

# Sadržaj predavanja

- Aproksimacija i interpolacija:
  - Uvod u polinomnu spline interpolaciju.
  - Linearni spline i ocjena greške.
  - Po dijelovima kubična interpolacija — uvod.
  - Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija.
  - Ocjene pogreške za kubičnu Hermiteovu interpolaciju.
  - Kubični splajn i neprekidnost druge derivacije.
  - Razne vrste rubnih uvjeta.
  - Ocjene pogreške za kubični splajn.
  - B-splajn.
  - Interpolacija splajnom.
  - Primjeri interpolacije u bazi B-splajnova.

# Uvod

## Po djelovima polinomna interpolacija

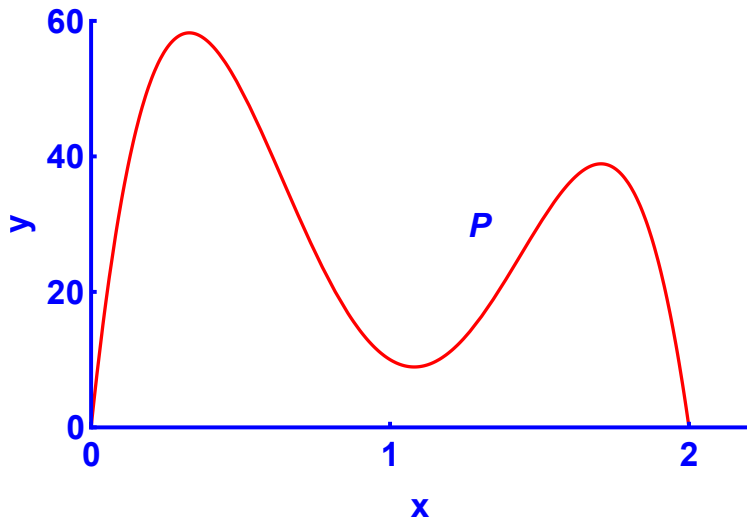
Polinomna interpolacija visokog stupnja

- može imati vrlo loša svojstva,
- u praksi se ne smije koristiti.

Umjesto toga, koristi se

- po djelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu koristi se polinom fiksnog, niskog stupnja.
- Funkcija je jednostavnija te daje daje
  - dobru aproksimaciju, a
  - točnost se ne povećava povećavanjem stupnja polinoma već povećavanjem broja podintervala

## Polinomijalna aproksimacija:



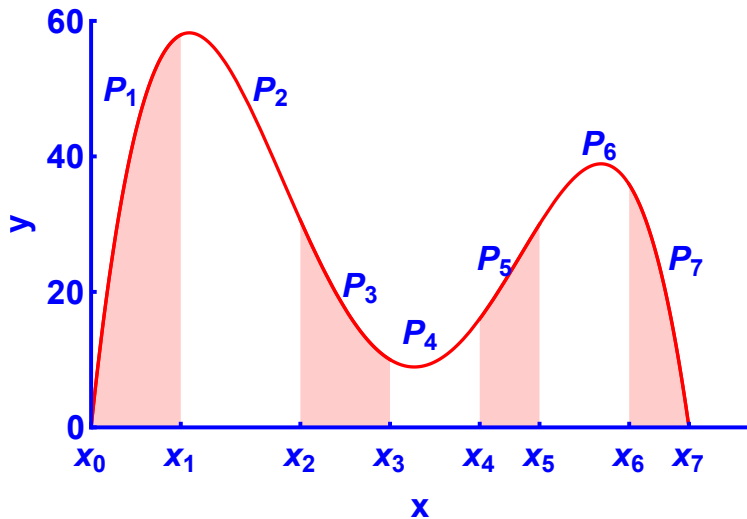
Polinomijalna aproksimacija:

- Visok stupanj polinoma.
- pogreška:

$$\frac{1}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$
$$\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

- Kada  $n \rightarrow \infty$  pogreška ne treba ići u 0!

Po djelovima polinomijalna aproksimacija:



Polinomijalna aproksimacija:

- Segment podijelimo na  $n$  podsegmentata.
- Na svakom podsegmentu aproksimiramo s polinomom.
- Nizak stupanj polinoma.
- pogreška:

$$\leq \frac{M_{n_k+1}}{(n_k + 1)!} (x_{k+1} - x_k)^{n_k+1}$$

- Kada  $n \rightarrow \infty$  i ako  $(x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0$  pogreška će ići u 0!

# Splajn

Zadana particija intervala  $[a, b]$  (čvorovi):

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Po dijelovima polinomijalna funkcija:

$s|_{[x_i, x_{i+1}]}$  je polinom

Splajn stupnja  $k$  (reda  $k + 1$ ):

$s|_{[x_i, x_{i+1}]}$  je polinom  $k$ -tog stupnja

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} = a_{i,0} + a_{i,1}x + a_{i,2}x^2 + \dots + a_{i,k}x^k$$
$$i = 0, \dots, n - 1$$

# Primjer - Problem interpolacije

Za dane

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

i

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$$

odrediti splajn  $s$  koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Egzistencija:

Jedinstvenost:



# Linearni splajn + interpolacija

Po dijelovima linearna funkcija:

$$s(x) = a_{i,0} + a_{i,1}x \quad \text{za} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Interpolacijski uvjeti  $\Rightarrow$

$$s(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \quad \text{za} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

ili

$$s(x) = y_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{za} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

s je neprekidan:

$$s(x_{i-}) = s(x_i) = s(x_{i+})$$

# Interpolacijska greška za linearni splajn

Ako je funkcija  $f$  klase  $C^2[a, b]$ , onda je pogreška takve interpolacije zapravo

- maksimalna pogreška od  $n$  linearnih interpolacija.

Na svakom podintervalu  $[x_{k-1}, x_k]$  pogreška je

- greška linearne interpolacije

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_2^k}{2!} |\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k), \quad M_2^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|.$$

$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k)$  je parabola i ekstrem može imati samo

- na rubu intervala: greška je 0
- u sredini intervala  $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$ :

$$\omega(x_e) = -\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}.$$

Neka je  $h$  maksimalni razmak čvorova po svim podintervalima

$$h := \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k := x_k - x_{k-1}\},$$

i neka je  $M_2$  maksimum apsolutne vrijednosti  $f''$  na cijelom intervalu  $[a, b]$

$$M_2 := \max_{1 \leq k \leq n} M_2^k = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Na cijelom intervalu  $[a, b]$ , onda možemo pisati

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{M_2}{2!} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{1}{8} M_2 \cdot h^2.$$

Zaključak. Ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da maksimalni razmak čvorova  $h \rightarrow 0$ ,

- onda i maksimalna greška teži u 0, tj.
- dobivamo uniformnu konvergenciju!

