Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Nelinearne jednadžbe:

- Uvod
- Metoda bisekcije
- Brzina konvergencije
- Regula falsi
- Newtonova metoda
- Sustavi nelinearnih jednadǆbi - Newtonova metoda
- Metoda sekante
- Jednostavne iteracije
- Problem višestrukih nultočki
- Primjeri
- Metode višeg reda

Uvod

Neka je zadana nelinearna funkcija

$$f : I \to \mathbb{R},$$

gdje je I neki interval. Tražimo $x \in I$ za koji je

$$f(x) = 0.$$

Takve točke x zovu se

- rješenja ili korijeni pripadne jednadžbe,
- ili nultočke funkcije f.

Za sustave nelinearnih jednadžbi je $I \subset \mathbb{R}^n$.

Nelinearna jednadžba može imati više rješenja. Numeričke metode ne garantiraju pronalazak svih rješenja.

Neprekidnost funkcije f

Minimalni zahtjev na funkciju f je da je ona neprekidna na I.

Neprekidnost npr. garantira da iz uvjeta

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

slijedi da f ima nultočku na intervalu $[a, b]$.

Metoda bisekcije (raspolavljanja)

Najjednostavnija metoda nalaženja nultočaka funkcije je **metoda bisekcije** ili **raspolavljanja**.

Osnovna pretpostavka za početak algoritma bisekcije je da postoje točke $a, b \in I$ takve da vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

To znači da f ima na (a, b) **barem jednu** nultočku.

- Najbolja aproksimacija nultočke je sredina intervala:

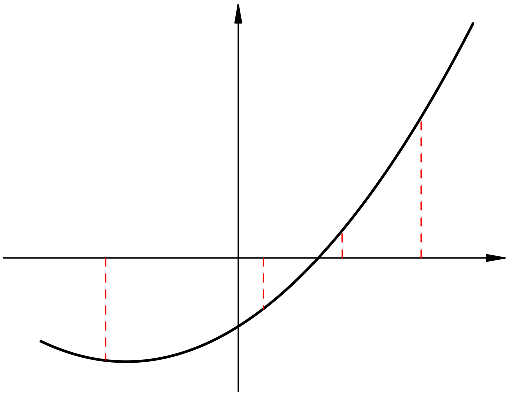
$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

- Ako je $f(x_0) = 0$ pronašli smo nultočku.

- Ako je $f(a) \cdot f(x_0) < 0$ nultočka je u intervalu (a, x_0)
- Ako je $f(a) \cdot f(x_0) > 0$ nultočka je u intervalu (x_0, b)
- Ponovimo postupak na intervalu (a, x_0) ili (x_0, b)

Metoda bisekcije grafički

Grafički, metoda bisekcije izgleda ovako



Algoritam:

- Inicijalizacija: $a_1 := a$, $b_1 := b$
- U n-tom koraku ($n = 1, 2, \ldots$) promatramo interval $[a_n, b_n]$
- $x_n :=$ polovište intervala $[a_n, b_n]$ tj.

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

- Ako je $f(a_n) \cdot f(x_n)$
  - $= 0$ – pronašli smo nultočku. Zaustavljamo algoritam.
  - < 0 – nultočka je u intervalu (a_n, x_n).
    $$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = x_n$$
  - > 0 – nultočka je u intervalu (x_n, b_n).
    $$a_{n+1} = x_n, \quad b_{n+1} = b_n$$

Konvergencija algoritma

Tvrdnja. Ako vrijede startne pretpostavke za metodu raspolavljanja, ona će konvergirati prema nekoj nultočki iz intervala $[a, b]$.

Iz konstrukcije metode, lako se izvodi pogreška n-te aproksimacije x_n nultočke α. Vrijedi:

$$\begin{aligned}|\alpha - x_n| &\leq b_n - x_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &= \cdots = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a).\end{aligned}$$

Sada je

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha - x_n| = 0.$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

Kriterij zaustavljanja

Iteracije zaustavljamo ako smo nultočku našli s unaprijed zadanom točnošću ε:

$$|\alpha - x_n| \leq \varepsilon.$$

Prije smo pokazali da je

$$|\alpha - x_n| \leq b_n - x_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n),$$

pa je dovoljno zahtijevati

$$b_n - a_n \leq 2\varepsilon$$

ili

$$b_n - x_n \leq \varepsilon.$$

Relacija

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}\,(b-a)$$

omogućava da se unaprijed odredi koliko je koraka raspolavljanja potrebno da bismo postigli točnost ε.

Da osiguramo $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, dovoljno je zahtijevati da je

$$\frac{1}{2^{n+1}}\,(b-a) \leq \varepsilon.$$

odnosno,

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2} - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Drugi pristup.

Ako je funkcija $f \in C^1[a, b]$ može se dobiti dinamička ocjena greške.

Po Teoremu srednje vrijednosti za funkciju f oko α, imamo

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\xi)(x_n - \alpha),$$

pri čemu je ξ između x_n i α.

Jer je α nultočka, tj. $f(\alpha) = 0$,

$$|f(x_n)| = |f'(\xi)|\,|\alpha - x_n|.$$

Neka je

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|, \quad |f'(\xi)| \geq m_1.$$

Ako je $m_1 > 0$, uvrštavanjem ove ocjene izlazi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Ako želimo da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, dovoljno je zahtijevati da je

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq \varepsilon,$$

Ovaj uvjet možemo provjeriti u svakoj iteraciji.

Da bi se izbjeglo računanje derivacije, ukoliko smo 'blizu' nultočke α,

$$m_1 \approx |f'(x_n)|$$

pa kriterij zaustavljanja glasi

$$\frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|} \leq \varepsilon.$$

Ovaj kriterij nije ovisan o izboru metode (bisekcije).

Metoda bisekcije - algoritam

```
x := (a + b) / 2;
dok je b - x > epsilon radi {
  ako je f(x) * f(b) < 0.0 tada {
    a := x
  };
  inače {
    b := x;
  };
  x := (a + b) / 2;
};
/* Na kraju je x ≈ alpha. */
```

Završne napomene

- Za primjenu metode bisekcije mora biti zadovoljeno
$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$
- Ako je
$$f(a) \cdot f(b) > 0,$$
to ne mora značiti da f nema nultočku unutar $[a, b]$.
- Može postojati nultočka parne višestrukosti (bez promjene predznaka).
- Može biti više nultočki s a da im je ukupna višestrukost paran broj.
- Boljom separacijom nultočaka možemo ćemo postići da je $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Nultočke parnog reda nemoguće je direktno naći metodom bisekcije.
- Umjesto f, treba raditi s funkcijom f/f'.

Brzina konvergencije

Definirajmo sada brzinu konvergencije niza iteracija. Te iteracije mogu, ali ne moraju biti iteracije za računanje nultočke funkcije.

Definicija. Niz iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ konvergira prema točki α

- s redom konvergencije p, $p \geq 1$,

ako je p najveći broj takav da vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq c\,|\alpha - x_{n-1}|^p, \quad n \in \mathbb{N}$$

za neki $c > 0$.

Ako je $p = 1$, kažemo da niz konvergira linearno prema α. U tom je slučaju nužno da je $c < 1$ i obično se c naziva faktor linearne konvergencije. $\square$

Prethodna definicija, katkad, nije zgodna za linearne iterativne algoritme.

Ako u prethodnoj formuli upotrijebimo indukciju za $p = 1$, $c < 1$, onda dobivamo da je

$$|\alpha - x_n| \leq c^n |\alpha - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

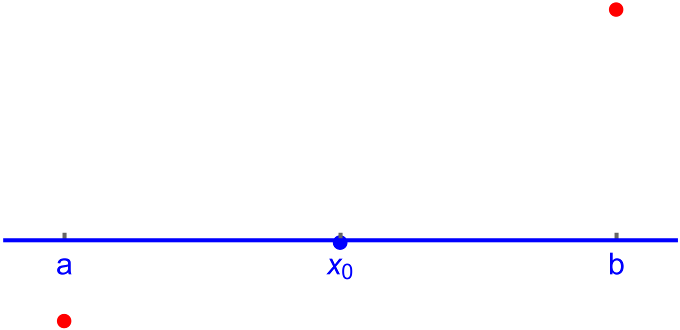
pause Katkad će biti mnogo lakše pokazati ovu relaciju, nego onu iz definicije. I u ovom slučaju reći ćemo da niz iteracija konvergira linearno s faktorom c.

Regula falsi

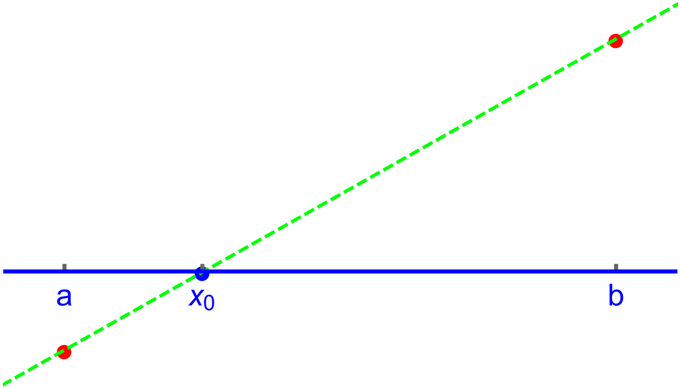
(metoda pogrešnog položaja)

Gdje se nalazi nultočka?

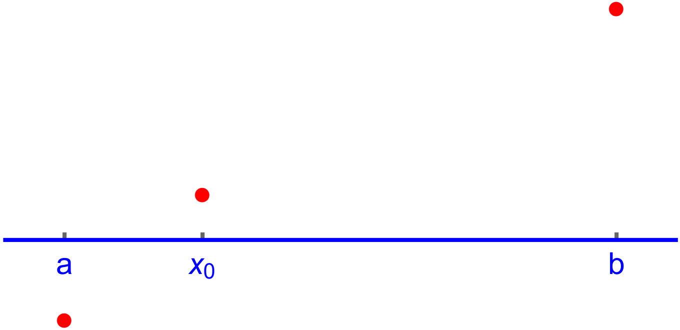
Metoda bisekcije:



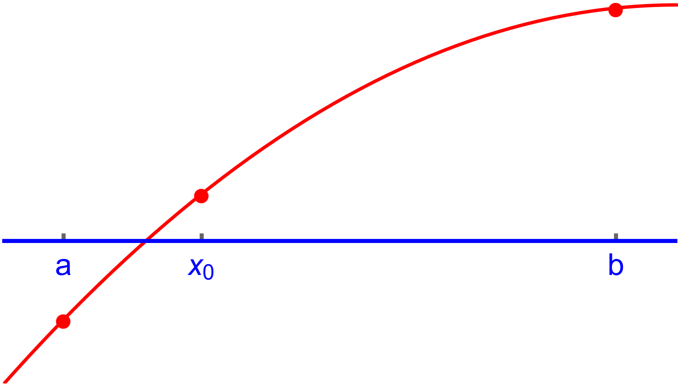
Možda ovako:



Sada nastavimo s a i x_0:

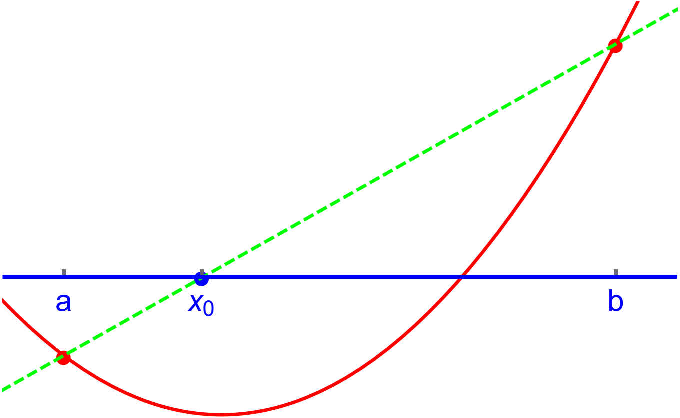


Funkcija izgleda ovako



Dobili smo manji interval nego s metodom bisekcije.

