Sadržaj predavanja

Racionalna aproksimacija:

- Uvod
- Padéova aproksimacija.
- Thielova racionalana interpolacija
- Brojevni verižni razlomci
- Funkcijski verižni razlomci

Uvod
Racionalna aproksimacija

Racionalna aproksimacija $R_{m,n}$ je racionalna funkcija

$$R_{m,n}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

gdje su P_m i Q_n polinomi stupnja najviše m, odnosno n.

Kako za danu funkciju f (i m i n) odrediti aproksimaciju $R_{m,n}$?

- Polinom $P_m \to m + 1$ koeficijent
- Polinom $Q_n \to n + 1$ koeficijent
- Racionalna funkcija $R_{m,n} \to (m+1) + (n+1) - 1 = m + n + 1$ koeficijent

Kako odrediti $R_{m,n}$?

Analogno kao u Taylorovom razvoju?

$$\begin{aligned} R_{m,n}(0) &= f(0) \\ R'_{m,n}(0) &= f'(0) \\ &\vdots \\ R^{(m+n)}_{m,n}(0) &= f^{(m+n)}(0) \end{aligned}$$

Nelinearni sustav! Više derivacije racionalne funkcije postaju sve složenije.

Koristi se drugačiji pristup (Padéova aproksimacija)!

Kako odrediti $R_{m,n}$?

Interpolacija:

$$R_{m,n}(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, m+n+1$$

Nelinearan problem?

Za

$$R_{m,n}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

Interpolacijski uvjeti prelaze u

$$P_m(x_i) - f(x_i)Q_n(x_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, m+n+1.$$

Linearan sustav jednadžbi (nepoznanice su koeficijenti polinoma P_m i Q_n).

Treba dodati uvjet za normalizaciju, npr. $Q_n(o) = 1$.

Egzistencija i jedinstvenost?

Padéova aproksimacija

Padéova aproksimacija (PA) Taylorove polinome.

Za dani

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Taylorov polinom je

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k.$$

Tada je

$$f(x) - T_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k x^k.$$

tj.

$$f(x) - T_m(x) = \mathcal{O}\left(x^{m+1}\right).$$

Ekvivalentno,

$$\begin{aligned} T_m(0) &= f(0), \\ T_m'(0) &= f'(0), \\ &\vdots \\ T_m^{(m)}(0) &= f^{(m)}(0). \end{aligned}$$

Ideja PA: Za dane m i n,

racionalna funkcija $\quad R_{m,n} = P_m/Q_n$

$\deg P_m \leq m \quad$ i $\quad \deg Q_n \leq n$.

Izaberimo P_m i Q_n tako da je

$$(f - R_{m,n})(x) = \mathcal{O}\left(x^l\right).$$

gdje je l što je moguće veći.

Koliko veliki l očekujemo?

P_m	ima	$m+1$	parametar
Q_n	ima	$n+1$	parametar
P_m/Q_n	ima	-1	parametar
Ukupno	imamo	$m+n+1$	parametar

Očekujemo

$$(f - R_{m,n})(x) = \mathcal{O}\left(x^{m+n+1}\right).$$

To nije uvijek moguće!

Primjer.

Neka je

$$f(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots \left(= \frac{1}{1 - x^2} \right).$$

Za $n = m = 1$ tražimo

$$Q(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Iz

$$f(0) = 1 = Q(0) = \frac{b}{d}$$

slijedi

$$b = d.$$

Zbog normalizacije stavimo $b = 1$ pa je sada

$$Q(x) = \frac{ax + 1}{cx + 1}.$$

Jer je

$$Q'(x) = \frac{c-a}{(cx+1)^2},$$

slijedi

$$f'(0) = 0 = Q'(0) = c - a,$$

tj. $c = a$ pa je

$$Q(x) = \frac{ax+1}{ax+1} = 1.$$

Sada je

$$f(x) - Q(x) = (1 + x^2 + x^4 + \ldots) - 1 = x^2 + x^4 + \ldots = \mathcal{O}\left(x^2\right).$$

Ne možemo postići

$$f(x) - Q(x) = \mathcal{O}\left(x^3\right).$$

Ideja:

Umjesto

$$f(x) - \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \mathcal{O}\left(x^{m+n+1}\right)$$

promatramo

$$Q_n(x) f(x) - P_m(x) = \mathcal{O}\left(x^{m+n+1}\right).$$

- Sustav linearnih jednadžbi.

Za

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \quad P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} p_k x^k, \quad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k,$$

sustav jednadžbi je

$$\sum_{j=0}^{n} f_{k-j} q_j - p_k = 0, \quad k = 0, \ldots, m$$

$$\sum_{j=0}^{n} f_{k-j} q_j = 0, \quad k = m+1, \ldots, m+n$$

Uočimo da u drugom sustavu imamo $n+1$ nepoznanicu i n jednadžbi. Dodatna jednadžba $Q_n(0) = q_0 = 1$.