Na primjer, za ekvidistantne mreže, za koje je

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b - a}{n},$$

pogreška je reda veličine  $h^2$ , odnosno  $n^{-2}$ .

## Interpolacija u unutarnjim točkama

Umjesto interpolacije u čvorovima  $x_i$ , mogli smo postaviti interpolacijske uvjete u unutarnjim točkama:

$$s(t_{k,1}) = y_{k,1} = f(t_{k,1}), \quad s(t_{k,2}) = y_{k,2} = f(t_{k,2}), \quad \text{za } t_{k,1}, t_{k,2} \in (x_{k-1}, x_k)$$

Interpolacijski uvjeti  $\Rightarrow$

$$s(x) = y_{k,1} + \frac{y_{k,2} - y_{k,1}}{t_{k,2} - t_{k,1}}(x - t_{k,1}) \quad \text{za } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

s nije neprekidan:

$$\begin{aligned} s(x_k-) &= y_{k,1} + \frac{y_{k,2} - y_{k,1}}{t_{k,2} - t_{k,1}}(x_k - t_{k,1}) \\ &\neq y_{k+1,1} + \frac{y_{k+1,2} - y_{k+1,1}}{t_{k+1,2} - t_{k+1,1}}(x_k - t_{k+1,1}) = s(x_k+) \end{aligned}$$

**Napomena.** Radi jednoznačnosti, u slučaju prekida u čvorovima, obično se splajn definira da je neprekidan sdesna.

Izračunajmo interpolacijsku grešku ako interpolacijske točke dijele segment  $[x_{k-1}, x_k]$  u omjeru 1 : 2 : 1.

Kao i prije, funkcija  $\omega(x) = (x - t_{k,1})(x - t_{k,2})$  ekstrem može imati samo u rubovima i sredini intervala.

Jer je  $t_{k,1} = x_{k-1} + \frac{1}{4}h_k$  i  $t_{k,2} = x_{k-1} + \frac{3}{4}h_k$ , najveća apsolutna vrijednost je u rubovima

$$\omega(x_{k-1}) = \omega(x_k) = \frac{3}{16}h_k^2.$$

Ocjena greške je

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{M_2}{2!} \cdot \frac{3}{16}h^2 = \frac{3}{32}M_2 \cdot h^2.$$

Usporedimo pogreške u ova dva pristupa:

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 \cdot h^2 \quad \text{interpolacija u čvorovima (} n \text{ točaka)}$$

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{3}{32} M_2 \cdot h^2 \quad \text{interpolacija u dvije unutarnje točke (} 2n \text{ točaka)}$$

Duplo više podataka a pogreška se smanjila za četvrtinu.

Da smo u  $2n$  točaka koristili interpolaciju u čvorovima, greška bi bila

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{32} M_2 \cdot h^2.$$

Umjesto  $h$  koristimo  $h/2$  u ocjeni greške.

Bolje je koristiti neprekidni splajn!

- Neprekidni linearni splajn - Za  $n$  intervala trebamo pamtit po dva koeficijenta za svaki interval.
- Ukupno  $2n$  koeficijenata.
- Međutim, očito  $n + 1$  podatak (vrijednost funkcije) jednoznačno određuje splajn.
- Za računanje vrijednosti linearnog splajna u točki dovoljno je pamtit  $n + 1$  podatak:  $y_0, \dots, y_n$ .



# Kvadratični splajn

$$s(x) = a_{k,0} + a_{k,1}x + a_{k,2}x^2 \quad \text{za} \quad x \in [x_{k-1}, x_k]$$

- Na svakom intervalu 3 koeficijenta  $\times n$  intervala =  $3n$  koeficijenata

Splajn (polinom 2. stupnja) je jednoznačno određen na svakom intervalu.

Ovakav splajn ne treba biti neprekidan.

- Ako su čvorovi točke interpolacije (plus jedna točka iz unutrašnjosti intervala)

Splajn će biti neprekidan ( $s(x_k-) = f(x_k)$  i  $s(x_k+) = f(x_k)$ )

Što ako želimo interpolaciju samo u čvorovima ( $x_k$ )?

- Interpolacijski uvjeti: 2 na svakom intervalu  $\Rightarrow 2n$  uvjeta.

$\Rightarrow$  koeficijenti nisu jednoznačno određeni

- $s$  neprekidan ( $\in C^0$ ) - zadovoljeno zbog interpolacijskih uvjeta u čvorovima
- Dodatni uvjet na glatkoću:

$s \in C^1(a, b)$  - dodatnih  $n - 1$  uvjeta (u unutarnjim čvorovima  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ )

- Ukupno  $3n$  koeficijenata i  $3n - 1$  uvjeta (jednadžbi)
- Dodatni interpolacijski uvjet  $s'(a) = d_0$ .

Kvadratični splajn klase  $C^1(a, b)$  je jednoznačno određen interpolacijskim uvjetima:

- Na intervalu  $[x_0, x_1]$  uvjeti:

$$s(x_0) = y_0, \quad s(x_1) = y_1, \quad s'(x_0) = d_0$$

jednoznačno određuju polinom 2. stupnja.

- Na intervalu  $[x_1, x_2]$  uvjeti:

$$s(x_1) = y_1, \quad s(x_2) = y_2, \quad s'(x_1) = s'(x_1-)$$

jednoznačno određuju polinom 2. stupnja.

- ...

# Greška interpolacije za kvadratični splajn

- Kod interpolacije u 3 unutarnje točke na svakom podintervalu primjenom formule za interpolacijsku pogrešku polinomom 2. stupnja lagano dobijemo da je

$$|f(x) - s(x)| \leq C \max_{x \in [a, b]} |f'''(x)| \cdot h^3$$

ako je funkcija koju interpoliramo klase  $C^3(a, b)$

- Kod interpolacije samo u čvorovima (splajnom klase  $C^1$ ) pogreška je istog oblika! (Samo je konstanta  $C$  različita.)
- Interpolacija u  $n + 1$  točki daje u biti istu točnost kao interpolacija u  $2n$  i  $3n$  točaka! (Ocjena pogreške za Hermiteovu interpolaciju.)

- Uočimo, zahtjev da je kvadratični splajn  $s \in C^1(a, b)$  znači:
  - neprekidnost u unutarnjim čvorovima -  $n - 1$  uvjet
  - neprekidnost derivacije u unutarnjim čvorovima -  $n - 1$  uvjet
- Ukupno  $2n - 2$  uvjeta
- Preostalih  $n + 2$  uvjeta može se zadati na različite načine, zavisno o primjeni:
  - Interpolacija - interpolacija u  $n + 1$  čvoru  
+ interpolacija derivacije u  $x_0$
  - Metoda najmanjih kvadrata
  - Zadovoljavanje diferencijalne jednačbe u čvorovima  
+ početni uvjet
- ...