Ali je funkcija mogla izgledat i ovako



U ovom slučaju bi metoda bisekcije dala bolji rezultat.

Regula falsi (metoda pogrešnog položaja)

Pretpostavimo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

- neprekidna na intervalu $[a, b]$
- u rubovima intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Ideja metode:
Aproksimiramo funkciju f pravcem koji prolazi točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Traženu nultočku α tada možemo aproksimirati nultočkom tog pravca:

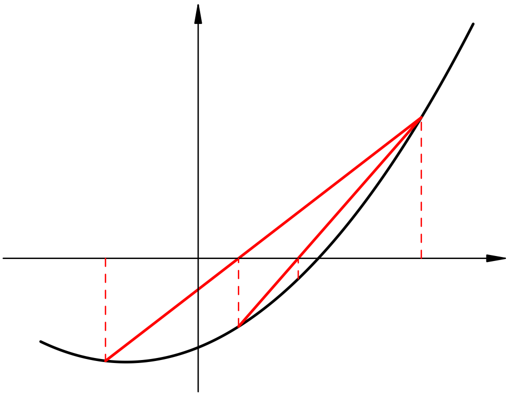
$$x_0 = b - f(b)\,\frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

Nakon toga,

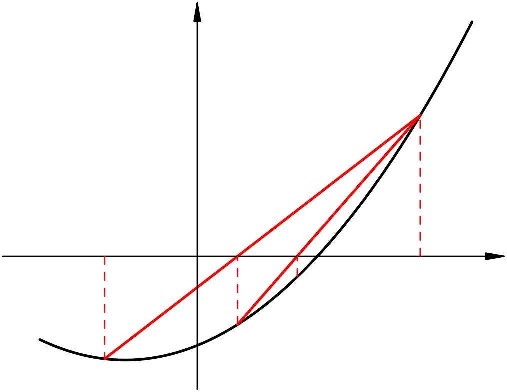
- pomaknemo ili točku a, ili točku b u točku x_0,
- ali tako da je nultočka ostala unutar novodobivenog intervala (test predznaka, kao kod raspolavljanja).

Postupak ponavljamo sve dok nismo postigli željenu točnost.

Grafički, regula falsi ili metoda pogrešnog položaja izgleda ovako



Uočite da širina intervala a_n, b_n u ovom slučaju ne ide u 0 iako niz aproksimacija konvergira (vjerojatno).



Regula falsi — osnovne ideje

Osnovne ideje metode su:

- aproksimacija pravcem
- i “zatvaranje” nultočke u određeni — sve manji interval.
- Iz slike zaključujemo da je to sasvim dobra ideja,
  za monotone i konveksne (ili konkavne) funkcije.

Nažalost, postoje ozbiljni problemi i s ovom metodom.

- Konvergencija je i dalje linearna, kao kod raspolavljanja.
- Može biti vrlo spora — sporija nego kod raspolavljanja.

Konvergencija

Metoda:

$$x_n = a_n - f(a_n)\,\frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

i

$$a_{n+1} = x_n,\ b_{n+1} = b_n \quad \text{ako je} \quad f(x_n)\cdot f(b_n) < 0$$

ili

$$a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = x_n \quad \text{ako je} \quad f(x_n)\cdot f(b_n) \geq 0.$$

Metoda generira niz segmenata

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \ldots$$

gdje je nultočka $\alpha \in [a_n, b_n]\ \forall n$.

$$[a_0, b_0] \subset [a_1, b_1] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \ldots$$

- Niz (a_n) je rastuć i ograničen. $\quad \Rightarrow \quad$ (a_n) je konvergentan.
- Niz (b_n) je rastuć i ograničen. $\quad \Rightarrow \quad$ (b_n) je konvergentan.

Neka je

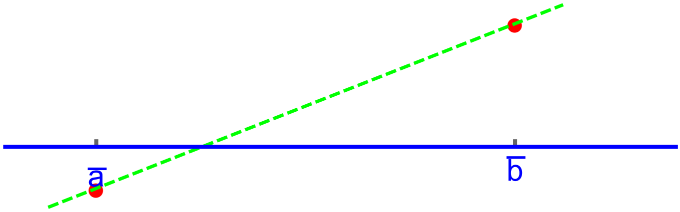
$$\bar{a} = \lim_n a_n = \sup_n a_n \quad \text{i} \quad \bar{b} = \lim_n b_n = \sup_n b_n$$

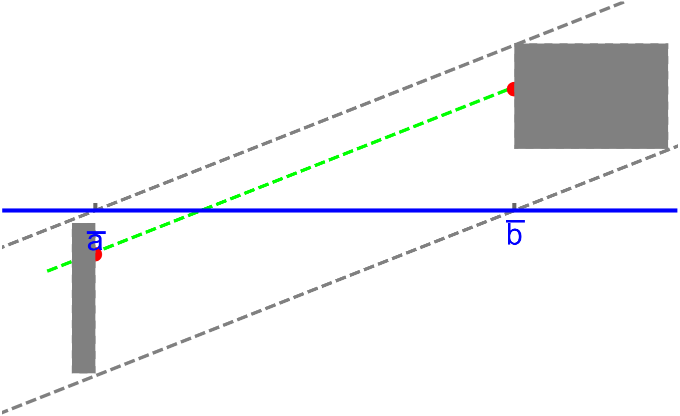
Tvrdnja. $f(\bar{a}) = 0$ ili $f(\bar{b}) = 0$.

Dokaz (skica). Pretpostavimo suprotno, $f(\bar{a}) \neq 0$ i $f(\bar{b}) \neq 0$.

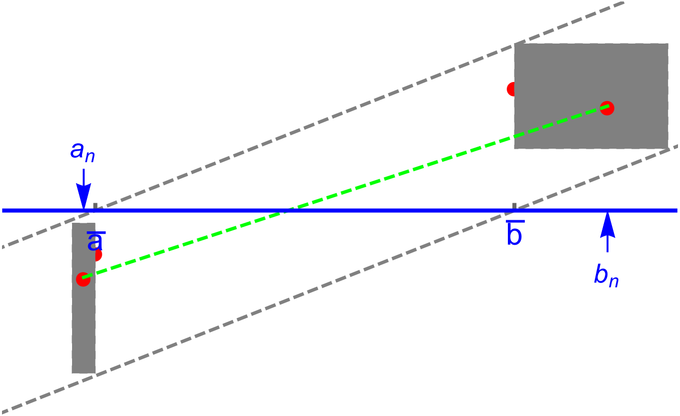
BSO: $f(\bar{a}) < 0$ i $f(\bar{b}) > 0$.


a
b


a
b



Konstruiramo ovakve pravokutne okoline!



Uočimo da je $x_n \in (\bar{a}, \bar{b})$.

$$x_n \in (\bar{a}, \bar{b}) \quad \Rightarrow \quad a_n \in (\bar{a}, \bar{b}) \quad \text{ili} \quad b_n \in (\bar{a}, \bar{b})$$
$$\Rightarrow \quad \bar{a} < a_{n+1} \quad \text{ili} \quad b_{n+1} < \bar{b}.$$

Kontradikcija.

Dakle,

$$\lim_n a_n = \alpha \quad \text{ili} \quad \lim_n b_n = \alpha.$$

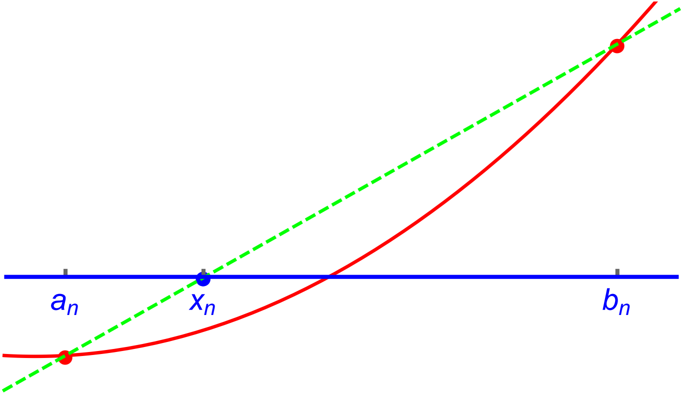
Red konvergencija

Malo teži problem.

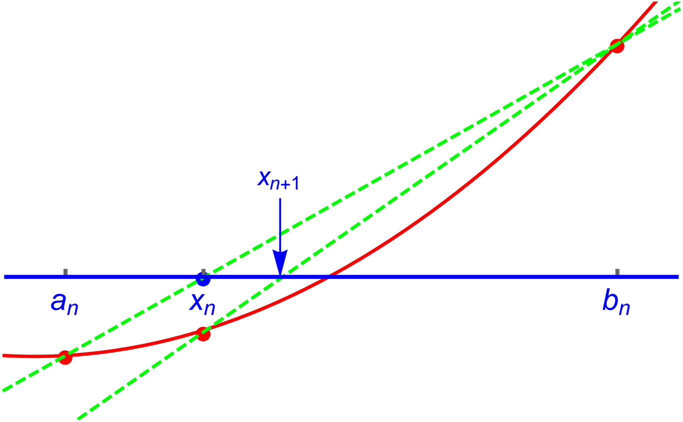
Pojačat ćemo pretpostavke (jednostavniji dokaz):

- $f \in C^2(a, b)$
- f' i f'' ne mijenjaju predznak na (a, b) (ili nekom (a_n, b_n)).
- Slabiji uvjet: $f \in C^1(a, b)$
- f' strogo rastuća/padajuća i ne mijenjaju predznak na (a, b) (ili nekom (a_n, b_n)).
- f je strogo monotona (rastuća/padajuća) i strogo konveksna/konkavna.

BSO. $f' > 0$ i $f'' > 0$.



f je konveksna i rastuća.



Uvijek vrijedi $\quad x_n < x_{n+1} < \alpha$.

Uz

$$a_{n+1=}x_n \quad \text{i} \quad b_{n+1} = b_n = b$$

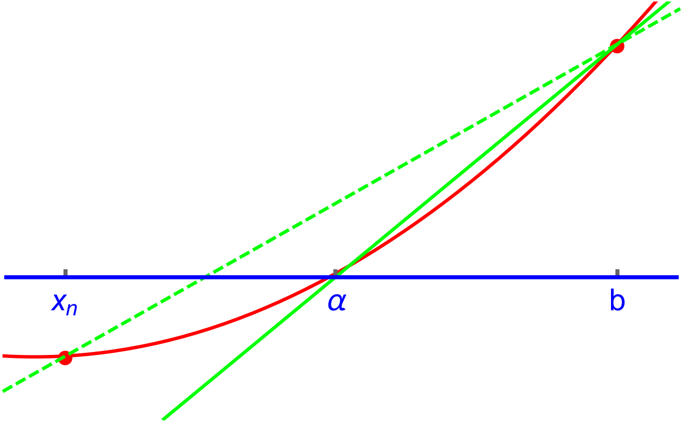
metoda glasi

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)}.$$

Ocijenimo pogrešku:

$$\alpha - x_{n+1} = \alpha - x_n + f(x_n)\,\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} = \alpha - x_n - |f(x_n)|\,\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)}$$

jer je $f < 0$.



