\infty} \leq \varepsilon.$$

Uz oznake

$$D_2 = \frac{|e_n|}{y_\infty} \quad \text{i} \quad E_2 = \frac{\varepsilon}{c_{k+1} |l_k| k!},$$

gornji kriterij možemo zapisati u obliku

$$D_2 \leq E_2.$$

Ukoliko gornji uvjet nije zadovoljen, tj. nismo postigli traženu točnost, zadnji korak se ponavlja, ali s manjim korakom integracije:

$$h_2 = \frac{h}{\rho_2},$$

gdje je

$$\rho_2 = 1.2 \left(\frac{D_2}{E_2} \right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Da smo u n -tom koraku koristili metodu jednog reda manju, dakle reda $k - 1$, analogan zahtjev na relativnu pogrešku glasio bi

$$\frac{c_k h^k |y^{(k)}(x_n)|}{y_\infty} \leq \varepsilon.$$

Iskoristivši aproksimaciju

$$h^k y^{(k)}(x_n) \approx k! z_{n,k},$$

gornju nejednakost zamjenjujemo s

$$\frac{c_k |z_{n,k}| k!}{y_\infty} \leq \varepsilon,$$

odnosno

$$D_1 \leq E_1,$$

pri čemu je

$$D_1 = \frac{|z_{n,k}|}{y_\infty} \quad \text{i} \quad E_1 = \frac{\varepsilon}{c_k k!}.$$

Slično razmatranje možemo provesti i za slučaj da smo koristili za jedan red veću metodu, dakle reda $k + 1$.

Zahtjev na relativnu pogrešku glasio bi

$$\frac{c_{k+2} h^{k+2} |y^{(k+2)}(x_n)|}{y_\infty} \leq \varepsilon.$$

Apksimirajući $y^{(k+2)}(x_n)$ podijeljenim razlikama unazad:

$$h^{k+2}y^{(k+2)}(x_n) \approx h^{k+1}y^{(k+1)}(x_n) - h^{k+1}|y^{(k+1)}(x_{n-1})$$

dobivamo

$$h^{k+2}y^{(k+2)}(x_n) \approx (e_n - e_{n-1})|l_k k!.$$

Uz oznake

$$D_3 = \frac{|e_n - e_{n-1}|}{y_\infty} \quad \text{i} \quad E_3 = \frac{\varepsilon}{c_{k+2}k!|l_k|},$$

nejednakost u uvjetu za relativnu pogreškuzamjenjujemo s

$$D_3 \leq E_3.$$

Ako je u n -tom koraku zadovoljen uvjet konvergencije prelazi se na izbor reda metode i koraka h u novom, $(n + 1)$ -om koraku.

Uz konstantu p_2 , pri izboru reda i koraka računaju se i konstante

$$p_1 = 1.3 \left(\frac{D_1}{E_1} \right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{i} \quad p_3 = 1.4 \left(\frac{D_3}{E_3} \right)^{\frac{1}{k+2}}.$$

Ukoliko je p_1 najmanja konstanta, tada se red metode smanjuje za jedan,

dok se red metode povećava za jedan ako je p_3 najmanja konstanta.

Red metode se ne mijenja ako je p_2 najmanja konstanta.

Za novi korak integracije uzima se

$$h_i = \frac{h}{p_i}.$$

Faktori 1.2, 1.3 i 1.4 kod računanja konstanti p_2 , p_1 i p_3 su težine kojima dajemo prednost na mijenjanju i smanjivanju reda metode.