## Digresija.

- Što je kvadratični splajn klase  $C^2$ 
  - neprekidnost u unutarnjim čvorovima -  $n - 1$  uvjet
  - neprekidnost derivacije u unutarnjim čvorovima -  $n - 1$  uvjet
  - neprekidnost druge derivacije u unutarnjim čvorovima -  $n - 1$  uvjet
- Ukupno  $3n - 3$  uvjeta
- Preostalo 3 uvjeta
- Polinom 2. stupnja
- Polinomi su također splajnovi!

## Splajn reda $m + 1$ (stupnja $m$ )

$$s(x) = a_{k,0} + a_{k,1}x + a_{k,2}x^2 + \dots + a_{k,m}x^m \quad \text{za } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$m + 1$  koeficijent  $\times n$  intervala =  $(m + 1)n$  koeficijenata

Maksimalna glatkoća

- $s$  neprekidan ( $\in C^0$ ) -  $(n - 1)$  uvjet
- $s \in C^{m-1}(a, b)$  - dodatnih  $(m - 1)(n - 1)$  uvjeta
- Ukupno  $(m + 1)n$  koeficijenata i  $m(n - 1)$  uvjeta (jednadžbi)
- Možemo postaviti dodatnih  $n + m$  uvjeta

# Interpolacijski uvjeti

Npr.  $n + m$  uvjeta možemo dobiti:

- Interpolacija u čvorovima -  $n + 1$  uvjet
- Preostalo  $m - 1$  uvjeta
- $m - 1$  interpolacijski uvjet na derivacije (1., 2., ... reda) u rubovima intervala  $[a, b]$  (u čvorovima  $x_0$  i  $x_n$ )
- Zgodno je da u oba ruba budu uvjeti na iste derivacije  
 $\Rightarrow m - 1$  je paran  $\Rightarrow m = 1, 3, 5, \dots$

**Ovo još ne znači da iz ovih uvjeta možemo jedinstveno odrediti splajn reda  $m + 1$**



## Kubični splajn ( $m = 3$ ) i interpolacija

Kubični splajn - po dijelovima kubična funkcija (na segmentima  $[x_i, x_{i+1}]$ )

Uvjet da je splajn s klase  $C^2$  daje  $3n - 3$  uvjeta.

Interpolacija:  $n + 1$  uvjeta

Dodatna 2 uvjeta:

- Potpuni splajn:  $s'(x_0) = \alpha, s'(x_n) = \beta$ .
- Druga derivacija u rubovima:  $s''(x_0) = \alpha, s''(x_n) = \beta$ .
- Prirodni splajn(slobodni krajevi):  $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ .
- Periodički splajn:  $s'(x_0) = s'(x_n), s''(x_0) = s''(x_n)$ .
- 'Not-a-knot' uvjet:  $s'''(x_1-) = s'''(x_1+),$   
 $s'''(x_{n-1}-) = s'''(x_{n-1}+).$

## Primjer - Interpolacija kubičnim splajnom

Particija  $x_0, x_1, \dots, x_n$  intervala  $[a, b]$  zadana.

Promatramo problem interpolacije potpunim kubičnim splajnom.

Uvjeti:

$$s \in C^2(a, b)$$

Interpolacijski uvjeti:

$$s(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n$$

i u rubovima

$$s'(x_0) = d_0, \quad \text{i} \quad s'(x_n) = d_1.$$

Splajn  $s$  je oblika

$$s(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}) + c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3,$$

za  $x \in [x_{k-1}, x_k]$ , i za  $k = 1, \dots, n$ .

Na svakom intervalu  $[x_{k-1}, x_k]$  splajn  $s$  zadovoljava interpolacijske uvjete

$$\begin{aligned}s(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\s(x_k) &= f_k,\end{aligned}$$

Ovi uvjeti automatski osiguravaju neprekidnost splajna  $s$ .

Sa  $s_j$  označimo

$$s_j := s'(x_j), \quad \text{za } i = 0, \dots, n.$$

$s_j$  su za sada nepoznati, odredit ćemo ih naknadno.

Ovime smo ujedno dodali uvjet da je  $s \in C^1$ !

Zapišimo  $s$  na drugi način.

Na intervalu  $[x_{k-1}, x_k]$  splajn  $s$  zadovoljava interpolacijske uvjete

$$\begin{aligned} s(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\ s(x_k) &= f_k, \\ s'(x_{k-1}) &= S_{k-1}, \\ s'(x_k) &= S_k. \end{aligned}$$

Hermiteova interpolacija kubičnim polinomom!

Newtonov oblik Hermiteovog interpolacijskog polinoma koji ima dva dvostruka čvora  $x_{k-1}$  i  $x_k$  je

$$\begin{aligned} s(x) &= f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\ &\quad + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 \\ &\quad + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2(x - x_k), \end{aligned}$$

uz uvažavanje da je

$$\begin{aligned} f[x_{k-1}, x_{k-1}] &= s_{k-1}, \\ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k}, \\ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}. \end{aligned}$$

$s_k$  određujemo iz uvjeta neprekidnosti 2. derivacije.

$$s''(x) = 2 \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} + \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2} \cdot (4(x - x_{k-1}) + 2(x - x_k))$$

Posebno

$$s''(x_{k-1+}) = 2 \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} - 2 \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k}$$

$$s''(x_k-) = 2 \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} + 4 \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k}$$

Uvjet  $s''(x_{k-}) = s''(x_{k+}) \Rightarrow$

$$2 \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} + 4 \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k} =$$

$$2 \frac{f[x_k, x_{k+1}] - s_k}{h_{k+1}} - 2 \frac{s_{k+1} + s_k - 2f[x_k, x_{k+1}]}{h_{k+1}}$$

odnosno

$$\frac{s_{k-1}}{3h_k} + 2 \frac{s_k}{3h_k} + 2 \frac{s_k}{3h_{k+1}} + \frac{s_{k+1}}{3h_{k+1}} = \frac{f[x_{k-1}, x_k]}{h_k} + \frac{f[x_k, x_{k+1}]}{h_{k+1}}$$

ili

$$h_{k+1}s_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})s_k + h_k s_{k+1} =$$

$$= 3(h_{k+1}f[x_{k-1}, x_k] + h_k f[x_k, x_{k+1}]).$$





# Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija

Vrijednosti  $s_k$  možemo izabrati tako da su one baš jednake derivaciji zadane funkcije u odgovarajućoj točki, tj. da vrijedi

$$s_k = f'(x_k).$$

U tom slučaju je kubični polinom

- određen lokalno, tj. ne ovisi o drugim kubičnim polinomima,
- razlog — na rubovima zadane 2 funkcijske vrijednosti i 2 vrijednosti derivacija.