Uočimo da koeficijenti smjera zadovoljavaju

$$0 < \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n} < \frac{f(b) - f(\alpha)}{b - \alpha}.$$

$$0 < \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n} < \frac{f(b) - f(\alpha)}{b - \alpha}.$$

$$\Rightarrow -\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} < -\frac{b - \alpha}{f(b) - f(\alpha)} = -\frac{b - \alpha}{f(b)}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\alpha - x_{n+1} &= \alpha - x_n - |f(x_n)| \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \\
&< \alpha - x_n - |f(x_n)| \frac{b - \alpha}{f(b)} \\
&= \alpha - x_n - |f(x_n) - f(\alpha)| \frac{b - \alpha}{f(b)} \\
&= \alpha - x_n - |f'(\xi_n)||x_n - \alpha| \frac{b - \alpha}{f(b)}
\end{aligned}$$

Znači, za $\xi_n \in (x_n, \alpha)$ je

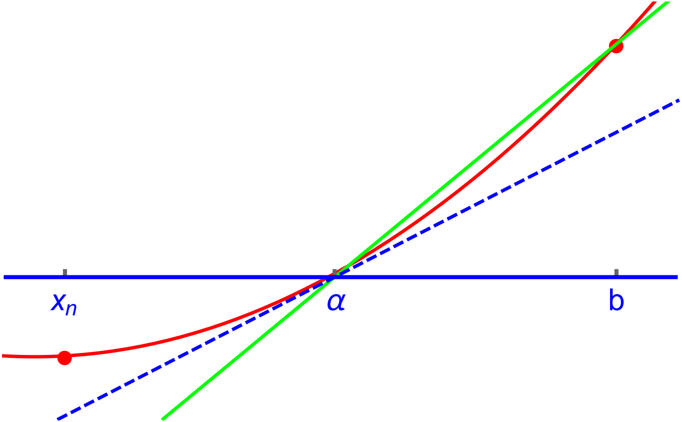
$$\alpha - x_{n+1} < (\alpha - x_n)\left[1 - |f'(\xi_n)|\,\frac{b-\alpha}{f(b)}\right]$$

Zbog konveksnosti je f' rastuća pa je

$$\xi_n < \alpha \quad \Rightarrow \quad f'(\xi_n) < f'(\alpha)$$

i

$$\alpha - x_{n+1} < (\alpha - x_n)\left[1 - f'(\alpha)\,\frac{b-\alpha}{f(b)}\right]$$



Sekanta je strmija od tangente:

$$0 < f'(\alpha) < \frac{f(b) - f(\alpha)}{b - \alpha} = \frac{f(b)}{b - \alpha}$$

$$0 < f'(\alpha) < \frac{f(b)}{b-\alpha} \quad \Rightarrow \quad 0 < f'(\alpha)\,\frac{b-\alpha}{f(b)} < 1.$$

Znači, iz

$$\alpha - x_{n+1} < (\alpha - x_n)\left[1 - f'(\alpha)\,\frac{b-\alpha}{f(b)}\right]$$

slijedi da je

$$|\alpha - x_{n+1}| < |\alpha - x_n|\left[1 - f'(\alpha)\,\frac{b-\alpha}{f(b)}\right] = C|\alpha - x_n|$$

gdje je

$$0 < C < 1.$$

Konvergencija metode regula falsi je **linearna**.

Newtonova metoda (Metoda tangente, Newton-Raphsonova metoda)

Ideja metode: Za danu točku x_0

- povući tangentu na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$,

i definirati novu aproksimaciju x_1

- u točki gdje ta tangenta siječe os x.

Drugi pristup:

Funkciju f aproksimiramo u točki x_n Taylorovim polinomom 1. stupnja:

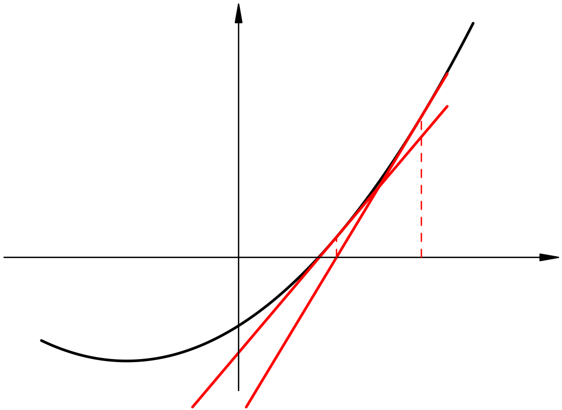
$$P(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Nultočku funkcije f aproksimiramo s nultočkom polinoma P:

$$P(x_{n+1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Za računanje je dovoljno pretpostaviti da $f'(x_n)$ postoji (neprekidnost nije bitna) i da je $f'(x_n) \neq 0$ u svim točkama x_n.

Newtonova metoda



Konvergencija Newtonove metode

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu I koji sadrži nultočku α.

Ako niz aproksimacija x_n generiran Newtonovom metodom konvergira prema α,

- onda je brzina konvergencije (barem) kvadratna,

i na limesu vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Dokaz. Za $x \in I$, dobivamo

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2,$$

pri čemu je ξ_n između x i x_n, tj. $\xi_n \in I$.

Uvrštavanjem nultočke $x = \alpha \in I$, dobivamo

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2.$$

Primjer divergencije Newtonove metode

Newtonova metoda ne garantira konvergenciju!

Primjer. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s $f(x) = \text{arctg} x$. Tada je $\alpha = 0$ rješenje jednadžbe $f(x) = 0$.

Newtonove iteracije su definirane s

$$x_{m+1} = x_n - \left(1 + x_n^2\right) \text{arctg} x.$$

Ako izaberemo x_0 tako da je

$$\text{arctg}|x_0| > \frac{2|x_0|}{1 + x_0^2}$$

tada niz $(|x_n|)$ divergira:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty.$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Uz pretpostavku $f'(x_n) \neq 0$, slijedi

$$\begin{aligned} \alpha &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \\ &= x_{n+1} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \end{aligned}$$

Za greške u susjednim iteracijama vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

s tim da je ξ_n između x_n i α.

Po pretpostavci, niz x_n konvergira prema α.
Onda mora vrijediti i $\xi_n \to \alpha$.

Iz $f \in C^2(I)$ slijedi da su f' i f'' neprekidne na I, pa dobivamo

$$f'(x_n) \to f'(\alpha), \quad f''(\xi_n) \to f''(\alpha).$$

Na kraju, iz pretpostavke da je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$.

Prijelazom na limes $x_n \to \alpha$ dobivamo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

$\square$

Odavdje vidimo da je Newtonova metoda, **kad konvergira**,

- (barem) kvadratno konvergentna.

Ako je $f''(\alpha) = 0$, konvergencija može biti i brža od kvadratne!

Zaključak vrijedi

- samo ako je $f'(\alpha) \neq 0$, tj. α je jednostruka nultočka.

Za višestruke nultočke ovo ne vrijedi, jer

- konvergencija može biti i samo linearna (malo kasnije).

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i neka je

$$I_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| \leq \varepsilon\}$$

segment radijusa ε oko α.

Pretpostavimo da je $f \in C^2(I_\varepsilon)$ za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$.
Definiramo brojeve

$$m_1(\varepsilon) := \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|, \quad M_2(\varepsilon) := \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|,$$

i, na kraju,

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}.$$

Ako je ε toliko mali da vrijedi

$$2\varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

onda je, za bilo koju startnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$,

- Newtonova metoda dobro definirana,
- i konvergira barem kvadratno prema jedinoj nultočki $\alpha \in I_\varepsilon$.

Napomena. Teorem kaže da postoji okolina I_ε oko nultočke α takva da je metoda konvergentna za svaki izbor $x_0 \in I_\varepsilon$ (uz uvjet da je $f'(\alpha) \neq 0$).

Dokaz. Zato što je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$. To znači

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{M_2(\varepsilon)}{m_1(\varepsilon)} = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| < \infty,$$

pa postoji dovoljno mali $\varepsilon > 0$, takav da je $2\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

- Uočimo da je $f'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I_\varepsilon$ (jer je $M_2(\varepsilon)\, m_1(\varepsilon) < \infty$).
- α je jedina nultočka funkcije f u I_ε.
  $f' \neq 0$ pa je f strogo monotona.

Neka je $x_n \in I_\varepsilon$ bilo koja aproksimacija.

Onda je $f'(x_n) \neq 0$, i korak Newtonove metode je dobro definiran

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Relacija za greške dviju susjednih iteracija glasi

$$\alpha - x_{?n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je ξ_n između x_n i α, pa vrijedi i $\xi_0 \in I_\varepsilon$.

Za drugi faktor na desnoj strani onda vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Sada

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_n|^2 M(\varepsilon) = (\text{ iskoristimo } |\alpha - x_n| \leq \varepsilon) \\ &\leq |\alpha - x_n|\, \varepsilon M(\varepsilon) = (\text{ zbog } \varepsilon M(\varepsilon) < 1/2 < 1) \\ &< |\alpha - x_0| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} \in I_\varepsilon.$$

Indukcijom slijedi da ako je $x_0 \in I_\varepsilon$ onda je i $x_n \in I_\varepsilon, \ \forall n$.

Preostaje još samo dokazati konvergenciju niza x_n prema α.

Relacija za greške dviju susjednih iteracija je

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je ξ_n između x_n i α, pa je $\xi_n \in I_\varepsilon$.

Za drugi faktor na desnoj strani opet vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Sada redom dobivamo

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_n|^2 M(\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon M(\varepsilon) |\alpha - x_n| \\ &\leq \ldots \text{(induktivno spuštamo } n \text{ do nule)} \\ &\leq \left(\varepsilon M(\varepsilon)\right)^{n+1} |\alpha - x_0|. \end{aligned}$$

Zbog

$$\varepsilon M(\varepsilon) < 1/2 < 1$$

odavde slijedi da

$$x_n \to \alpha \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

$\square$

Globalna konvergencija Newtonove metode

U analizi konvergencije i ocjenama greške koristili smo pretpostavku da je

- f strogo monotona na $[a, b]$,
- tj. da prva derivacija f' ima fiksni predznak na $[a, b]$.

Ako i druga derivacija ima fiksni predznak na tom intervalu, onda možemo dobiti i

- globalnu konvergenciju Newtonove metode,
- uz odgovarajući izbor startne točke x_0,

slično kao kod regule falsi.

Teorem. Neka je $f \in C^2[a,b]$ i neka je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ako prva i druga derivacija f' i f'' nemaju nultočku u $[a,b]$, tj.

- ako f' i f'' imaju konstantan predznak na $[a,b]$,

onda Newtonova metoda konvergira prema

- jedinstvenoj jednostrukoj nultočki α funkcije f u $[a,b]$,

i to za svaku startnu aproksimaciju $x_0 \in [a,b]$, za koju vrijedi

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Dokaz. Gledamo samo jedan od četiri moguća slučaja za predznake f' i f''.

BSO $f' > 0$ i $f'' > 0$ na $[a, b]$, tj.f je monotono rastuća i konveksna na $[a, b]$.

Zbog $f'' > 0$, startna aproksimacija x_0 mora zadovoljavati

$$f(x_0) > 0 \quad \text{tj.} \quad \alpha < x_0$$

jer f raste.

Neka je $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ niz iteracija generiran Newtonovom metodom iz bilo koje startne točke x_0 za koju je $f(x_0) > 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Indukcijom pokažimo da je

$$\alpha < x_{n+1} \leq x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Jer je $f(x_n) > 0$ i $f' > 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

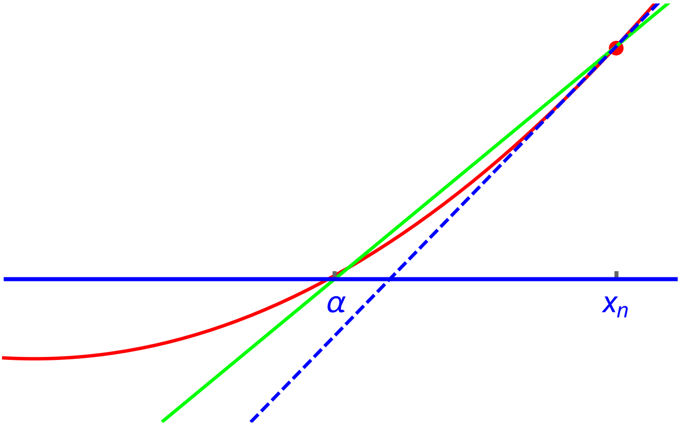
što pokazuje da niz (x_n) monotono pada.