Matrica sustava je Toeplitzova matrica:

$$\begin{bmatrix} f_{m+1} & f_m & f_{m-1} & f_{m-2} & & f_{m+1-n} \\ f_{m+2} & f_{m+1} & f_m & f_{m-1} & & f_{m-n} \\ f_{m+3} & f_{m+2} & f_{m+1} & f_m & & f_{m-n-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ f_{m+n-1} & f_{m+n-2} & f_{m+n-3} & f_{m+n-4} & & f_{m-1} \\ f_{m+n} & f_{m+n-1} & f_{m+n-2} & f_{m+n-3} & & f_m \end{bmatrix}$$

Rješenje sustava: $\mathcal{O}(n^2)$ operacija (Levinsonova rekurzija).

Koeficijenti polinoma P_m su dani eksplicitno iz 1. sustava:

$$p_k = \sum_{j=0}^{n} f_{k-j} q_j, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Oznaka za Padéovu aproksimaciju:

$$[m/n] = \frac{P_m}{Q_n}$$

Padéova tablica

m/n	0	1	2	3	$\dots$
0	$[0/0]$	$[0/1]$	$[0/2]$	$[0/3]$	$\dots$
1	$[1/0]$	$[1/1]$	$[1/2]$	$[1/3]$	$\dots$
2	$[2/0]$	$[2/1]$	$[2/2]$	$[2/3]$	$\dots$
3	$[3/0]$	$[3/1]$	$[3/2]$	$[3/3]$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

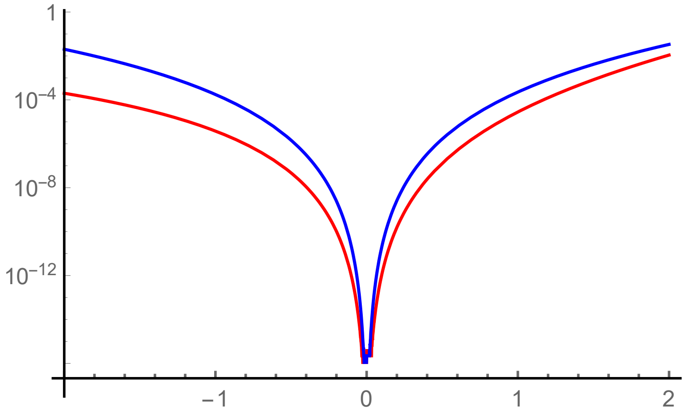
Primjer. Padéove aproksimacije za $f(x) = \exp x$.

Padéova tablica

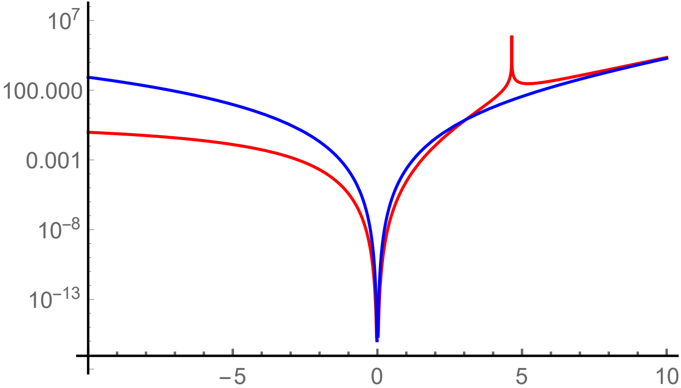
m/n	0	1	2	3	.
0	1	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x+\frac{1}{2}x^2}$	$\frac{1}{1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3}$	
1	$1+x$	$\frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}$	$\frac{1+\frac{1}{3}x}{1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}$	$\frac{1+\frac{1}{4}x}{1-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{24}x^3}$	
2	$1+x+\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}$	$\frac{1+\frac{2}{5}x+\frac{1}{20}x^2}{1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2-\frac{1}{60}x^3}$	
3	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$	$\frac{1+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{24}x^3}{1-\frac{1}{4}x}$	$\frac{1+\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2+\frac{1}{60}x^3}{1-\frac{2}{5}x+\frac{1}{20}x^2}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{120}x^3}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{120}x^3}$	

Usporedba pogreške za

- Taylorov polinom T_6
- Padéova aproksimacija $Q_{3,3}$



Racionalna aproksimacija ima polove:



Koje su prednosti racionalne aproksimacije?

Isti red aproksimacije kao i polinomijalna aproksimacija. Ali kompliciranije?

Pogledajmo $Q_{3,3}$, Padéovu aproksimaciju za $\exp x$:

$$Q_{3,3} = \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{120}x^3}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{120}x^3}$$

- Za izračunavanje brojnika trebamo 6 operacija.
- Za izračunavanje nazivnika trebamo 6 operacija.
- Dijeljenje 1 operacija
- Za izračunavanje $Q_{3,3}$ trebamo **13** operacija.
- Za izračunavanje Taylorovog polinoma T_6 trebamo **12** operacija.
- Razlika u broju operacija: 1.

Ali ...

$$
\begin{aligned}
Q_{3,3} &= \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{120}x^3}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{120}x^3} = \\
&= -1 + \frac{2 + \frac{1}{5}x^2}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{120}x^3} = \\
&= -1 + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x + \frac{}{2 + \frac{1}{5}x^2}} = \\
&= -1 + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x + \frac{1}{\frac{12}{25}x + \frac{2}{\frac{-5}{12}x}}} =
\end{aligned}
$$

još nije smanjen broj operacija $=$

$$Q_{3,3} = -1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x + \cfrac{1}{\frac{12}{25}x + \cfrac{2}{\frac{-5}{12}x}}} =$$

uredimo izraz tako da uz x bude faktor 1

$$= -1 + \cfrac{24}{12 - x + \cfrac{24}{\frac{12}{25}x - \cfrac{\frac{24}{5}}{x}}} =$$

$$= -1 + \cfrac{24}{12 - x + \cfrac{50}{x - \cfrac{\frac{5}{2}}{x}}}$$

Ukupno **7** operacija!