Takva se interpolacija zove po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija.

## Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Neka je funkcija  $f \in C^4[a, b]$ . Za svaki podinterval  $[x_{k-1}, x_k]$  vrijedi ocjena greške za Hermiteovu kubičnu interpolaciju

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_4^k}{4!} |\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})^2(x - x_k)^2, \quad M_4^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f^{(4)}(x)|.$$

Ekstrem od  $|\omega|$  se dostiže u sredini intervala:  $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$ .

Vrijednost u  $x_e$  je

$$\omega(x_e) = (x_e - x_{k-1})^2(x_e - x_k)^2 = \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16}.$$

Definiramo li, ponovno, maksimalni razmak čvorova

$$h = \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k = x_k - x_{k-1}\},$$

onda, na čitavom  $[a, b]$ , možemo pisati

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{M_4}{4!} \frac{h^4}{16} = \frac{1}{384} h^4 \cdot M_4,$$

pri čemu je

$$M_4 = \max_{k=1, \dots, n} \{M_4^k\} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Drugim riječima, ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da  $h \rightarrow 0$ , onda i maksimalna greška teži u 0.

Neka je  $f \in C^1[a, b]$  i pretpostavimo da

- $f$  ima ograničenu i integrabilnu četvrtu derivaciju na svakom podintervalu  $[x_{k-1}, x_k]$ .

Tada je

$$\|f(x) - s(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

$$\|f'(x) - s'(x)\|_{\infty} \leq \frac{\sqrt{3}}{216} h^3 \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

$$\|f''(x) - s''(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{12} h^2 \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

$$\|f^{(3)}(x) - s^{(3)}(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} h \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

# Greška kubične splajn interpolacije klase $C^2$

Neka je  $f \in C^2[a, b]$  i pretpostavimo da

- $f$  ima ograničenu i integrabilnu četvrtu derivaciju na svakom podintervalu  $[x_{k-1}, x_k]$ .

Tada je

$$\|f(x) - s(x)\|_{\infty} \leq \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

$$\|f'(x) - s'(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{24} h^3 \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

$$\|f''(x) - s''(x)\|_{\infty} \leq \frac{3}{8} h^2 \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

$$\|f^{(3)}(x) - s^{(3)}(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta} + \beta \right) h \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

gdje je  $\beta := (\max_k h_k) / (\min_k h_k)$  mjera neuniformnosti mreže.

Uočimo,

$C^1$  interpolacija u  $n + 1$  vrijednosti funkcije i  $n + 1$  vrijednosti prve derivacije

$$\|f(x) - s(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

$C^2$  interpolacija u  $n + 1$  vrijednosti funkcije

$$\|f(x) - s(x)\|_{\infty} \leq \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

$C^1$  interpolacija - duplo više podataka a pogreška 5 puta manja.

Da smo u  $C^2$  interpolaciji koristili duplo više podataka - pogreška bi bila 16 puta manja.

# Metoda najmanjih kvadrata i splajnovi

$\Pi$  - Zadana subdivizija segmenta  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

$\mathcal{S}_m(\Pi)$  - prostor svih splajnova reda  $m + 1$  i klase  $C^{m-1}$  na zadanoj subdiviziji  $\Pi$

$u, v$  - splajnovi,  $u, v \in \mathcal{S}_m(\Pi)$

Da li je i  $u + v \in \mathcal{S}_m(\Pi)$ ?

$u, v$  polinomi stupnja  $m$  na segmentu  $[x_{k-1}, x_k]$

$\Rightarrow u + v$  polinom stupnja  $m$  na segmentu  $[x_{k-1}, x_k]$

$u, v \in C^{m-1}(a, b) \Rightarrow u + v \in C^{m-1}(a, b)$

Da li je za  $\alpha \in \mathbf{R}$  i  $\alpha u \in \mathcal{S}_m(\Pi)$ ?

$u$  polinom stupnja  $m$  na segmentu  $[x_{k-1}, x_k]$

$\Rightarrow \alpha u$  polinom stupnja  $m$  na segmentu  $[x_{k-1}, x_k]$

$u \in C^{m-1}(a, b) \Rightarrow \alpha u \in C^{m-1}(a, b)$

$\mathcal{S}_m(\Pi)$  je **vektorski prostor**

Kolika je dimenzija prostora  $\mathcal{S}_m(\Pi)$ ?

Kako izgleda baza prostora  $\mathcal{S}_m(\Pi)$ ?



# Zašto je baza prostora splajnova važna?

Problem interpolacije:

- $s \in \mathcal{S}_m(\Pi)$
- $s$  po djelovima polinom stupnja  $m$   
 $\Rightarrow (m + 1) \cdot n$  nepoznatih koeficijenata
- $s \in C^{m-1} \Rightarrow m \cdot (n - 1)$  uvjeta
- interpolacija funkcije u čvorovima  $\Rightarrow n + 1$  uvjet
- interpolacija derivacija funkcije u rubovima  $\Rightarrow m - 1$  uvjet
- $n \cdot (m + 1)$  uvjet (jednadžba) i  $n \cdot (m + 1)$  koeficijent (nepoznanica)
- rješavamo kvadratni (regularni?) sustav jednadžbi (LR, QR, ...)

(Diskretna) metoda najmanjih kvadrata:

- $s \in \mathcal{S}_m(\Pi)$
- $s$  po djelovima polinom stupnja  $m$   
 $\Rightarrow (m + 1) \cdot n$  nepoznatih koeficijenata
- $s \in C^{m-1} \Rightarrow m \cdot (n - 1)$  uvjeta
- Preostalih  $n + m$  uvjeta odredimo metodom najmanjih kvadrata

(Diskretna) metoda najmanjih kvadrata:

- Neka su zadani parovi  $(t_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $N > n + m$ .
- Odredite  $\bar{s} \in \mathcal{S}_m(\Pi)$  za koji je suma

$$\sum_{i=1}^N (s(t_i) - y_i)^2$$

minimalna.

- Minimizacija po  $s \in \mathcal{S}_m(\Pi)$  je minimizacija po  $(m + 1) \cdot n$  koeficijentu uz zadovoljavanje  $m \cdot (n - 1)$  uvjeta (neprekidnosti).
- Ovo je tzv. problem minimizacije s ograničenjima. Složeni problem.
- Ako je  $\mathcal{S}_m(\Pi)$  vektorski prostor i ako znamo bazu  
→ linearna metoda najmanjih kvadrata (QR, SVD, ...)