Neka je $x_n > \alpha$. Tada

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - \alpha &= x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \\
&= x_n - \alpha - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha} \frac{x_n - \alpha}{f'(x_n)} \\
&= (x_n - \alpha) \left[1 - \frac{\frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha}}{f'(x_n)} \right]
\end{aligned}
$$

Argument: slično kao u regula falsi, koeficijent smjera sekante manji je od koeficijenta smjera tangente:

$$
\frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha} < f'(x_n) \quad \text{tj.} \quad 1 - \frac{\frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha}}{f'(x_n)} > 0.
$$



Tangenta je strmija od sekante:

$$0 < \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha} < f'(x_n)$$

Sada je

$$x_{n+1} - \alpha = (x_n - \alpha)\left[1 - \frac{\frac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}}{f'(x_n)}\right] > 0$$

tj.

$$x_{n+1} > \alpha.$$

(x_n) padajući i odozdo ograničen s α

$\Rightarrow$ (x_n) konvergentan

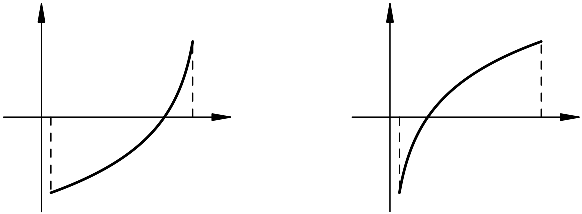
$\Rightarrow$ (prije dokazano) $\lim_n x_n = \alpha$. □

Izbor startne točke za Newtonovu metodu

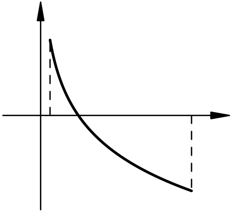
Ako pogledamo graf funkcije f na $[a, b]$, startnu točku x_0

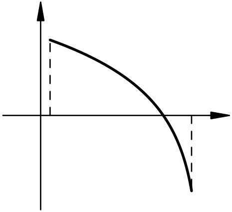
- treba odabrati na “strmijoj” strani grafa funkcije.

Izbor startne točke x_0 ako je $f' > 0$.



Izbor startne točke x_0 ako je $f' < 0$.





Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Pretpostavimo da sve iteracije x_n leže unutar intervala $[a, b]$.
Onda možemo dobiti i ocjenu

- lokalne greške susjednih iteracija u Newtonovoj metodi,

u terminima veličina M_2 i m_1.

Iz ranije relacije za grešku

$$\alpha - x_n = -(\alpha - x_{n-1})^2 \, \frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})},$$

gdje je ξ_{n-1} između nultočke α i x_{n-1}, odmah slijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} \, (\alpha - x_{n-1})^2.$$

Ova ocjena nije naročito korisna za praksu, jer nultočku α ne znamo.
Tražimo ocjenu preko veličina koje znamo izračunati.

Za dvije susjedne iteracije x_{n-1} i x_n u Newtonovoj metodi vrijedi

$$
\begin{aligned}
f(x_n) &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \\
&\qquad + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}\,(x_n - x_{n-1})^2,
\end{aligned}
$$

pri čemu je ξ_{n-1} između x_{n-1} i x_n.

Jer je

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

slijedi

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}\,(x_n - x_{n-1})^2.$$

Iz $x_{n-1}, x_n \in [a, b]$, pa onda i $\xi_{n-1} \in [a, b]$ dobivamo

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Kao i kod metode bisekcije, ako je $m_1 > 0$, vrijedi ocjena

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Kombinacijom ovih ocjena dobivamo

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Ako je ε tražena točnost, onda zahtjev

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon$$

garantira da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, do na greške zaokruživanja.
Uz ovaj, možemo koristiti i raniji test zaustavljanja

$$|f(x_n)| \leq m_1 \varepsilon.$$

Sustavi nelinearnih jednadžbi - Newtonova metoda

Izvor: J. Stoer, R. Bulirsch,
'Introduction to Numerical Analysis', 2nd ed.,Springer-Verlag

Neka su $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ dane funkcije.

Tražimo rješenje sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Sustav možemo zapisati u obliku:

$$F(x) = 0,$$

gdje je

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

Jacobijan

Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je diferencijabilna u točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ako postoji $n \times n$ matrica A za koju je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

$A \quad \to \quad$ Jacobijeva matrica u Df (j_F) U x_0.

$$Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j}$$

Lema. Ako Df postoji za svaki x iz konveksnog područja $C_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ i ako postoji konstanta γ za koju je

$$\|Df(x) - Df(y)\| \leq \gamma \|x - y\| \quad \forall x, y \in C_0,$$

tada za svaki $x, y \in C_0$ vrijedi ocjena

$$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x - y)\| \leq \frac{\gamma}{2} \|x - y\|^2 .$$

Newtonova metoda za sustav jednadžbi

Funkciju f u točki x_k aproksimiramo s

$$P(x) = f(x_k) + Df(x_k)(x - x_k).$$

Nova aproksimacija x_{k+1} je nultočka funkcije P:

$$x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1} f(x_k).$$

Ovo je **Newtonova metoda** za sustav nelinearnih jednadžbi.

Napomena. U iteracijama ne računamo inverz matrice $Df(x_n)$ već rješavamo sustav

$$Df(x_k)(x - x_k) = -f(x_k).$$

Kvadratična konvergencija

Teorem. Neka je $C \subseteq \mathbb{R}^n$ dan otvoren skup. Nadalje, neka je C_0 konveksni skup i $\bar{C}_0 \subset C$ te neka je $f : C \to \mathbb{R}^n$ funkcija koja je diferencijabilna na C_0 i neprekidna na C. Neka su za neki $x_0 \in C_0$

dane pozitivne konstante sa sljedećim svojstvima:

$$
\begin{aligned}
S_r(x_0) &= \{x| \parallel x - x_0 \parallel < r\} \subseteq C_0, \\
h &= \frac{\alpha\beta\gamma}{2} < 1, \\
r &= \frac{\alpha}{1-h},
\end{aligned}
$$

i neka $f(x)$ zadovoljava

a) $\|Df(x) - Df(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C_0,$

b) $Df(x)^{-1}$ postoji i zadovoljava $\left\|Df(x)^{-1}\right\| \leq \beta, \quad \forall x \in C_0$

c) $\left\|Df(x_0)^{-1} f(x_0)\right\| \leq \alpha.$

Tada

1. Počevši od x_0, svaka točka

$$x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1} f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

   je dobro definirana i zadovoljava $x_k \in S_r(x_0)$ za sve $k \geq 0$.

2. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha$ postoji i zadovoljava $\alpha \in \overline{S_r(x_0)}$ i $f(\alpha) = 0$.

3. Za sve $k \geq 0$ je

$$\|x_k - \alpha\| \leq \alpha \frac{h^{2k-1}}{1 - h^{2k}}.$$

   Jer je $0 < h < 1$, Newtonova metoda je konvergentna najmanje kvadratično.

Uz malo jače uvjete, nultočka je jedinstvena.

Teorem. (Newton-Kantorovich) Neka je dana funkcija $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i konveksni skup $C_0 \subseteq C$ te neka je f neprekidno diferencijabilna na C_0 i zadovoljava uvjete

a) $\|Df(x) - Df(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C_0,$

b) $\left\|Df(x_0)^{-1} f(x_0)\right\| \leq \alpha$

c) $\left\|Df(x_0)^{-1}\right\| \leq \beta,$

za neki $x_0 \in C_0$. Definirajmo

$$\begin{aligned} h &= \alpha\beta\gamma, \\ r_{1,2} &= \frac{1 \mp \sqrt{1 - 2h}}{h}\alpha. \end{aligned}$$

Ako je $h \leq \frac{1}{2}$ i $\overline{S_{r_1}(x_0)} \subset C_0$ tada se niz (x_k) definiran s

$$x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1} f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

nalazi u $S_{r_1}(x_0)$ i konvergira k jedinstvenoj nultočki funkcije f u $C_0 \cap S_{r_2}(x_0)$.

Metoda sekante

- U Newtonovoj metodi koristimo **tangentu** u točki x_0 kao aproksimaciju funkcije f.
- Ako umjesto tangente koristimo **sekantu** u točkama x_0 i x_1 $\rightarrow$ metoda sekante
- Za razliku od metode regula falsi, ne provjeravamo predznake!
- Dakle. zadnje dvije aproksimacije dfiniraju sekantu i nova aproksimacija je nultočka sekante.

Iz početnih x_0 i x_1 generiramo niz (x_n).

Sekanta definirana s x_{n-1} i x_n je

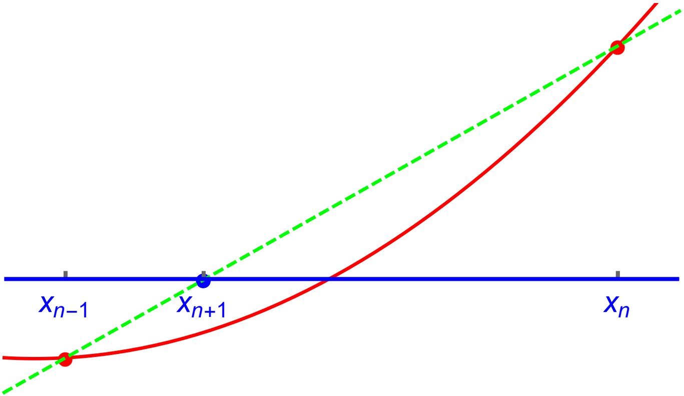
$$P(x) = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n).$$

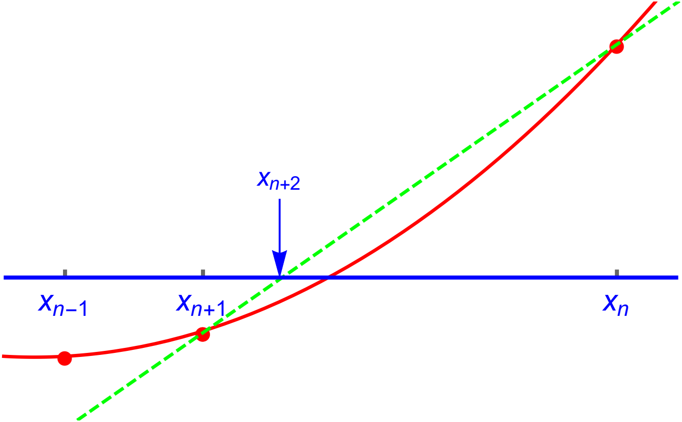
Nova aproksimacija je nultočka sekante.

Metoda sekante:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n > 1.$$

Metoda sekante — grafički





Primijetite da je $n+1$-va iteracija izašla izvan početnog intervala.