Za racionalnu aproksimaciju nam treba manji broj računskih operacija uz isti red točnosti.

Padéove aproksimacije često imaju veće područje konvergencije od Taylorovog razvoja.

Npr.

$$f(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots \left(= \frac{1}{1 - x^2} \right).$$

konvergira za $|x| < 1$.

Padéova aproksimacija:

$$Q_{m,n}(x) = \frac{1}{1 - x^2}, \quad \forall m, n \geq 2.$$

Interpolacija
Thielova racionalna interpolacija

Cilj: Za danu funkciju f i točke $x_1, \dots, x_n$ odrediti racionalnu funkciju Q koja zadovoljava

$$Q(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Kako bi trebala izgledati funkcija Q?

Iz uvjeta $Q(x_1) = f(x_1)$ možemo pretpostaviti

$$Q(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{Q_1(x)}$$

gdje je Q_1 neka racionalna funkcija.

U sljedećem koraku iskoristimo $Q(x_2) = f(x_2)$:

$$Q(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{a_2 + \frac{x - x_2}{Q_2(x)}}.$$

a_2 jednostavno izračunamo

$$a_2 \quad \leftarrow \quad Q(x_2) = f(x_2)$$

Sljedeći korak:

$$Q(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{a_2 + \frac{x - x_2}{a_3 + \frac{x - x_3}{Q_3(x)}}}.$$

$$a_3 \quad \leftarrow \quad Q(x_3) = f(x_3)$$

Uočimo da je

$$a_2 = a_2(f(x_1), f(x_2)) \quad \text{i} \quad a_3 = a_3(f(x_1), f(x_2), f(x_3))$$

Recipročne razlike

Recipročne razlike nultog i prvog reda definiraju se, redom, kao

$$\rho_0(x_0) = f(x_0), \quad \rho_1(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)},$$

... a one viših redova rekurzivno — kao

$$\rho_k(x_0, \ldots, x_k) = \frac{x_0 - x_k}{\rho_{k-1}(x_0, \ldots, x_{k-1}) - \rho_{k-1}(x_1, \ldots, x_k)} + \rho_{k-2}(x_1, \ldots, x_{k-1}), \qquad k \geq 2.$$

Za računanje recipročnih razlika koristi se tablica vrlo slična onoj za podijeljene razlike.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f(x_k) & \rho_1(x_k, x_{k+1}) & \rho_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) & \cdots & \rho_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
\hline
x_1 & f(x_1) & & & & \\
 & & \rho_1(x_1, x_2) & & & \\
x_2 & f(x_2) & & \rho_2(x_1, x_2, x_3) & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & \rho_1(x_2, x_3) & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \rho_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
 & & \rho_1(x_{n-2}, x_{n-1}) & & \cdots & \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & & \rho_2(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) & & \\
 & & \rho_1(x_{n-1}, x_n) & & & \\
x_n & f(x_n) & & & &
\end{array}
$$

Inverzne razlike

Uz recipročne razlike, često se definiraju i inverzne razlike

$$\phi_0(x_0) = f(x_0), \quad \phi_1(x_0, x_1) = \frac{x_1 - x_0}{\phi_0(x_1) - \phi_0(x_0)},$$

odnosno

$$\begin{aligned}\phi_k(x_0, \ldots, x_k) \\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{\phi_{k-1}(x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k) - \phi_{k-1}(x_0, \ldots, x_{k-2}, x_{k-1})},\end{aligned}$$

$k \geq 2$.

Veza recipročnih i inverznih razlika

Postoji i veza između inverznih i recipročnih razlika. Vrijedi

$$\phi_0(x_0) = \rho_0(x_0), \quad \phi_1(x_0, x_1) = \rho_1(x_0, x_1),$$

odnosno, za $k \geq 2$

$$\phi_k(x_0, \ldots, x_k) = \rho_k(x_0, \ldots, x_k) - \rho_{k-2}(x_0, \ldots, x_{k-2}).$$

U formuli za recipročne razlike točku x_0 smatramo varijablom i označimo je s x.

Thielova formula

Thieleovu formulu izvest ćemo iz identiteta:

$$f(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\phi_1(x_1, x_2)+} \cdots \frac{x - x_{n-1}}{\phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)+}$$

$$\frac{x - x_n}{\rho_n(x, x_1, \ldots, x_n) - \rho_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-1})}.$$

Pokažimo da vrijedi prethodni identitet. Iz

$$\rho_1(x, x_1) = \frac{x - x_1}{f(x) - f(x_1)}$$

slijedi da je

$$f(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\rho_1(x, x_1)}.$$

Zatim, iz formule

$$\rho_2(x, x_1, x_2) = \frac{x - x_2}{\rho_1(x, x_1) - \rho_1(x_1, x_2)} + \rho_0(x_1)$$

slijedi da je

$$\rho_1(x, x_1) = \rho_1(x_1, x_2) + \frac{x - x_2}{\rho_2(x, x_1, x_2) - \rho_0(x_1)}.$$

Uvrštavanjem tog izraza u formulu za $f(x)$, dobivamo

$$f(x) = f(x_1) + \cfrac{x - x_1}{\rho_1(x_1, x_2) + \cfrac{x - x_2}{\rho_2(x, x_1, x_2) - \rho_0(x_1)}}.$$

Konačno, željeni identitet dobivamo indukcijom po n, uz korištenje definicije inverznih razlika.