# Zašto je baza prostora splajnova važna?

Reprezentacija splajna (kada su koeficijenti poznati)

- $s \in \mathcal{S}_m(\Pi)$
- $\Pi$  - pamtimo  $n + 1$  čvor  $x_k$
- $s$  po djelovima polinom stupnja  $m$   
 $\Rightarrow$  pamtimo  $(m + 1) \cdot n$  koeficijenata
- Ukupno pamtimo  $n \cdot m + 2n + 1$  podatak
- Ako koristimo prikaz u bazi za  $\mathcal{S}_m(\Pi)$
- $\Pi$  - pamtimo  $n + 1$  čvor  $x_k$
- Trebamo pamtiti  $n + m$  koeficijenata (dimenzija vektorskog prostora)  $\mathcal{S}_m(\Pi)$
- Ukupno pamtimo  $2n + m + 1$  podatak

# Baza prostora kubičnih splajnova

**Napomena.** Ovdje ćemo koristiti činjenicu da je kubični splajn jednoznačno zadan s  $n + 1$  interpolacijskih uvjeta (u  $x_0, \dots, x_n$ ) i 2 uvjeta za interpolaciju derivacije u rubovima. Ovo će biti dokazano kasnije!

⇒ dimenzija je  $n + 3$ ?

Za  $i = 0, \dots, n$  definiramo splajn  $S_i$  iz uvjeta:

$$\begin{aligned} B_i(x_i) &= 1, \\ B_i(x_j) &= 0, \quad \text{za } j \neq i, \\ B_i'(a) &= 0, \\ B_i'(b) &= 0, \end{aligned}$$

te  $D_0$  i  $D_1$ :

$$D_0(x_j) = 0, \quad \text{za } j = 0, \dots, n,$$

$$D'_0(a) = 1,$$

$$D''_0(b) = 0,$$

$$D_1(x_j) = 0, \quad \text{za } j = 0, \dots, n,$$

$$D'_1(a) = 0,$$

$$D''_1(b) = 1.$$

Pokazat ćemo da iz jedinstvenosti interpolacijskog splajna slijedi da su  $S_0, \dots, S_n, D_0, D_1$  linearno nezavisni i da čine bazu  $\mathcal{S}_3(\Pi)$ .

Neka je  $s \in \mathcal{S}_3(\Pi)$ , tada splajn

$$\sum_i s(x_i)S_i + s'(a)D_0 + s'(b)D_1$$

interpolira splajn  $s$ . Jer i  $s$  interpolira samog sebe, zbog jedinstvenosti interpolacijskog splajna je

$$s \equiv \sum_i s(x_i)S_i + s'(a)D_0 + s'(b)D_1$$

$\Rightarrow$  skup izvodnica

$$0 \equiv \sum_i \alpha_i S_i + \beta_0 D_0 + \beta_1 D_1 = s$$

Uvrstimo  $x_j, j = 1, \dots, n$ :

$$0 = s(x_j) = \alpha_j.$$

U rubovima je

$$0 = s'(a) = \beta_0, \quad \text{i} \quad 0 = s'(b) = \beta_1$$

→ nezavisnost

$\{S_0, \dots, S_n, D_0, D_1\}$  je baza prostora  $\mathcal{S}_3(\Pi)$ .



Ova baza je nepraktična i ne koristi se.



# B-splajnovi

Odredimo najmanji mogući  $k$  takav da splajn  $B_i \in \mathcal{S}_3(\Pi)$  zadovoljava:

$$\begin{aligned} B_i &\in C^2(a, b), \\ B_i(x) &= 0 \text{ za } x \notin [x_i, x_{i+k}] \\ B_i &\not\equiv 0. \end{aligned}$$

## Rješenje.

$k$ -intervala  $\rightarrow 4 \cdot k$  koeficijenata

$B_i \in C^2(a, b) \rightarrow 3 \cdot (k + 1)$  uvjeta (u  $x_i, \dots, x_{i+k}$ )

$$4 \cdot k - 3 \cdot (k + 1) = k - 3$$

$$B_i \not\equiv 0 \Rightarrow k - 3 > 0$$

Najmanji  $k$ :  $k = 4$

**B-splajn** - splajn s minimalnim kompaktnim nosačem:

$$\begin{aligned} B_i &\in C^2(a, b), \\ B_i(x) &= 0 \text{ za } x \notin [x_i, x_{i+4}] \\ B_i &\neq 0. \end{aligned}$$

Naziv (engl.): B(asis) spline.

Subdiviziju  $\Pi$  segmenta  $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

proširimo s proizvoljnim točkama

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < a \quad \text{i} \quad b < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+2}.$$

Za novu subdiviziju

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+2}$$

promatramo B-splajnove

$$B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$$

To su svi netrivialni B-splajnovi na  $(a, b)$ .

Čine bazu prostora  $\mathcal{S}_3(\Pi)$

B-splajnovi nisu jedinstveno određeni: ako je  $B_i$  B-splajn onda je i  $\alpha B_i$  B-splajn (za  $\alpha \neq 0$ ).

Normiranje:

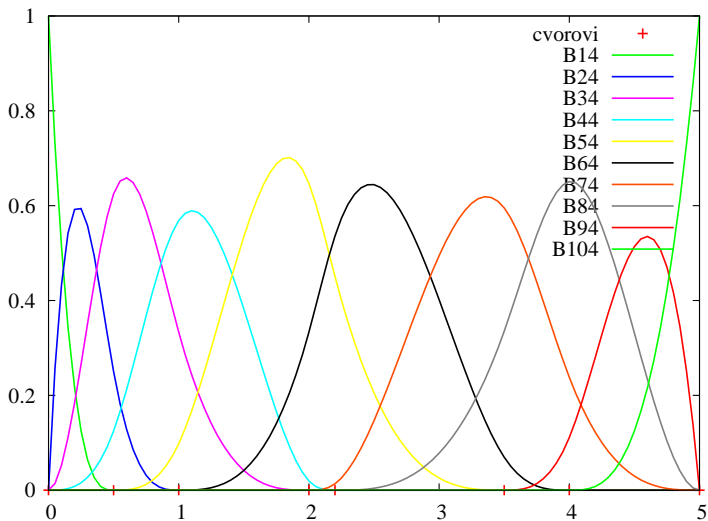
$$\sum_i B_i(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

-particija jedinice

B-splajn je različit od 0 na  $(x_i, x_{i+4})$

Ako je  $B_i(x) = 0$  za  $x \in (x_i, x_{i+4})$  onda  $B_i \equiv 0$ .