Red konvergencije metode sekante

Metoda sekante:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n > 1.$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \alpha &= x_n - \alpha - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]} \\
&= (x_n - \alpha)\left[1 - \frac{f[x_n, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]}\right] \\
&= (x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha)\frac{f[x_{n-1}, x_n, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]}
\end{aligned}$$

Ako je $f \in C^2$:

$$\begin{aligned} f[x_{n-1}, x_n] &= f'(\xi_1), \quad \xi_1 \in I[x_{n-1}, x_n] \\ f[x_{n-1}, x_n, \alpha] &= \frac{1}{2} f''(\xi_2), \quad \xi_2 \in I[x_{n-1}, x_n, \alpha] \end{aligned}$$

Ako je α jednostruka nultočka onda

- $f'(\alpha) \neq 0$
- postoji ε-okolina J oko α
- postoji M

takvi da je

$$\left| \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_2)}{f'(\xi_1)} \right| < M, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in J.$$

Definirajmo

$$e_i = M|x_i - \alpha| \quad \text{i} \quad e_0, e_1 < \min\{1, \varepsilon M\}$$

Iz

$$x_{n+1} - \alpha = (x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha)\frac{f[x_{n-1}, x_n, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]}$$

slijedi

$$e_{n+1} \leq e_n e_{n-1}$$

ili uz $E_n = \ln e_n$

$$E_{n+1} \leq E_n + E_{n-1}.$$

Definirajmo niz

$$q_0 = E_0,\ q_1 = E_1, \quad q_{n+1} = q_n + q_{n-1}.$$

Lako se indukcijom provjeri da je $\quad E_n \leq q_n$.

Potražimo rješenje u obliku $q_n = CK^n$ (karakteristična jednadba):

$$CK^{n+1} = CK^n + CK^{n-1} \quad \Rightarrow \quad K^2 = K + 1.$$

$$K_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad K_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Rješenje je oblika

$$q_n = c_1 K_1^n + c_2 K_2^n.$$

c_1 i c_2 se određuju iz početnih uvjeta $\ln e_0 = q_0$ i $\ln e_1 = q_1$.

Sada je

$$e_n = e^{E_n} \le e^{q_n} = e^{c_1 K_1^n} e^{c_2 K_2^n}.$$

Jer je $-1 < K_2 < 0$, $\lim_n K_2^n = 0$, ovo možemo ograničiti s

$$e_n \le C e^{c_1 K_1^n} = C B^{K_1^n}$$

za neki C i $B = \exp c_1$.

Za $B = \max\{e_0, \sqrt[K_1]{e_1} < 1\}$ gornja nejednakost je zadovoljena za e_0 i e_1 pa onda induktivno i za svaki n.

Dakle, red konvergencije metode sekanteje barem

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$$

Između linearne i kvadratične konvergencije.

- Newtonova metoda - $p = 2$ uz računanje vrijednosti funkcije i derivacije
- metoda sekante - $p = 1.618$ uz jedno računanje vrijednosti funkcije
- u dva koraka metode sekante dva puta računamo funkciju $\rightarrow$ približno ista složenost kao Newtonova metoda.
- U dva koraka metode sekante dobijemo red $q^2 = q + 1 = 2.618$ - bolje nego Newtonova metoda!

Jednostavne iteracije

Osnovna ideja:

Jednadžbu

$$f(x) = 0$$

zapišemo u ekvivalentnom obliku obliku

$$x = \varphi(x).$$

Ekvivalentno znači: $f(\alpha) = 0 \; \Leftrightarrow \; \alpha = \varphi(\alpha)$.

Metoda jednostavnih iteracija: Za zadani x_0 definiramo niz

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0.$$

Osnovno pitanje: kada niz (x_n) konvergira i da li je $\lim_n x_n = \alpha$'

Primjer. Reformulirajmo problem

$$x^2 - a = 0, \quad a > 0$$

u oblik jednostavne iteracije.

Na primjer, to možemo napraviti na jedan od sljedećih načina:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije $x = x + c(x^2 - a)$ za neki $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = 0.5\,(x + a/x)$.

Primjer. Newtonova metoda, također, pripada klasi jednostavnih iteracija, jer je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Osnovni teoremi

Rješenje jednadžbe

$$x = \varphi(x).$$

se naziva fiksna točka.

Lema. Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$$

Tada problem $x = \varphi(x)$ ima barem jedno rješenje na $[a, b]$.

Dokaz. Za neprekidnu funkciju $\varphi(x) - x$ na $[a, b]$ zbog
$a \leq \varphi(x) \leq b, \quad \forall x \in [a, b]$, vrijedi

$$\varphi(a) - a \geq 0, \quad \varphi(b) - b \leq 0.$$

Dakle, funkcija $\varphi(x) - x$ je promijenila predznak na $[a, b]$, a to može samo prolaskom kroz nultočku (neprekidna je!).

Lema.

Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b].$$

Nadalje, pretpostavimo da postoji konstanta q, takva da je $0 < q < 1$ i vrijedi

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q\,|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Tada $x = \varphi(x)$ ima jedinstveno rješenje α unutar $[a, b]$. Također, niz iteracija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0$$

konvergira prema α za proizvoljni $x_0 \in [a, b]$.

Dokaz. Prema prethodnoj lemi, postoji barem jedno rješenje $\alpha \in [a, b]$.

Kada bi postojalo i drugo rješenje $\beta \neq \alpha$

$$\varphi(\alpha) = \alpha \quad \text{i} \quad \varphi(\beta) = \beta,$$

tada bi

$$|\alpha - \beta| = |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| \leq q|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|.$$

što je kontradikcija.

Rješenje je jedinstveno.

Konvergencija. Neka je $x_0 \in [a, b]$ proizvoljan.

Jednostavnom indukcijom slijedi

$$|\alpha - x_n| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|\alpha - x_{n-1}| \leq \ldots \leq q^n|\alpha - x_0|,$$

za $n \geq 1$.

Ako pustimo $n \to \infty$, onda $q^n \to 0$, pa vrijedi $x_n \to \alpha$. $\square$

Primijetimo da posljednja formula znači da jednostavna iteracija konvergira linearno s faktorom q.

Lema vrijedi i na $\mathbb{R}^n$!

Ako je φ derivabilna na $[a, b]$, onda je

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y), \quad \xi \text{ između } x \text{ i } y,$$

za sve $x, y \in [a, b]$. Definiramo

$$q := M_1 = \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|,$$

onda možemo pisati

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x \in [a, b].$$

Ukoliko je $q < 1$ možemo primijeniti prethodnu lemu.

Teorem. Neka je $\varphi \in C^1[a,b]$ takva da je $\varphi([a,b]) \subseteq [a,b]$ i neka je

$$q := M_1 = \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| < 1.$$

Tada vrijedi:

1. $x = \varphi(x)$ ima točno jedno rješenje $\alpha \in [a,b]$,
2. za proizvoljni $x_0 \in [a,b]$ i jednostavne iteracije $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \alpha, \\ |\alpha - x_n| &\leq q^n |\alpha - x_0| \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} &= \varphi'(\alpha). \end{aligned}$$

Dokaz. Jednostavno iz prethodne leme.

Ocjena greške

Za dvije susjedne iteracije vrijedi

$$
\begin{aligned}
|x_n - x_{n-1}| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \\
&= |\varphi'(\xi_{n-1})|\,|x_{n-1} - x_{n-2}| \\
&\leq q|x_{n-1} - x_{n-2}| \\
&\vdots \\
&\leq q^{n-1}|x_1 - x_0|
\end{aligned}
$$

pri čemu je $\xi_{n-1} \in I[x_{n-2}, x_{n-1}]$.

Sada promatrajmo ponašanje sljedećeg niza

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \\
&\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq q^p|x_n - x_{n-1}| + \cdots + q|x_n - x_{n-1}| \\
&= q\frac{1-q^p}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = (\text{vrijedi } 1 - q^p \leq 1) \\
&\leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.
\end{aligned}$$

Na limesu za $p \to \infty$ vrijedi $x_{n+p} \to \alpha$, pa

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Teorem o konvergenciji možemo napisati i malo drugačije.

Teorem. Neka je α rješenje problema $x = \varphi(x)$ i neka je φ neprekidno diferencijabilna na nekoj okolini od α i neka je $|\varphi'(\alpha)| < 1$. Tada vrijede svi rezultati prethodnog teorema, uz pretpostavku da je x_0 dovoljno blizu α.

Dokaz. Po pretpostavci postoji $\varepsilon > 0$ i $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ takav da je

$$\max_{x \in I} |\varphi'(x)| \leq q < 1.$$

Tada je $\varphi(I) \subseteq I$, jer $|\alpha - x| \leq \varepsilon$ povlači

$$|\alpha - \varphi(x)| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x)| = |\varphi'(\xi)||\alpha - x| \leq q|\alpha - x| \leq \varepsilon.$$

Sada možemo primijeniti prethodni teorem za $[a, b] = I$. □

Primjer iteracijskih funkcija

Primjer. Za problem $x^2 - a = 0$, $a > 0$ definirali smo tri jednostavne iteracijske funkcije:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije $x = x + c(x^2 - a)$ za neki $c \neq 0$,

   $\varphi(x) = x^2 + x - a \quad \rightarrow \quad \varphi'(x) = 2x + 1$ i u nultočki $\alpha = \sqrt{a}$ je

   $$\varphi'(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a} + 1 > 1,$$

   - iteracijska funkcija neće konvergirati.

   U općenitijem je slučaju $\varphi(x) = x + c(x^2 - a)$, pa je

   $$\varphi'(x) = 1 + 2cx \quad \rightarrow \quad \varphi'(\sqrt{a}) = 1 + 2c\sqrt{a}.$$

   Da bismo osigurali konvergenciju, mora biti

   $$-1 < 1 + 2c\sqrt{a} < 1, \quad \text{odnosno} \quad -\frac{1}{\sqrt{a}} < c < 0.$$

2. $x = a/x$,

$$\varphi(x) = a/x \quad \to \quad \varphi'(x) = -a/x^2, \quad \text{pa je}$$

$$\varphi'(\sqrt{a}) = -1,$$

- iteracijska funkcija neće konvergirati.

3. $x = 0.5\,(x + a/x)$.

$$\varphi(x) = 0.5\,(x + a/x) \quad \to \quad \varphi'(x) = 0.5\,(1 - a/x^2), \quad \text{pa je}$$

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 0,$$

- iteracijska funkcija konvergira u okolini nultočke $\alpha = \sqrt{a}$.

Posljednja iteracijska funkcija je Newtonova metoda za $x^2 - a = 0$, a poznavali su ju još Babilonci.

Iterativne metode viših redova

Jednostavne iteracijske funkcije mogu se koristiti za konstrukciju iterativnih metoda proizvoljno visokog reda p.

Teorem. Neka je α rješenje od $x = \varphi(x)$ i neka je φ p puta neprekidno diferencijabilna za sve x u okolini α, za neki $p \geq 2$. Nadalje, pretpostavimo da je

$$\varphi'(\alpha) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0.$$

Ako je startna vrijednost x_0 dovoljno blizu α, iteracijska funkcija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

imat će red konvergencije p i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

Dokaz. Razvijmo φ u okolini α u Taylorov red oko α i stavimo $x = x_n$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \varphi(x_n) &= \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \cdots \\ &\quad + \frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p, \end{aligned}$$

za neki $\xi_n \in I(x_n, \alpha)$.

Jer $\varphi(\alpha) = \alpha$ i $\varphi^{(k)}(\alpha) = 0$ za $k = 1, \ldots, p-1$, slijedi

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p,$$

odnosno

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}\,(x_n - \alpha)^p.$$

To znači da $x_n \to \alpha$, pa i $\xi_n \to \alpha$, što daje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

$\square$

Primjena na Newtonovu metodu

Korištenjem prethodnog teorema možemo analizirati i Newtonovu metodu:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

$$\to \quad \varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

pa je

$$\varphi'(\alpha) = 0,$$

uz pretpostavku da je $f'(\alpha) \neq 0$, tj. da je nultočka je jednostruka.