Ako izbrišemo zadnji član u identitetu, dobivamo Thielovu interpolacijsku formulu

$$R(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\phi_1(x_1, x_2)+} \cdots \frac{x - x_{n-1}}{\phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Pokažimo da se zaista radi o interpolaciji, tj. da je

$$R(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

što se odmah vidi iz identiteta, počevši od x_n, jer je

$$\frac{x - x_n}{\rho_n(x, x_1, \ldots, x_n) - \rho_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-1})}$$

jednak 0 za $x = x_n$, pa je $R(x_n) = f(x_n)$.

Nakon toga, gledamo $R(x_{n-1})$ i $f(x_{n-1})$.

- Oni su za jednu 'kariku' kraći i to za onu 'kariku' koja sadrži "član razlike".
- U svakoj daljnjoj točki $x_{n-2}, \ldots, x_1$, verižni je razlomak kraći za jednu 'kariku' od prethodne.

Primjer.

Aproksimirajmo tg1.565 korištenjem Thieleove interpolacijske formule, ako znamo vrijednosti funkcije tg u točkama

$$x_i = 1.53 + 0.01 \cdot i, \quad i = 0, \ldots, 4.$$

Prvo izračunajmo recipročne razlike.

x_k	$f(x_k)$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
1.53	24.49841				
		0.001255851			
1.54	32.46114		-0.0308670		
		0.000640314		2.96838	
1.55	48.07848		-0.0207583		3.56026
		0.000224507		2.97955	
1.56	92.62050		-0.0106889		
		0.000008597			
1.57	1255.76557				

Thielova interpolacija daje

$$R(x) = 24.49841 + \frac{x-1.53}{0.001255851+} \, \frac{x-1.54}{-24.5293+} \, \frac{x-1.55}{2.96713+} \, \frac{x-1.56}{3.59113}.$$

Uvrštavanjem 1.565 dobivamo

$$R(1.565) = 172.5208,$$

dok je prava vrijednost

$$\mathrm{tg}(1.565) = 172.5211.$$

Napomena. Polinomijalna interpolacija daje

$$P_4(1.565) = 424.528$$

Ubrzavanje sumacije redova

I sumacija redova može se znatno ubrzati korištenjem racionalne ekstrapolacije. Ako treba izračunati

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

označimo s S_N, N-tu parcijalnu sumu reda

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Vrijednosti S_N možemo interpretirati kao vrijednosti neke funkcije f u točkama $N, \ldots$

… ili u nekim drugim točkama, na primjer, u točkama $1/N$,

$$S_N = f\left(\frac{1}{N}\right).$$

Očito je da vrijedi

$$S = S_\infty = f(0).$$

Ideja je $f(0)$ izračunati kao ekstrapoliranu vrijednost od

$$f\left(\frac{1}{N_1}\right), f\left(\frac{1}{N_2}\right), \ldots, \quad N_1 < N_2 < \cdots .$$

N_i-ovi, na primjer, mogu biti, redom, prirodni brojevi.

Primjer. Treba izračunati

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

korištenjem racionalne ekstrapolacije.

Uzet ćemo $N = 1, 2, 4, 8, 16$ i izračunati parcijalne sume

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$

Shvatimo li to kao funkciju od $x = 1/N$ i označimo $S(x) = S_N$, onda možemo formirati tablicu recipročnih razlika.

x	$S(x)$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
$\frac{1}{16}$	1.584346533				
		-1.097945891			
$\frac{1}{8}$	1.527422052		-0.238678243		
		-1.204112002		4.826059143	
$\frac{1}{4}$	1.423611111		-0.166126405		0.016938420
		-1.44		9.947195880	
$\frac{1}{2}$	1.25		-0.089285214		
		-2			
1	1				

Thielova interpolacija daje

$$R(x) = 1.584346533 + \frac{x - \frac{1}{16}}{-1.097945891+} \frac{x - \frac{1}{8}}{-1.823024776+}$$

$$\frac{x - \frac{1}{4}}{5.924005034+} \frac{x - \frac{1}{2}}{0.255616663}.$$

Uvrštavanjem 0 dobivamo

$$R(0) = 1.644{\color{red}27974},$$

dok je prava vrijednost

$$S_\infty = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934067.$$

Zanimljivo je spomenuti što se dobije ako samo zbrajamo članove reda i ne ekstrapoliramo. Vidjet ćemo da taj red vrlo sporo konvergira. Na primjer, dobivamo

$$\begin{aligned} S_{3000} &= 1.644601, \\ S_{10000} &= 1.644834, \\ S_{30000} &= 1.644901, \\ S_{100000} &= 1.644924. \end{aligned}$$

Brojevni verižni razlomci

Izraz oblika

$$R = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots}}}}$$

zovemo brojevni verižni razlomak.