# B-splajnovi reda 4



# Što je splajn?

- Po dijelovima polinomijalna funkcija?
- U principu da, ali uz njega obično vežemo neka dodatna svojstva. Glatkoću, npr.
- Većina splajn poistovjeđuje s kubičnim splajnom maksimalne glatkoće (klase  $C^2$ )
- Možemo reći da je to kombinacija B-splajnova.
- Glatkoća ne mora biti maksimalna. Može varirati od čvor do čvora.
- Može se gledati i generalniji pristup. Po dijelovima eksponencijalna funkcija, p.d. racionalna funkcija, ...

# B-splajn

## Po djelovima polinomna funkcija

Neka je dan strogo rastući niz točaka (**čvorova**)  $\mathbf{X} := (x_i)_{i=0}^{\ell}$ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\ell} = b$$

i neka je  $k \in \mathbb{N}$ . Ako je  $p_0, \dots, p_{\ell-1}$  bilo koji niz od  $\ell$  polinoma **reda**  $k$  (stupnja  $k - 1$ ), tada definiramo odgovarajuću **po djelovima polinomnu (polinomnu splajn) funkciju**  $f$  sa

$$f(x) := p_i(x) \text{ za } x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, \ell - 1.$$

Dakle, po dogovoru

- $f$  je neprekidna s desna,
- a obično se zadnji podinterval proširi i na  $x_{\ell}$ , pa imamo

$$f(x) := p_{\ell-1}(x) \text{ za } x \in [x_{\ell-1}, x_{\ell}].$$

## Prostor polinomnih splajnova

Prostor ovakvih funkcija označavamo sa  $\mathcal{P}_{k,\mathbf{x}}$ , on je linearan i dimenzija mu je  $k \cdot \ell$ .

Ipak se još traži i neka glatkoća splajna, i to tako da se definiraju uvjeti glatkoće u čvorovima:

$$f^{(j)}(x_i^+) = f^{(j)}(x_i^-) \text{ za } j = 0, \dots, \nu_i - 1, \quad i = 1, \dots, \ell - 1.$$

$\nu_i$  zovemo **broj uvjeta neprekidnosti** u  $x_i$  i  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)_{i=1}^{\ell-1}$ .

Prostor takvih splajnova označavamo sa  $\mathcal{P}_{k,\mathbf{x},\boldsymbol{\nu}}$ , a

$$\dim \mathcal{P}_{k,\mathbf{x},\boldsymbol{\nu}} = k \cdot \ell - \sum_{i=1}^{\ell-1} \nu_i, \quad \nu_i \leq k.$$

Postavlja se pitanje odabira dobre baze za taj prostor.



# B-splajn

## Definicija

Neka je  $\mathbf{T} := (t_i)_{i=1}^{n+k}$  nepadajući niz čorova, tada  $i$ -ti (**normalizirani**) **B-splajn** reda  $k$  za niz čvorova  $\mathbf{T}$  označavamo s  $B_{i,k,\mathbf{T}}$  i definiramo sa

$$B_{i,k,\mathbf{T}}(x) := (-1)^k (t_{i+k} - t_i) (x - t)_+^{k-1} [t_i, \dots, t_{i+k}],$$

za  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gdje se **odsječena potencija**  $(\cdot)_+^r$  definira sa

$$(x)_+^r := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^r & x \geq 0 \end{cases}$$

za  $r = 1, 2, \dots$ , a za  $r = 0$  sa

$$(x)_+^0 := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}.$$

# Proširena particija

Neka je  $\mathbf{T}$  dan s:

$$\begin{aligned}
 t_1 &\leq \dots \leq t_k = x_0 = a, \\
 t_{k+1} &\leq \dots \leq t_{k+M} = \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{x_{\ell-1}, \dots, x_{\ell-1}}_{m_{\ell-1}}, \\
 b = x_\ell &= t_{k+M+1} \leq \dots \leq t_{2k+M},
 \end{aligned}$$

gdje su  $m_i$ ,  $0 < m_i \leq k$ , **multipliciteti čvorova**,  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{\ell-1})$ , i  $M := \sum_{i=1}^{\ell-1} m_i$ .

Nadalje, neka je  $\nu_i = k - m_i$  i  $n = k + M$ , tada se prostor razapet B-splajnovima označava sa  $\mathcal{S}_{k, \mathbf{T}}$ , dimenzija mu je  $n$ , i može se pokazati da je

$$\mathcal{S}_{k, \mathbf{T}} = \mathcal{P}_{k, \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}}.$$

Niz čvorova  $\mathbf{T}$  zove se **proširena particija** particije  $\mathbf{X}$ . Najčešće se uzima

$$t_1 = \cdots = t_k = a \text{ i } t_{n+1} = \cdots = t_{n+k} = b.$$

Može se još proširiti definicija B-splajnova na slučaj kada je  $t_i = \cdots = t_{i+k}$ , tada je

$$B_{i,k,\mathbf{T}} \equiv 0.$$

Kada je jasno na koju se proširenu particiju B-splajnovi odnose, možemo skratiti oznaku:

$$B_{i,k} := B_{i,k,\mathbf{T}}.$$

B-splajnovi se računaju pomoću rekurzije, koja koji put služi kao alternativna definicija B-splajnova:

# de Boor–Cox-ova rekurzija

## Teorem

(de Boor–Cox-ova rekurzija)

a) Za  $t_i < t_{i+1}$  je

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (1)$$

b) Neka je  $k \geq 2$  i  $t_i < t_{i+k}$ , tada za svaki  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$B_{i,k} = \omega_{i,k} B_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1},$$

$$\omega_{i,k}(x) = \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}, & \text{ako je } t_i \neq t_{i+k-1} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

**Dokaz:** Dio a) slijedi direktno iz definicije. Za  $k = 1$ , uz  $t_i < t_{i+1}$ , ona daje

$$\begin{aligned} B_{i,1}(x) &= -(t_{i+1} - t_i)(x - t)_+^0 [t_i, t_{i+1}] \\ &= -(x - t_{i+1})_+^0 + (x - t_i)_+^0, \end{aligned}$$

pa za  $x < t_i$  imamo

$$B_{i,1}(x) = -0 + 0 = 0,$$

za  $t_i \leq x < t_{i+1}$  imamo

$$B_{i,1}(x) = -0 + 1 = 1,$$

dok je za  $x \geq t_{i+1}$

$$B_{i,1}(x) = -1 + 1 = 0.$$

Za b) primjetimo da je

$$(x - t)_+^{k-1} = (x - t) \cdot (x - t)_+^{k-2},$$

pa ako primjenimo Leibnizovu formulu za podijeljenu razliku produkta funkcija dobivamo

$$\begin{aligned}(x - t)_+^{k-1}[t_i, \dots, t_{i+k}] &= \left( (x - t)(x - t)_+^{k-2} \right) [t_i, \dots, t_{i+k}] \\ &= \sum_{r=i}^{i+k} (x - t)[t_i, \dots, t_r] \cdot (x - t)_+^{k-2}[t_r, \dots, t_{i+k}] \\ &= (x - t)[t_i] \cdot (x - t)_+^{k-2}[t_i, \dots, t_{i+k}] \\ &\quad + (x - t)[t_i, t_{i+1}] \cdot (x - t)_+^{k-2}[t_{i+1}, \dots, t_{i+k}],\end{aligned}$$

jer je  $(x - t)$  polinom prvog stupnja pa je  $(x - t)[t_i, \dots, t_r] = 0$  za  $r \geq i + 2$ .