Na sličan način, dobivamo

$$\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Ako je $f''(\alpha) \neq 0$, možemo pokazati da je red konvergencije Newtonove metode jednak 2.

Ako je $f'(\alpha) \neq 0$, $f''(\alpha) = 0$, onda će red konvergencije biti barem 3.

Problem višestrukih nultočki

p-struka nultočka u α, uz $p \geq 2$:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Napišimo f u obliku

$$f(x) = (x - \alpha)^p \, h(x), \quad h(\alpha) \neq 0.$$

Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(x-\alpha)^{p-1} h(x) + (x-\alpha)^p h'(x) \\ &= (x-\alpha)^{p-1} \big(ph(x) + (x-\alpha) h'(x)\big) := (x-\alpha)^{p-1} k(x), \end{aligned}$$

s tim da je

$$k(\alpha) = ph(\alpha) + (\alpha - \alpha) h'(\alpha) = ph(\alpha) \neq 0.$$

Ograničimo se samo na cjelobrojne p i promatrajmo Newtonovu metodu kao jednostavnu iteraciju,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Uvrstimo li pretpostavku o obliku funkcija f i f',

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x - \frac{(x-\alpha)h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)}. \\ \varphi'(x) &= 1 - \frac{h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)} \\ &\quad - (x-\alpha)\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)}\right), \end{aligned}$$

tako da je $\varphi'(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{p} \neq 0$ za $p > 1$, $\to$ linearna konvergencija.

Faktor linearne konvergencije bit će

$$\varphi'(\alpha) = 1 - 1/p.$$

Za $p = 2$ to je podjednako brzo kao bisekcija ili lošije od bisekcije za $p \geq 3$.

Newtonovu metodu možemo modificirati na dva načina

- ako točno znamo red nultočke,
- ako ne znamo red nultočke.

Newtonova metoda kad znamo red nultočke

Neka je p višestrukost nultočke. Modificiramo metodu:

$$\varphi(x) = x - p\,\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Tada je

$$\varphi'(\alpha) = 1 - p \cdot p = 0.$$

- barem kvadratična konvergencija.

Newtonova metoda kad ne znamo red nultočke

Primijetimo da funkcija

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ima jednostruku nultočku u α.

Newtonovu metodu primijenimo na $u(x)$.

Konvergencija je kvadratična

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)},$$

gdje je

$$u'(x) = \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - \frac{f''(x)}{f'(x)}\, u(x),$$

Računanje još jedne derivacije funkcije (f'').

Metoda sekante kad ne znamo red nultočke

Ovo možemo primijeniti na svaku metodu koja ima problem s konvergencijom prema višesttrukoj nultočki.

Npr., metoda sekante,

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{u(x_n) - u(x_{n-1})}.$$

I u ovom slučaju postoji “cijena”, a to je računanje f'.

Primjeri
Numerički red konvergencije

Red konvergencije niza iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ koji konvergira prema nultočki α je najveći eksponent p, $p \geq 1$, za koji vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - x_{n-1}|}{|\alpha - x_{n-2}|^p} = c > 0,$$

gdje je x_n niz iteracija generiran nekom metodom, uz neki start dovoljno blizu nultočke.

Kako iz niza (x_n) procijeniti p?

α je nepoznat.

Ako smo dovoljno blizu nultočke α (k dovoljno velik),

$$|\alpha - x_k| \approx c|\alpha - x_{k-1}|^p,$$

U usporedbi tri aproksimacij x_{n-2}, x_{n-1} i x_n je$\alpha \approx x_n$ pa vrijedi i

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| &= c_n |x_n - x_{n-2}|^{p_n}, \\ |x_n - x_{n-2}| &= c_n |x_n - x_{n-3}|^{p_n}, \end{aligned}$$

- očekujemo da je $p_n \approx p$ i $c_n \approx c$ za dovoljno velike n.

Podijelimo

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|} = \left(\frac{|x_n - x_{n-2}|}{|x_n - x_{n-3}|} \right)^{p_n},$$

i

$$p_n = \frac{\log |x_n - x_{n-1}| - \log |x_n - x_{n-2}|}{\log |x_n - x_{n-2}| - \log |x_n - x_{n-3}|}.$$

Numerički primjer

Primjer 1. Tražimo nultočku funkcije

$$f(x) = x^3 - 1.5.$$

Nije teško locirati nultočku $\alpha \in [1, 2]$:

$$f(1) = -0.5 < 0, \quad f(2) = 6.5 > 0.$$

f strogo rastuća, po dijelovima konveksna/konkavna, jedinstvena nultočka

Svo računanje je provedeno u preciznosti `extended`.

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

$$z := f(a_n) \cdot f(x_n).$$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z_n
0	1.000000000	2.000000000	1.500000000	1.875000000	< 0
1	1.000000000	1.500000000	1.250000000	0.453125000	< 0
2	1.000000000	1.250000000	1.125000000	-0.076171875	> 0
3	1.125000000	1.250000000	1.187500000	0.174560547	< 0
4	1.125000000	1.187500000	1.156250000	0.045806885	< 0
5	1.125000000	1.156250000	1.140625000	-0.016017914	> 0
6	1.140625000	1.156250000	1.148437500	0.014684200	< 0
7	1.140625000	1.148437500	1.144531250	-0.000719249	> 0
8	1.144531250	1.148437500	1.146484375	0.006969355	< 0
9	1.144531250	1.146484375	1.145507813	0.003121776	< 0
10	1.144531250	1.145507813	1.145019531	0.001200444	< 0
11	1.144531250	1.145019531	1.144775391	0.000240393	< 0
12	1.144531250	1.144775391	1.144653320	-0.000239479	> 0
13	1.144653320	1.144775391	1.144714355	0.000000444	< 0

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

n	a	b	x	$f(x)$	z
14	1.144653320	1.144714355	1.144683838	-0.000119521	> 0
15	1.144683838	1.144714355	1.144699097	-0.000059539	> 0
16	1.144699097	1.144714355	1.144706726	-0.000029548	> 0
17	1.144706726	1.144714355	1.144710541	-0.000014552	> 0
18	1.144710541	1.144714355	1.144712448	-0.000007054	> 0
19	1.144712448	1.144714355	1.144713402	-0.000003305	> 0
20	1.144713402	1.144714355	1.144713879	-0.000001431	> 0
21	1.144713879	1.144714355	1.144714117	-0.000000493	> 0
22	1.144714117	1.144714355	1.144714236	-0.000000025	> 0
23	1.144714236	1.144714355	1.144714296	0.000000210	< 0
24	1.144714236	1.144714296	1.144714266	0.000000092	< 0
25	1.144714236	1.144714266	1.144714251	0.000000034	< 0
26	1.144714236	1.144714251	1.144714244	0.000000005	< 0
27	1.144714236	1.144714244	1.144714240	-0.000000010	

Izračunata rješenja su (ispisane sve znamenke):

- za točnost 10^{-8} rješenje je $x_{27} = 1.14471423998475075$,
- za točnost 10^{-18} rješenje je $x_{50} = 1.14471424255333210$.

Na prethodne dvije folije:

- vidi se spora konvergencija metode (broj vodećih nula u $f(x_n)$ se, uglavnom, linearno povećava),
- ponegdje, kao u x_{13}, dolazi do čudnog povećanja broja vodećih nula u $f(x_n)$.

  Objašnjenje: slučajno smo u raspolavljanju stigli blizu nultočke, iako je duljina intervala još uvijek prevelika.

Uočite broj iteracija potreban za odgovarajuću točnost!

Newtonova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.541666666666667
1	1.458333333333333	1.601490162037037	0.251009070294785
2	1.207324263038549	0.259834330619978	0.059419284771986
3	1.147904978266562	0.012578134527712	0.003181874908824
4	1.144723103357739	0.000034833084971	0.000008860735819
5	1.144714242621919	0.000000000269625	0.000000000068587
6	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.144714242553332	0.000000000000000	

Nultočka ispisana na sve izračunate znamenke je
$x_7 = 1.1447142425533187$.

Newtonova metoda, kvadratna konvergencija

Gledamo li korekcije napisane u znanstvenoj notaciji, vidimo područje kvadratne konvergencije, gdje se broj točnih znamenki u svakom koraku udvostručava.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	5.416666667E−01
1	1.4583333333333333	1.60149016204E+00	2.510090703E−01
2	1.2073242630385487	2.59834330620E−01	5.941928477E−02
3	1.1479049782665624	1.25781345277E−02	3.181874909E−03
4	1.1447231033577387	3.48330849709E−05	8.860735819E−06
5	1.1447142426219193	2.69625000386E−10	6.858746179E−11
6	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	2.758003708E−20
7	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	

Isti smo zaključak mogli vidjeti i bez znanstvene notacije — pogledajte kako se povećava broj vodećih nula u korekciji.

Newtonova m., numerički red konvergencije

n	x	p_n	c_n
0	2.00000000000000000	—	—
1	1.45833333333333333	—	—
2	1.20732426303854875	—	—
3	1.14790497826656245	1.63738	4.03440E−01
4	1.14472310335773870	1.84894	5.34225E−01
5	1.14471424262191933	1.97750	7.64767E−01
6	1.14471424255333187	1.99937	8.67206E−01
7	1.14471424255333187	—	—

Metoda sekante, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za metodu sekante potrebne su dvije startne točke i to su $x_0 = 2$ i $x_1 = 1.5$, a izračunata nultočka x_{10} ima sve znamenke jednake aproksimaciji x_7 izračunatoj Newtonovom metodom.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	
1	1.500000000000000	1.875000000000000	0.202702702702703
2	1.297297297297297	0.683325765502537	0.116233090792778
3	1.181064206504520	0.147481413791545	0.031991044609771
4	1.149073161894749	0.017200732670849	0.004223722208545
5	1.144849439686204	0.000531537856385	0.000134683664909
6	1.144714756021295	0.000002018501023	0.000000513407324
7	1.144714242613971	0.000000000238377	0.000000000060639
8	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
9	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
10	1.144714242553332	0.000000000000000	

M. sekante, numerički red konvergencije

Red konvergencije metode sekante je $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.6180$, a numerički red konvergencije ga dobro aproksimira.

n	x	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.5000000000000000	—	—
2	1.2972972972972973	—	—
3	1.1810642065045196	1.07039	3.94966E−01
4	1.1490731618947491	1.77904	9.54986E−01
5	1.1448494396862039	1.49493	6.02649E−01
6	1.1447147560212947	1.63923	9.97717E−01
7	1.1447142426139705	1.60467	8.29830E−01
8	1.1447142425533319	1.62274	9.74858E−01
9	1.1447142425533319	1.61618	8.86501E−01
10	1.1447142425533319	—	—

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Primjer 2. Nultočka funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

je $x = 0$, ali Newtonova metoda neće konvergirati iz svake startne točke x_0.

- Sigurnu konvergenciju ne možemo osigurati, jer f'' mijenja znak baš u nultočki.

Naći ćemo točku β za koju vrijedi

$$\begin{cases} |x_0| < |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ konvergira,} \\ |x_0| > |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ divergira,} \\ |x_0| = |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ ciklira.} \end{cases}$$

Kako ćemo naći točku “cikliranja”? Funkcija $f(x) = \text{arctg}x$ je neparna, pa je dovoljno da

- tangenta na f u točki β presiječe os x u točki $-\beta$.

Jednadžba tangente na arctg u točki β je

$$y - \text{arctg}\beta = \frac{1}{1+\beta^2}(x - \beta),$$

pa će tangenta sjeći os x u $-\beta$, ako je

$$\text{arctg}\beta = \frac{2\beta}{1+\beta^2},$$

čime smo dobili nelinearnu jednadžbu po β.