Ovdje su $b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ realni ili kompleksni brojevi.
verižni razlomak - *engl. continued fractions*

Zbog štednje prostora, postoje “kraći”, alternativni zapisi.

Brojevni verižni razlomci — zapis

U literaturi nailazimo na tri oblika zapisa verižnih razlomaka:

$$R = \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \right],$$

$$R = b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \frac{a_3 \mid}{\mid b_3} + \cdots ,$$

i možda najzgodniji zapis

$$R = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\, \frac{a_2}{b_2 +}\, \frac{a_3}{b_3 +} \, \cdots .$$

Katkad se piše i

$$R = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots .$$

Brojevni verižni razlomci — *n*-ta konvergencija

Ako u beskonačnom verižnom razlomku uzmemo samo prvih konačno mnogo članova, dobivamo broj

$$R_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots \frac{a_n}{b_n}.$$

Takav izraz zove se ***n*-ta konvergencija** verižnog razlomka R.

Zapis ili “član”

$$\frac{a_k}{b_k +}$$

zove se karika verižnog razlomka.

Ideja: sljedeća konvergencija dobiva se

- dodavanjem nove karike, kao u lancu.

Vrijednost brojevnog verižnog razlomka

Ako postoji limes

$$\lim_{n\to\infty} R_n,$$

onda se vrijednost verižnog razlomka R definira kao

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n.$$

Praktični problem: za zadani n, trebamo algoritam za brzo računanje vrijednosti

- samo n-te konvergencije R_n,
- svih konvergencija do n-te, tj. vrijednosti $R_0, \ldots, R_n$.

Prirodni put za obje stvari je

- uzlazno po indeksima — od R_0, prema R_n.

Silazni algoritam

Postoje razne ocjene i teoremi o tome

- koliko dobro n-ta konvergencija R_n aproksimira verižni razlomak R.

Zato često unaprijed znamo

- koliki n treba uzeti da bismo dobili željenu točnost u R_n.

Onda možemo krenuti "silazno" od b_n. Definiramo $F_n = b_n$ (ili, formalno, $F_{n+1} = \infty$), a zatim računamo

$$F_k = b_k + \frac{a_{k+1}}{F_{k+1}}, \quad k = n, n-1, \ldots, 0.$$

Na kraju je, očito, $$R_n = F_0.$$

Uzlazni algoritam — početak

Ideja: n-tu konvergenciju verižnog razlomka možemo prikazati u "racionalnom" obliku, kao kvocijent brojeva P_n i Q_n

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\,\frac{a_2}{b_2 +}\,\frac{a_3}{b_3 +}\cdots\frac{a_n}{b_n},$$

a zatim tražimo rekurzije za P_n i Q_n.

Za nultu konvergenciju R_0, zapis je

$$R_0 = \frac{P_0}{Q_0} = b_0,$$

pa možemo izabrati da je $P_0 = b_0$, $Q_0 = 1$.

Mogli smo i drugačije birati — jedini uvjet je $P_0/Q_0 = b_0$.

Uzlazni algoritam — prva konvergencija

Za sljedeću konvergenciju R_1 vrijedi

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = \frac{b_1 P_0 + a_1 Q_0}{b_1 Q_0}.$$

Ako još definiramo $P_{-1} = Q_0$, $Q_{-1} = 0$, prethodna relacija glasi

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_1 P_0 + a_1 P_{-1}}{b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}}.$$

Ponovno možemo zatražiti da je brojnik jednak brojniku, a nazivnik nazivniku, tj. da je

$$P_1 = b_1 P_0 + a_1 P_{-1}, \qquad Q_1 = b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}.$$

Te dvije relacije su baza indukcije.

Uzlazni algoritam — indukcija

Neka je $R_n = P_n/Q_n$, uz $n \geq 1$, i pretpostavimo da za P_n i Q_n vrijede relacije

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \qquad Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}.$$

Pogledajmo što se događa pri prijelazu iz R_n u sljedeću konvergenciju R_{n+1},

$$R_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \cdots \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow R_{n+1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \cdots \frac{a_n}{b_n +} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Vidmo da b_n prelazi u

$$b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Kad tu zamjenu napravimo u P_n i Q_n — dobivamo R_{n+1}.

Uzlazni algoritam — indukcija (nastavak)

Dakle, za R_{n+1} vrijedi

$$R_{n+1} = \frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}},$$

gdje je — pretpostavka indukcije i zamjena $b_n \to b_n + \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$,

$$\begin{aligned}
P'_{n+1} &= \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) P_{n-1} + a_n P_{n-2} \\
&= (b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}) + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1} = P_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1}, \\
Q'_{n+1} &= \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \\
&= (b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}) + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1} = Q_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1}.
\end{aligned}$$

Uzlazni algoritam — indukcija (nastavak)

Ako definiramo

$$P_{n+1} = b_{n+1} P'_{n+1},$$
$$Q_{n+1} = b_{n+1} Q'_{n+1},$$

onda R_{n+1} ostaje nepromijenjen (brojnik i nazivnik su skalirani istim brojem b_{n+1}), a prethodna rekurzija postaje

$$P_{n+1} = b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1},$$
$$Q_{n+1} = b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}.$$

Time smo dokazali korak indukcije.