Odatle, uz pomoć rekurzije za podijeljene razlike, slijedi:

$$\begin{aligned}
 B_{i,k}(x) &= (-1)^k (t_{i+k} - t_i) (x - t)_+^{k-1} [t_i, \dots, t_{i+k}] \\
 &= (-1)^k (t_{i+k} - t_i) \left( (x - t_i) \cdot (x - t)_+^{k-2} [t_i, \dots, t_{i+k}] \right. \\
 &\quad \left. - (x - t)_+^{k-2} [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] \right) \\
 &= (-1)^k (t_{i+k} - t_i) \left( \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} ((x - t)_+^{k-2} [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] \right. \\
 &\quad \left. - (x - t)_+^{k-2} [t_i, \dots, t_{i+k-1}]) - (x - t)_+^{k-2} [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k-1} \left( (x - t_i)(x - t)_{+}^{k-2} [t_i, \dots, t_{i+k-1}] \right. \\
&\quad \left. + (t_{i+k-1} - x)(x - t)_{+}^{k-2} [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] \right) \\
&= \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x).
\end{aligned}$$

U zadnjem redu zapravo pretpostavljamo  $t_i < t_{i+k-1}$  i  $t_{i+1} < t_{i+k}$ .

Ako jedna od nejednakosti ne vrijedi, onda je jedan od  $B_{i,k-1}$  ili  $B_{i+1,k-1}$  jednak nul funkciji pa se koristi “de Boor-ova maksima” koja kaže da bilo što pomnoženo s nulom daje nulu. □



# Svojstva B-splajnova

Neka važna svojstva:

## Teorem

a)  $B_{i,k}(x) = 0$ , za  $x < t_i$  i  $x > t_{i+k}$ ,

b)  $B_{i,k}(x) > 0$ , za  $t_i < x < t_{i+k}$ , iz čega slijedi

$$\text{supp } B_{i,k} \subseteq [t_i, t_{i+k}].$$

c)  $\sum_{i=1}^n B_{i,k}(x) = 1$ , za svaki  $x \in [a, b]$  (particija jedinice).

**Dokaz:** Prvo ćemo dokazati a):  $B_{i,k}(x) = 0$ , za  $x < t_i$  i  $x > t_{i+k}$

- Iz definicija “plus” funkcije i podijeljenih razlika, jasno je da je

$$B_{i,k} = 0 \quad \text{za} \quad x < t_i,$$

jer je

$$(x - t)_+^{k-1} = 0,$$

što vrijedi i za njegove derivacije, za svaki  $t = t_j$ ,  $j = i, \dots, i + k$ .

- S druge strane, za  $x > t_{i+k}$  imamo  $k$ -tu podijeljenu razliku polinoma  $(x - t)^{k-1}$ , koja je jednaka nuli.

Dokaz za b)  $B_{i,k}(x) > 0$ , za  $t_i < x < t_{i+k}$ , ide indukcijom po  $k$ .

- Za  $k = 1$  i  $t_i < t_{i+1}$  imamo (1).

$$B_{i,1} = \begin{cases} 1 & x \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

- Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za B-splajnovе reda  $k - 1$ .

Tada za  $t_i < x < t_{i+k}$  iz rekurzije (2)

$B_{i,k}$  se dobiva linearnom kombinacijom s pozitivnim koeficijentima

(u slučaju kada je  $t_i < t_{i+k-1}$  i  $t_{i+1} < t_{i+k}$ ) dvaju nenegativnih  $B_{i,k-1}$  i  $B_{i+1,k-1}$ , od kojih je barem jedan pozitivan.

Dakle, tvrdnja vrijedi i za  $B_{i,k}$ .

Dokaz za c)  $\sum_{i=1}^n B_{i,k}(x) = 1$  također ide indukcijom po  $k$ .

- Tvrdnja je trivijalna za  $k = 1$ .
- Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za B-splajnovne reda  $k - 1$ .

Tada iz rekurzije B-splajnovne i a) za  $x \in [t_j, t_{j+1})$  imamo

$$\begin{aligned}
 \sum_i B_{i,k}(x) &= \sum_{i=j+1-k}^j B_{i,k}(x) \\
 &= \sum_{i=j+1-k}^j \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \sum_{i=j+1-k}^j \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) \\
 &= \sum_{i=j+1-k}^j \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \sum_{i=j+2-k}^{j+1} \frac{t_{i+k-1} - x}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) \\
 &= \sum_{i=j+2-k}^j B_{i,k-1}(x) = 1.
 \end{aligned}$$



- B-splajn za koji vrijedi  $B_{i,k}(t_i) > 0$  ili  $B_{i,k}(t_{i+k}) > 0$  je onaj kojem je prvi ili zadnji čvor maksimalnog multipliciteta, tj. multipliciteta  $k$ .

U najčešćem slučaju, kada je  $t_1 = \dots = t_k$  i  $t_{n+1} = \dots = t_{n+k}$ , to će vrijediti za prvi i zadnji B-splajn.