Zbog neparnosti, postoje dva rješenja, suprotnih predznaka, i možemo ih izračunati metodom bisekcije

$$\beta = \pm 1.39174520027073489.$$

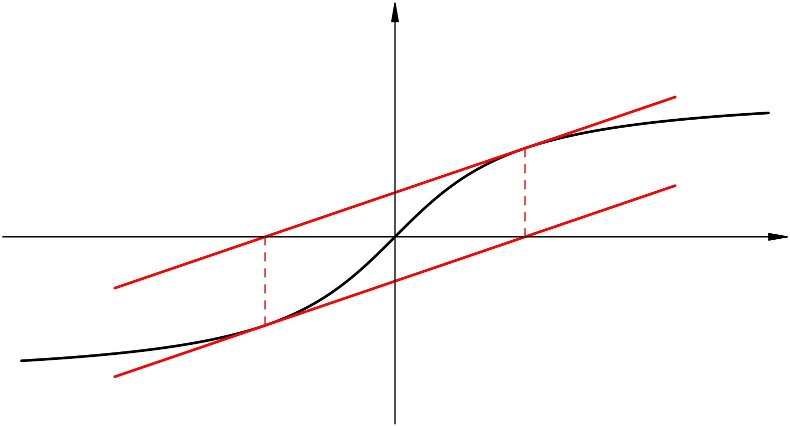
Pokažimo ponašanje Newtonove metode ako je startna točka

$$x_0 = \beta, \quad 1, \quad 1.5,$$

a zaustavljamo se, ili ako postignemo točnost 10^{-10}, ili nakon najviše 10 iteracija.

Primjer cikliranja Newtonove metode

Za $x_0 = \beta$ graf je



Primjer cikliranja Newtonove metode (nast.)

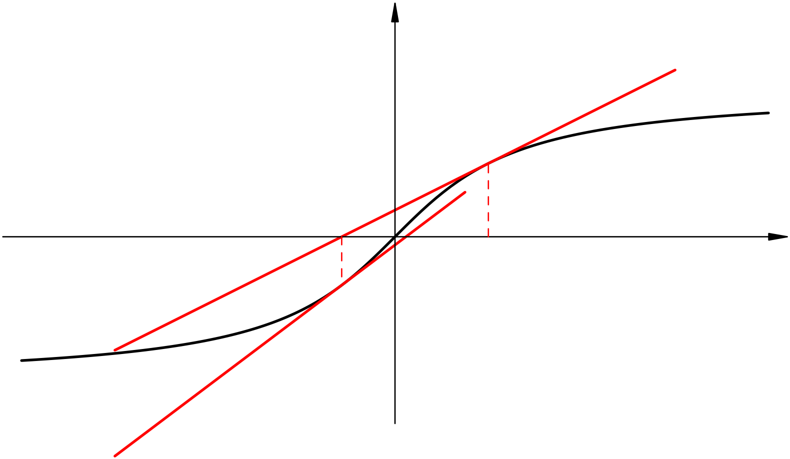
Točnost nije postignuta nakon 10 iteracija.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541470
1	−1.391745200270735	−0.947747133516990	−2.783490400541470
2	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541469
3	−1.391745200270734	−0.947747133516990	−2.783490400541468
4	1.391745200270734	0.947747133516990	2.783490400541466
5	−1.391745200270732	−0.947747133516989	−2.783490400541459
6	1.391745200270727	0.947747133516988	2.783490400541440
7	−1.391745200270713	−0.947747133516983	−2.783490400541391
8	1.391745200270678	0.947747133516971	2.783490400541262
9	−1.391745200270584	−0.947747133516939	−2.783490400540922
10	1.391745200270337	0.947747133516939	

Zbog malih grešaka zaokruživanja metoda bi konvergirala.

Primjer konvergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1$ graf je



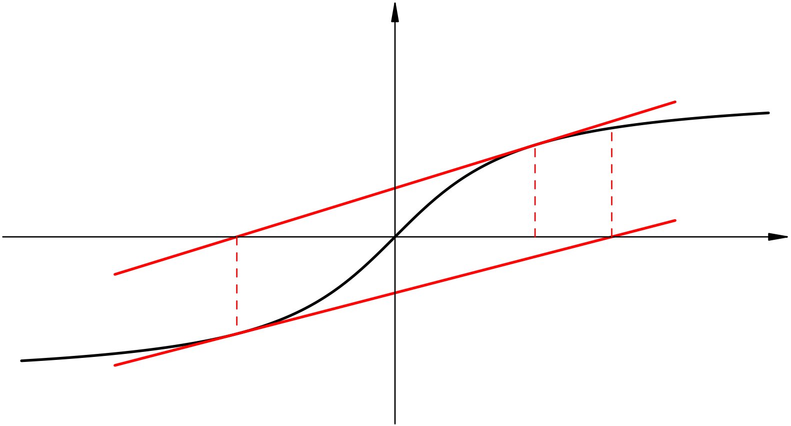
Točnost se postiže nakon 6 iteracija.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.000000000000000	0.785398163397448	1.570796326794897
1	−0.570796326794897	−0.518669369255017	−0.687656230793810
2	0.116859903998913	0.116332265113896	0.117920926115958
3	−0.001061022117045	−0.001061021718890	−0.001061022913354
4	0.000000000796310	0.000000000796310	0.000000000796310
5	−0.000000000000000	−0.000000000000000	−0.000000000000000
6	0.000000000000000	−0.000000000000000	

Metoda kvadratno konvergira, ali ne konvergira monotono prema nultočki.

Primjer divergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1.5$ graf je



Metoda divergira, ali $f(x)$ konvergira prema $\pm\frac{\pi}{2}$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.5000000000E+000	0.9827937232473	3.1940796006E+000
1	−1.6940796006E+000	−1.0375463591379	−4.0152065620E+000
2	2.3211269614E+000	1.1640020424220	7.4352147982E+000
3	−5.1140878368E+000	−1.3776945287028	−3.7409771751E+001
4	3.2295683914E+001	1.5398423269080	1.6076126347E+003
5	−1.5753169508E+003	−1.5701615339901	−3.8965513247E+006
6	3.8949760078E+006	1.5707960700539	2.3830292869E+013
7	−2.3830288974E+013	−1.5707963267949	−8.9202801611E+026
8	8.9202801611E+026	1.5707963267949	1.2499045994E+054
9	−1.2499045994E+054	−1.5707963267949	−2.4539946375E+108
10	2.4539946375E+108	1.5707963267949	

Newtonova metoda i višestruke nultočke

Primjer3. Funkcija

$$f(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

ima dvostruku nultočku u $x = 1.23$.

Pokažimo, redom, ponašanje

- obične Newtonove metode,
- Newtonove metode za dvostruku nultočku, stavljeno $p = 2$ kao faktor za korekciju,
- obične Newtonove metode, za funkciju $u = f/f'$.

Tražena točnost je $\varepsilon = 10^{-15}$.

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

Pažljivo promatrajte kako se ponaša korekcija.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.500000000000000	−0.116640000000000	0.147440273037543
1	1.352559726962457	−0.026248102309329	0.063506947954921
2	1.289052779007536	−0.006315190760541	0.030015778457640
3	1.259037000549896	−0.001552203168203	0.014633908572506
4	1.244403091977390	−0.000384941831542	0.007229603981965
5	1.237173487995426	−0.000095859059122	0.003593663348690
6	1.233579824646736	−0.000023918444247	0.001791630511788
7	1.231788194134948	−0.000005973865556	0.000894525173287
8	1.230893668961661	−0.000001492750955	0.000446941328040
9	1.230446727633621	−0.000000373098481	0.000223390506264
10	1.230223337127356	−0.000000093263474	0.000111675233252
11	1.230111661894104	−0.000000023314476	0.000055832614098

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

n	x	$f(x)$	korekcija
12	1.230055829280006	−0.000000005828445	0.000027915056720
13	1.230027914223287	−0.000000001457089	0.000013957215816
14	1.230013957007471	−0.000000000364270	0.000006978529777
15	1.230006978477694	−0.000000000091067	0.000003489245354
16	1.230003489232340	−0.000000000022767	0.000001744617791
17	1.230001744614549	−0.000000000005692	0.000000872307704
18	1.230000872306845	−0.000000000001423	0.000000436153629
19	1.230000436153216	−0.000000000000356	0.000000218076376
20	1.230000218076841	−0.000000000000089	0.000000109038186
21	1.230000109038655	−0.000000000000022	0.000000054517907
22	1.230000054520748	−0.000000000000006	0.000000027259838
23	1.230000027260910	−0.000000000000001	0.000000013624333
24	1.230000013636577	−0.000000000000000	0.000000006828241
25	1.230000006808336	−0.000000000000000	0.000000003389306

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

n	x	$f(x)$	korekcija
26	1.230000003419030	-0.000000000000000	0.000000001729681
27	1.230000001689349	-0.000000000000000	0.000000000823684
28	1.230000000865665	-0.000000000000000	0.000000000401855
29	1.230000000463810	0.000000000000000	-0.000000000000000
30	1.230000000463810	0.000000000000000	

Korekcija sporije teži u nulu nego $f(x)$. Razlog:

- funkcijska vrijednost za višestruke nultočke je relativno mala, čak i kad smo daleko od nultočke, tj.
- graf funkcije s višestrukom nultočkom se, u okolini nultočke α, bolje "priljubi" uz os x, nego graf funkcije koja ima jednostruku nultočku.

Modificirana Newtonova metoda, $p = 2$

Metoda pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.500000000000000	−0.116640000000000	0.294880546075085
1	1.205119453924915	−0.001173009833879	−0.024718265674538
2	1.229837719599453	−0.000000049250590	−0.000162273360038
3	1.229999992959491	−0.000000000000000	−0.000000007049176
4	1.230000000008667	0.000000000000000	−0.000000026758865
5	1.230000026767532	−0.000000000000001	0.000000026771877
6	1.229999999995655	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.229999999995655	0.000000000000000	

Da smo pogriješili p — dobili bismo linearnu konvergenciju!

- Isto se događa ako pogriješite derivaciju, a tražite jednostruku nultočku.

Newtonova metoda za funkciju u

Metoda pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju prema jednostrukoj nultočki funkcije $u = f/f'$.

Cijena:

- računanje vrijednosti druge derivacije funkcije f.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.500000000000000	0.147440273037543	0.243748194650388
1	1.256251805349612	0.013220017840880	0.026062273270891
2	1.230189532078721	0.000094770842551	0.000189522471849
3	1.230000009606872	0.000000004803964	0.000000009608985
4	1.229999999997887	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.229999999997887	0.000000000000000	

Metode višeg reda

Do sada samo metode do reda konvergencije do 2 za jednostruke nultočke.

Primjeri metoda reda $p > 2$

Numerička ilustracija na primjeru

$$f(x) = x^3 - 1.5,$$

na intervalu $[1, 2]$, uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-18}$.

Korigirane Newtonove metode

Neka je f funkcija koja je u okolini izolirane nultočke α

- monotona, tj. $f' \neq 0$ (α je jednostruka), i
- $f \in C^{(p)}$, $p \geq 2$.

$\Rightarrow$ postoji njezina inverzna funkcija $\mathcal{F} := f^{-1}$ funkcije f, i postoji $\mathcal{F}^{(p)}$ koja je, također, neprekidna u okolini nule.

Taylorov polinom od $\mathcal{F}$ oko točke $y = f(x)$:

$$E_p(t) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(n)}(y)}{n!}(t - y)^n.$$

Tražimo $\alpha = f^{-1}(0) = \mathcal{F}(0)$.
Kad stavimo $t = 0$, dobivamo metodu p-tog reda.
Oznaka je $E_p := E_p(0)$.