Uzlazni algoritam — rekurzija

Drugim riječima, uz start rekurzije definiran relacijama

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad P_0 = b_0, \quad Q_0 = 1,$$

dobivamo tzv. uzlazni algoritam izvrednjavanja konvergencija verižnog razlomka

$$\begin{aligned} P_k &= b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}, \\ Q_k &= b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

s tim da za konvergencije vrijedi $R_k = P_k / Q_k$, za $k = 0, \ldots, n$.

Primijetite da se u ovakvom zapisu algoritma

- lako mogu dodavati novi a_k i b_k,
- tj. nove karike u verižnom razlomku.

Uzlazni algoritam — ideje za ubrzanje

Iz rekurzije se lako čita da su P_k i Q_k dva rješenja iste diferencijske jednadžbe

$$y_k - b_k y_{k-1} - a_k y_{k-2} = 0,$$

samo s različitim početnim uvjetima.

Broj potrebnih operacija u uzlaznom algoritmu je

- 4 množenja i 2 zbrajanja za svaku konvergenciju.

U algoritmu izvrednjavanja bilo bi dobro da su,

- ili svi koeficijenti a_k, ili svi koeficijenti b_k jednaki 1,

tako da ne moramo množiti tim koeficijentima. Ušteda je polovina svih množenja!

To se može postići tzv. ekvivalentnim transformacijama.

Ekvivalentne transfomacije

Neka su w_k, za $k \geq 1$, proizvoljni brojevi različiti od 0 i neka je $w_{-1} = w_0 = 1$.

Tvrdnja. Verižni razlomak

$$R' = b_0 + \frac{w_0 w_1 a_1}{w_1 b_1 +} \frac{w_1 w_2 a_2}{w_2 b_2 +} \frac{w_2 w_3 a_3}{w_3 b_3 +} \cdots$$

ima iste konvergencije kao i polazni verižni razlomak R, tj. vrijedi

$$R'_n = R_n, \quad \text{za svaki } n \geq 0.$$

Drugim riječima,

- uzlazni algoritam daje isti niz rezultata na R i R'.

Dokaz ide indukcijom,

- po rekurzijama iz uzlaznog algoritma za R i R'.

Neka su S_n i T_n, redom, brojnik i nazivnik n-te konvergencije R'_n iz uzlaznog algoritma za R', a P_n i Q_n to isto za R.

Indukcijom se lako pokazuje da vrijedi

$$S_k = P_k \cdot \prod_{i=1}^{k} w_i, \quad T_k = Q_k \cdot \prod_{i=1}^{k} w_i, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

No, onda je $R'_n = \dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{P_n}{Q_n} = R_n$, za svaki $n \geq 0$. $\square$

Sada možemo verižni razlomak R svesti na ekvivalentnu formu, tako da ili a_k, ili b_k budu svi jednaki 1.

Brojnici jednaki 1 — II tip verižnog razlomka

Verižni razlomak u kojem su svi brojnici jednaki 1

- zove se verižni razlomak **II tipa**.

Dobiva se na sljedeći način.

Pretpostavimo da je $a_k \neq 0$, za sve $k \geq 1$. Onda faktore w_k možemo izabrati tako da vrijedi

$$w_1 a_1 = 1, \quad w_1 w_2 a_2 = 1, \quad \ldots, \quad w_{n-1} w_n a_n = 1, \quad \ldots.$$

Odatle odmah slijedi da je

$$w_{2k} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}, \quad w_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}{a_1 a_3 \cdots a_{2k+1}},$$

što se dokazuje indukcijom.

Uzlazni algoritam — II tip verižnog razlomka

Dobivamo verižni razlomak II tipa, oblika

$$R' = b_0 + \frac{1}{b_1' +} \, \frac{1}{b_2' +} \, \frac{1}{b_3' +} \cdots ,$$

s tim da se lako nalaze formule za koeficijente b_k'.

Napomena. Ako je $a_{n+1} = 0$ i $a_k \neq 0$, za sve $k \leq n$, imamo konačni verižni razlomak, a postupak ide samo do a_n.

Pripadna uzlazna rekurzija za izvrednjavanje ima oblik

$$\begin{aligned} P_k &= b_k' P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= b_k' Q_{k-1} + Q_{k-2}, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nazivnici jednaki 1 — I tip verižnog razlomka

Verižni razlomak u kojem su svi nazivnici jednaki 1

- zove se verižni razlomak **I tipa**.

Dobiva se na sljedeći način.

Ako su $b_k \neq 0$, za sve $k \geq 1$, onda faktore w_k možemo izabrati tako da vrijedi

$$w_1 b_1 = 1, \quad w_2 b_2 = 1, \quad \ldots, \quad w_n b_n = 1, \ldots.$$

Očito, treba uzeti

$$w_k = \frac{1}{b_k}.$$

Uzlazni algoritam — I tip verižnog razlomka

Dobivamo verižni razlomak I tipa, oblika

$$R' = b_0 + \frac{a_1'}{1+} \frac{a_2'}{1+} \frac{a_3'}{1+} \cdots .$$

Za koeficijente a_k' vrijedi

$$a_k' = \frac{a_k}{b_{k-1} b_k}.$$

Pripadna uzlazna rekurzija za izvrednjavanje je

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1} + a_k' P_{k-2}, \\ Q_k &= Q_{k-1} + a_k' Q_{k-2}, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Napomena. Ako se ovdje dogodi da je $b_{n+1} = 0$, onda treba "skratiti" karike, sve dok ne dobijemo nešto različito od nule (ili "skratiti do kraja").

Eulerova forma verižnih razlomaka

Ako brojeve w_k izaberemo tako da je

- zbroj brojnika i nazivnika jednak jedan (osim kod prve karike),

tj. ako uzmemo

$$w_1 b_1 = 1, \quad w_{k-1} w_k a_k + w_k b_k = 1, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

onda se verižni razlomak svede na tzv. Eulerovu formu

$$R' = b_0 + \frac{\alpha_1}{1^+} \, \frac{\alpha_2}{(1 - \alpha_2)^+} \, \frac{\alpha_3}{(1 - \alpha_3)^+} \cdots .$$

Eulerova forma verižnog razlomka, uglavnom se koristi pri dokazivanju tvrdnji.

Silazni algoritam — brzina, optimalnost

Broj operacija u svakom koraku silaznog algoritma je

- točno jedno zbrajanje i jedno dijeljenje,

za razliku od uzlaznog, koji, u svakom koraku, treba

- 4 množenja i 2 zbrajanja (u općem slučaju).

Eventualno možemo proći sa samo 2 množenja.

Može se pokazati da je silazna rekurzija

- optimalan (najbolji) algoritam za izvrednjavanje verižnih razlomaka,

u pogledu broja operacija.

Silazni algoritam — komentari

U tom smislu, u usporedbi s polinomima,

- silazna rekurzija je analogon Hornerove sheme,
- a uzlazna je analogon potenciranja i zbrajanja.

U oba slučaja,

- u sporijem algoritmu lakše dodajemo nove "članove".

Funkcijski verižni razlomci

Funkcijski verižni razlomci mogu se dobiti na više načina, i mogu imati više oblika.

Funkcijske verižne razlomke koji imaju varijablu samo u brojniku zvat ćemo verižni razlomci **I tipa**. Njihov opći oblik je

$$f(x) = \beta_0 + \frac{x - x_1}{\beta_1 +} \, \frac{x - x_2}{\beta_2 +} \, \frac{x - x_3}{\beta_3 +} \cdots .$$

Funkcijski verižni razlomci mogu imati varijablu samo u nazivniku. To su verižni razlomci **II tipa**. Njihov opći oblik je

$$f(x) = b_0 + \frac{a_1}{(x + b_1)^+} \, \frac{a_2}{(x + b_2)^+} \, \frac{a_3}{(x + b_3)^+} \cdots .$$

Funkcijski verižni razlomci — izvrednjavanje

Za izvrednjavanje n-te konvergencije $f_n(x)$ verižnih razlomaka prvog tipa, možemo koristiti silazni algoritam.

Stavimo $F_n = \beta_n$ (ili $F_{n+1} = \infty$), a zatim računamo

$$F_k = \beta_k + \frac{x - x_{k+1}}{F_{k+1}}, \quad k = (n), n-1, \ldots, 0,$$

i na kraju je

$$f_n(x) = F_0.$$

Kako do verižnih razlomaka?

Obično je nešto lakše doći do verižnih razlomaka tipa I, a zatim ih možemo pretvoriti u tip II.

Neki se verižni razlomci dobivaju (nestandardiziranim) postupkom kad se funkcija zapisuje 'pomoću same sebe'.

Primjer. Razvijmo u verižni razlomak prvog tipa funkciju

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Prvo, potrebno je funkciju malo drugačije zapisati. Lako se provjerava da je

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}.$$

Ako ponovimo ovaj raspis u nazivniku razlomka, dobivamo verižni razlomak

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\cdots .$$

Navedimo neke od poznatih verižnih razlomaka, bez njihova “izvoda”:

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{1}{1-}\,\frac{x}{1+}\,\frac{x}{2-}\,\frac{x}{3+}\,\frac{x}{2-}\,\frac{x}{5+}\,\frac{x}{2-}\,\frac{x}{7+}\cdots , \\ &= 1 + \frac{x}{1-}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{3-}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{5-}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{7-}\cdots , \end{aligned}$$

Neki verižni razlomci

$$
\begin{aligned}
\ln(x+1) &= \frac{x}{1+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{3+}\,\frac{4x}{4+}\,\frac{4x}{5+}\,\frac{9x}{6+}\,\frac{9x}{7+}\,\frac{16x}{8+}\,\frac{16x}{9+}\cdots, \\
x\,\mathrm{tg}x &= \frac{x^2}{1-}\,\frac{x^2}{3-}\,\frac{x^2}{5-}\,\frac{x^2}{7-}\cdots, \qquad x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \\
x\,\mathrm{arctg}x &= \frac{x^2}{1+}\,\frac{x^2}{3+}\,\frac{4x^2}{5+}\,\frac{9x^2}{7+}\,\frac{16x^2}{9+}\cdots, \\
x\,\mathrm{th}x &= \frac{x^2}{1+}\,\frac{x^2}{3+}\,\frac{x^2}{5+}\,\frac{x^2}{7+}\cdots \\
x\,\mathrm{Arth}x &= \frac{x^2}{1-}\,\frac{x^2}{3-}\,\frac{4x^2}{5-}\,\frac{9x^2}{7-}\,\frac{16x^2}{9-}\cdots.
\end{aligned}
$$