Uvrštavanjem slijedi da

$$E_p = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(n)}(f(x))}{n!} (-f(x))^n$$

definira metodu

$$x_{n+1} = E_p(x_n).$$

Za male p, dobivamo sljedeće iteracijske funkcije $\varphi_p := E_p$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= x - u, && \text{(obična Newtonova m.)} \\ \varphi_3(x) &= E_2 - A_2 u^2, && \text{(korigirana Newtonova m. } E_3\text{)} \\ \varphi_4(x) &= E_3 - (2A_2^2 - A_3) u^3, && \text{(korigirana Newtonova m. } E_4\text{).} \end{aligned}$$

pri čemu je

$$u = \frac{f}{f'}, \quad A_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{f^{(n)}}{f'}, \quad n \geq 2.$$

E_3 metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Startna točka je $x_0 = 2$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.688368055555556
1	1.311631944444444	0.756503210473290	0.162957102798705
2	1.148674841645739	0.015623490256523	0.003960520886559
3	1.144714320759180	0.000000307435976	0.000000078205848
4	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je
$x_5 = 1.1447142425533319$.

E_3 metoda, kubna konvergencija

Ispišemo li rezultat u znanstvenoj notaciji, vidimo da se broj točnih znamenki približno utrostručuje.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	6.88368055556E−01
1	1.3116319444444444	7.56503210473E−01	1.62957102799E−01
2	1.14867484164573903	1.56234902565E−02	3.96052088656E−03
3	1.14471432075918001	3.07435976264E−07	7.82058481467E−08
4	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	2.75800370811E−20
5	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	

E_3 m., numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije pokazuje da je metoda zaista kubno konvergentna.

n	x	p_n	c_n
0	2.00000000000000000	—	—
1	1.31163194444444444	—	—
2	1.14867484164573903	—	—
3	1.14471432075918001	2.28964	2.38750E−01
4	1.14471424255333187	2.89555	7.06390E−01
5	1.14471424255333187	—	—

Metode izvedene preko Taylorovih polinoma

Funkciju f možemo aproksimirati njezinim Taylorovim polinomom.

Ako polinom stupnja 1 izjednačimo s nulom, dobijemo običnu Newtonovu metodu.

Kada to napravimo s polinomom stupnja 2,

$$0 = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{1}{2!} \cdot f''(x)(t - x)^2$$

i riješimo po t, dobivamo Laguerreovu metodu:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{2u}{1 \pm (1 - 4A_2 u)^{1/2}},$$

(kraćenje $\Longrightarrow$ $+$ znak)

Za metode viših redova moraju se rješavati polinomne jednadžbe sve viših stupnjeva (preko 4 ne ide egzaktno) - nepraktično.

Laguerreova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za početnu točku uzimamo $x_0 = 1$, jer za $x_0 = 2$, drugi korijen koji se javlja u metodi ne daje realan broj.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.000000000000000	−0.500000000000000	−0.145497224367903
1	1.145497224367903	0.003080095095887	0.000782981936678
2	1.144714242431225	−0.000000000480015	−0.000000000122107
3	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
4	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je
$x_4 = 1.1447142425533187$.

Laguerreova metoda, kubna konvergencija

Ponovno, korekcija pokazuje da se broj točnih znamenki približno utrostručava.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.00000000000000000	−5.00000000000E−01	−1.45497224368E−01
1	1.14549722436790281	3.08009509589E−03	7.82981936678E−04
2	1.14471424243122508	−4.80015464226E−10	−1.22106786356E−10
3	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	2.75800370811E−20
4	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	

Laguerreova m., numerički red konvergencije

Kao što i očekujeno, numerički red konvergencije je 3.

n	x	p_n	c_n
0	1.00000000000000000	—	—
1	1.14549722436790281	—	—
2	1.14471424243122508	—	—
3	1.14471424255333187	3.00297	2.59843E−01
4	1.14471424255333187	—	—

Halleyeva metoda

U Taylotovom polinomu 2. stupnja ne rješavamo kvadratnu jednadžbu (Laguerreova m.) već u kvadratnom članu stavimo:

$$(x_{n+1} - x_n)^2 = (x_{n+1} - x_n)\left(-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$$

Razvijemo li funkciju $1/f$ u Taylorov polinom, iz koeficijenata tog razvoja, također, možemo dobiti metode za nalaženje nultočaka funkcija.

Na primjer, iteracijska funkcija za Halleyevu metodu je

$$\varphi(x) = x - \frac{u}{1 - A_2 u},$$

i to je metoda s kubnom konvergencijom.

Halleyeva metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Ponovno startamo iz $x_0 = 2$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.742857142857143
1	1.257142857142857	0.486798833819242	0.111805016364194
2	1.145337840778664	0.002452770217608	0.000623598102057
3	1.144714242676607	0.000000000484607	0.000000000123275
4	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je
$x_5 = 1.14471424255333187$.

Halleyeva metoda, kubna konvergencija

Gledanjem znanstvenog zapisa uočavamo numerički kubnu konvergenciju.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E−00	7.42857142857E−01
1	1.2571428571428571	4.86798833819E−01	1.11805016364E−01
2	1.1453378407786635	2.45277021761E−03	6.23598102057E−04
3	1.1447142426766066	4.84607030069E−10	1.23274793178E−10
4	1.1447142425533319	1.08420217249E−19	2.75800370811E−20
5	1.1447142425533319	1.08420217249E−19	

Halleyeva m., numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije Halleyeve metode.

n	x	p_n	c_n
0	2.00000000000000000	—	—
1	1.25714285714285714	—	—
2	1.14533784077866351	—	—
3	1.14471424267660666	2.56001	1.67754E−01
4	1.14471424255333187	2.97168	4.12474E−01
5	1.14471424255333187	—	—

Metode s pamćenjem

Metode s pamćenjem imaju barem dvije startne točke. Takva je, na primjer, metoda sekante.

I za metode s pamćenjem možemo konstruirati metode višeg reda. Na primjer, metoda ${}^*E_{1,2}$ definirana iteracijskom funkcijom

$$ {}^*E_{1,2} = x_n - u_n - \frac{u_n^2}{f_n'} \cdot \left[\frac{1}{x_n - x_{n-1}} \left(2f_n' + f_{n-1}' - 3f[x_n, x_{n-1}] \right) \right] $$

ima svojstvo da treba jednako izvrednjavanja funkcije kao i Newtonova metoda.

Indeksi u formuli znače izvrednjavanje u odgovarajućoj točki!

Njezin red konvergencije je $p \approx 2.73$.

Metoda ${}^{*}E_{1,2}$, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Metodu startamo iz $x_0 = 2$, tako da x_1 dobijemo po Newtonovoj metodi, pa imamo dvije startne točke.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.541666666666667
1	1.458333333333333	1.601490162037037	0.294212878320100
2	1.164120455013233	0.077588606715436	0.019397373047930
3	1.144723081965303	0.000034748987607	0.000008839411970
4	1.144714242553333	0.000000000000003	0.000000000000001
5	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
6	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je
$x_6 = 1.14471424255333187$.

Metoda ${}^*E_{1,2}$, konvergencija

Gledanjem znanstvenog zapisa uočavamo brzu konvergenciju metode.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	5.41666666667E−01
1	1.4583333333333333	1.60149016204E+00	2.94212878320E−01
2	1.1641204550132330	7.75886067154E−02	1.93973730479E−02
3	1.1447230819653027	3.47489876068E−05	8.83941196996E−06
4	1.1447142425533327	3.45318391937E−15	8.78424181034E−16
5	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	2.75800369996E−20
6	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	

Metoda $^*E_{1,2}$, numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije metode $^*E_{1,2}$.

n	x	p_n	c_n
0	2.00000000000000000	—	—
1	1.45833333333333333	—	—
2	1.16412045501323302	—	—
3	1.14472308196530270	2.77393	4.83862E−01
4	1.14471424255333275	2.76510	4.79113E−01
5	1.14471424255333187	2.99347	1.17873E+00
6	1.14471424255333187	—	—

Inverzna kvadratna interpolacija

- Modifikacija metode sekante
- Umjesto pravcem interpoliramo parabolom (kvadratičnim polinomom)
- Za računanje nove aproksimacije koristimo prethodne tri.

Broydenova metoda

- Newtonova metoda zahtjeva računanje derivacije/Jacobijana što može biti zahtjevno.
- Jedna varijacija Newtonove metode koristi isti Jacobijan u nekoliko iteracija.

  Ušteda u broju računanja derivacije ali i gubitak kvadratične konvergencije.
- Drugi pristup je da se Jacobijan zamijeni s matricom 'sličnog' svojstva.
- Takve metode se nazivaju kvazi-Newtonove.

  Konvergencija nije više kvadratična već super-linearna:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - \alpha\|}{\|x_k - \alpha\|} = 0.$$

Ideja: U metodi sekante se derivacija aproksimira s

$$f'(x_{k+1}) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}.$$

Kada je $x \in \mathbb{R}^n$ ovo nije primijenjljivo.

Neka je za dani x_0 vektor x_1 dobiven Newtonovom metodom.

To znači da smo izračunali Jacobijan $Df(x_0)$

Umjesto $Df(x_1)$ tražimo matricu A_1 koja zadovoljava

$$A_1(x_1 - x_0) = f(x_1) - f(x_0).$$

Ovime matrica nije potpuno definirana.

Dodatni zahtjev:

$$A_1 z = Df(x_0)z \quad \text{ukoliko je} \quad (x_1 - x_0, z) = 0.$$

Sada je A_1 jedinstveno određena:

$$A_1 = Df(x_0) + \frac{[f(x_1) - f(x_0) - Df(x_0)(x_1 - x_0)]\,(x_1 - x_0)^T}{\|x_1 - x_0\|}.$$

Sljedeća aproksimacija je

$$x_2 = x_1 - A_1^{-1} f(x_0).$$

Matrica A_1 umjesto $Df(x_0)$.

I sada sve ponovimo na $x_3, \ldots$.

Metoda:

$$A_k = A_{k-1} + \frac{y_k - A_{k-1}s_k}{\|s_k\|^2} s_k^T,$$

i

$$x_{k+1} = x_k - A_k^{-1} f(x_k).$$

Oznake:

$$\begin{aligned} y_k &= f(x_k) - f(x_{k-1}) \\ s_k &= x_k - x_{k-1}. \end{aligned}$$

Teorem. (Sherman-Morrisonova formula) Neka je A regularna matrica i x i y su vektori takvi da je $y^T A^{-1} x \neq -1$. Tada je $A + xy^T$ regularna i

$$(A + xy^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}xy^T A^{-1}}{1 + y^T A^{-1} x}.$$

Primjena Sherman-Morrisonove formule na A_k:

$$\begin{aligned}
A_k^{-1} &= \left[A_{k-1} + \frac{y_k - A_{k-1}s_k}{\|s_k\|^2} s_k^T\right]^{-1} \\
&= A_{k-1}^{-1} - \frac{A_{k-1}^{-1}\left(\frac{y_k - A_{k-1}s_k}{\|s_k\|^2}\right)A_{k-1}^{-1}}{1 + s_k TA_{k-1}^{-1}\left(\frac{y_k - A_{k-1}s_k}{\|s_k\|^2}\right)} \\
&= A_{k-1}^{-1} - \frac{\left(A_{k-1}^{-1}y_k - s_k\right)A_{k-1}^{-1}}{\|s_k\|^2 + s_k^T A_{k-1}^{-1}y_k - \|s_k\|^2} \\
&= A_{k-1}^{-1} - \frac{\left(A_{k-1}^{-1}y_k - s_k\right)A_{k-1}^{-1}}{s_k^T A_{k-1}^{-1}y_k}
\end{aligned}$$

U svakoj iteraciji umjesto rješavanja sustava (kubična složenost) množimo matricu i vektor (kvadratna složenost).