Odnos prvi tip $\leftrightarrow$ drugi tip

Svi ovi verižni razlomci su prvog tipa. Ima li koristi znati kako bi izgledao njihov drugi tip? Na primjer, šesta konvergencija verižnog razlomka za $\sqrt{1+x}$ bi izgledala ovako, redom, prvi tip, racionalna funkcija, drugi tip:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2} = \frac{7x^3+56x^2+112x+64}{x^3+24x^2+80x+64}$$

$$= 7 + \frac{-112}{(x+20)+}\,\frac{-24/7}{(x+8/3)+}\,\frac{-8/63}{(x+4/3)}.$$

Drugi tip ima kompliciranije koeficijente, ali ima upola manje karika za izvrednjavanje, pa će to dva puta ubrzati postupak izvrednjavanja. Postupak pretvaranje se obavlja u dva koraka.

Prvi tip $\Longrightarrow$ drugi tip

U prvom se koraku od verižnog razlomka prvog tipa dobiva racionalna funkcija.

Za silazni algoritam za izvrednjavanje verižnog razlomka prvog tipa, F_k pišemo kao kvocijent dva polinoma:

$$F_k = \frac{u_k}{v_k}.$$

Tada silazna rekurzija glasi

$$\frac{u_k}{v_k} = \beta_k + \frac{(x - x_{k+1})v_{k+1}}{u_{k+1}}.$$

Kao što smo to i prije radili, izjednačimo brojnike i nazivnike funkcija s obje strane.

Dobivamo

$$\begin{aligned} u_k &= \beta_k u_{k+1} + (x - x_{k+1}) v_{k+1}, \\ v_k &= u_{k+1}. \end{aligned}$$

Naravno, v_k možemo eliminirati uvrštavanjem iz druge jednadžbe u prvu, pa dobivamo

$$u_k = \beta_k u_{k+1} + (x - x_{k+1}) u_{k+2}, \quad k = n, n-1, \ldots, 0,$$

uz start $u_{n+2} = 0$, $u_{n+1} = 1$.

Konačno, n-ta je konvergencija jednaka

$$f_n(x) = F_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{u_0}{u_1},$$

gdje su u_0 i u_1 neki polinomi istog stupnja (onda n mora biti paran).

Da bismo iz racionalne funkcije dobili drugi tip verižnog razlomka, potrebno je koristiti silaznu rekurziju za drugi tip i uspoređivati s u_0/u_1.

Iz silazne rekurzije za drugi tip izlazi

$$\frac{u_0}{u_1} = \tilde{b}_0 + \frac{a_1}{x + F_1},$$

pa možemo pisati $u_0 = u_1 \tilde{b}_0 + a_1 \widetilde{R}_1$, gdje je $\widetilde{R}_1$ monični polinom (vodeći koeficijent je jednak 1) stupnja za 1 manjeg od stupnja polinoma u_0 i u_1. Time su koeficijenti $\tilde{b}_0$ i a_1 jednoznačno određeni.

Zatim ponovimo postupak:

$$\frac{u_1}{u_2} = x + b_1 + \frac{a_2}{x + F_2}.$$

Zatim primijetimo da vrijedi

$$\frac{u_0}{u_1} = \tilde{b}_0 + \frac{a_1}{x + b_1 + \frac{a_2}{x+F_2}} = \tilde{b}_0 + \frac{a_1 u_2}{u_1},$$

odakle zaključujemo da je

$$u_2 = \widetilde{R}_1.$$

Na kraju dobivamo

$$u_1 = \widetilde{R}_1(x + b_1) + a_2\widetilde{R}_2 = \widetilde{R}_1\tilde{b}_1 + a_2\widetilde{R}_2,$$

gdje je $\widetilde{R}_2$ opet monični polinom stupnja za 1 manjeg od stupnja polinoma $\widetilde{R}_1$. Odavde nalazimo b_1 i a_2.

Ova rekurzija smanjuje stupanj polinoma i prekida se kad dobijemo polinom stupnja 0.

Algoritam za pretvaranje racionalne funkcije u drugi tip verižnog razlomka je sljedeći.

Definira se $\widetilde{R}_{-1} = u_0$ i $\widetilde{R}_0 = u_1$. Zatim se vrti petlja

$$\widetilde{R}_{k-1} = \widetilde{R}_k \tilde{b}_k + a_{k+1} \widetilde{R}_{k+1} \quad \text{za} \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdje je su $\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2, \ldots$ monični polinomi, sve dok za neki $k = \ell$ ne postane $\widetilde{R}_{\ell+1} = 1$. Pritom je

$$\tilde{b}_k = \begin{cases} b_0, & k = 0, \\ x + b_k, & k \neq 0. \end{cases}$$