- Tada, iz de Boor–Cox-ove rekurzije, ili iz vrijednosti B-splajna i njegovih derivacija u krajnjim točkama, imamo

$$B_{1,k} = \frac{(t_{k+1} - x)^{k-1}}{(t_{k+1} - t_k)^{k-1}},$$

i za njega vrijedi

$$\begin{aligned} B_{1,k}(t_k) &= 1, \\ B_{1,k}^{(i)}(t_{k+1}) &= 0, \quad \text{za } i = 0, \dots, k-2. \end{aligned}$$

- Analogno je

$$B_{n,k} = \frac{(x - t_n)^{k-1}}{(t_{n+1} - t_n)^{k-1}},$$

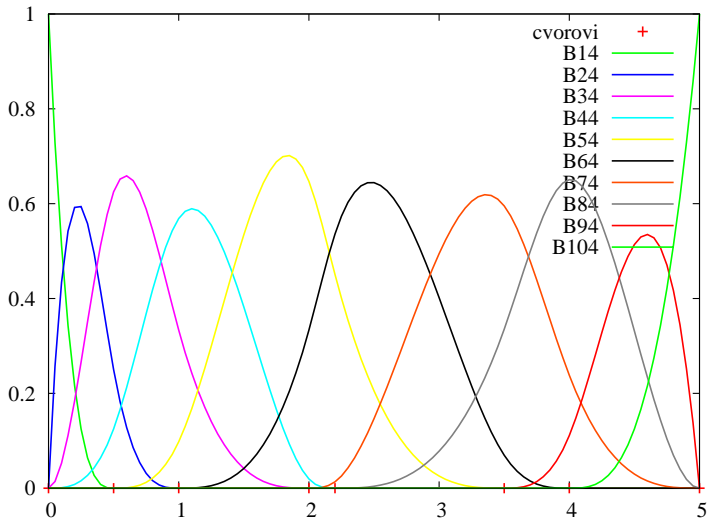
te

$$\begin{aligned} B_{n,k}^{(i)}(t_n) &= 0, \quad \text{za } i = 0, \dots, k-2, \\ B_{n,k}(t_{n+1}) &= 1. \end{aligned}$$

## Teorem

*Ako niti jedan od čvorova iz nosača B-splajna  $B_{i,k}$  nije multipliciteta  $k$ ,  $B_{i,k}$  je unimodalna, tj. postoji točno jedan ekstrem, na  $\langle t_i, t_{i+k} \rangle$ .*

# B-splajnovi reda 4



## Korolar

Ako je

- a)  $t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle$ , tada je  $B_{i,k}(t) > 0$  za  $i = j - k + 1, \dots, j$ ;
- b)  $t_j$  multipliciteta  $m < k$ ,  $t_j$ .

$$t_{j-1} < t_j = \dots = t_{j+m-1} < t_{j+m},$$

tada je  $B_{i,k}(t_j) > 0$  za  $i = j - k + m, \dots, j - 1$ .

**Dokaz:** Iz prethodnog teorema znamo da je nosač od  $B_{i,k}$  sadržan u  $[t_i, t_{i+k}]$ .

- a) Ako je  $t_j \in \{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k-1}\}$  i  $t_j < t_{j+1}$ , tada je  $B_{i,k}(t) > 0$  za  $t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle$ .

Dakle  $i = j, j - 1, \dots, j - k + 1$ .



b) Neka su  $l_i$  i  $r_i$  takvi da je

$$t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+l_i-1}$$

$$t_{i+k+1-r_i} = \dots = t_{i+k-1} = t_{i+k},$$

onda je

$$B_{i,k}(t_j) > 0 \quad \text{za } j = i + l_i, \dots, i + k - r_i.$$

Ako krenemo od  $i = 1$ , povećavamo  $i$  za jedan i gledamo koji je prvi  $i$  za koji je  $B_{i,k}(t_j) > 0$ .

Takav  $i$  mora zadovoljavati  $t_{i+k} = t_{j+m}$ , dakle  $i = j - k + m$ .

Zadnji  $i$  za koji to vrijedi je  $i = j - 1$ . □

# Ekvidistantni čvorovi

## Primjer

Neka je  $(t_i)_{i=-\infty}^{\infty}$  definiran sa  $t_i := x_0 + ih$  za neku točku  $x_0 \in \mathbb{R}$  i korak  $h > 0$ , i neka je  $k \in \mathbb{N}$ .

- Tada je pridruženi prostor splajnova reda  $k$  translatorno invarijantan, pa je

$$B_{i+j,k}(x) = B_{i,k}(x - jh)$$

za sve  $i, j \in \mathbb{Z}$ .

- B-splajn  $B_{i,k}$  je simetričan s obzirom na točku  $\frac{t_i+t_{i+k}}{2} = x_0 + (i + \frac{k}{2})h$ , tj. s obzirom na polovište svog nosača, gdje postiže i maksimum, dakle, za svaki  $x \in \mathbb{R}$  je

$$B_{i,k}(x) = B_{i,k}(t_i + t_{i+k} - x).$$

- Zbog toga dovoljno je znati izračunati jednu polovicu jednog B-splajna da bi mogli izračunati sve.

# Marsdenov identitet

Pošto se i polinomi nalaze u prostoru splajnova,  
zanimljivo je vidjeti koji su koeficijenti u rastavu potencija u bazi  
B-splajnovima potencija

# Marsdenov identitet

## Teorem

(Marsdenov identitet) Za proizvoljan  $\tau \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$(x - \tau)^{k-1} = \sum_i \psi_{i,k}(\tau) B_{i,k}(x),$$

gdje je

$$\psi_{i,k}(\tau) := (t_{i+1} - \tau) \cdots (t_{i+k-1} - \tau).$$

Štoviše za  $j = 1, 2, \dots, k$  je

$$x^{j-1} = \sum_i \xi_i^{(j)} B_{i,k}(x),$$

gdje su

$$\xi_i^{(j)} = (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{(k-1)!} \psi_{i,k}^{(k-j)}(0).$$

**Dokaz:** Promotrimo poseban niz

$$\sum_i a_i B_{i,k}, \text{ gdje je } a_i := \psi_{i,k}(\tau), \text{ za } \forall i.$$

Tada iz de Boor–Cox-ove rekurzije

$$B_{i,k} = \omega_{i,k} B_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1}$$

$$\omega_{i,k}(x) = \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}, & \text{ako je } t_i \neq t_{i+k-1} \\ 0, & \text{ina\u0107e,} \end{cases}$$

slijedi

$$\sum_i a_i B_{i,k} = \sum_i B_{i,k-1} ((1 - \omega_{i,k}) a_{i-1} + \omega_{i,k} a_i).$$

Ako je  $B_{i,k-1} \neq 0$ , tj.  $t_i < t_{i+k-1}$  onda je

$$\begin{aligned} & (1 - \omega_{i,k}(x))a_{i-1} + \omega_{i,k}(x)a_i = \\ & = ((1 - \omega_{i,k}(x))(t_i - \tau) + \omega_{i,k}(x)(t_{i+k-1} - \tau))\psi_{i,k-1}(\tau) \\ & = (x - \tau)\psi_{i,k-1}(\tau), \end{aligned}$$

pošto je

$$(1 - \omega_{i,k})f(t_i) + \omega_{i,k}f(t_{i+k-1})$$

jedinstveni pravac koji prolazi kroz  $f(t_i)$  i  $f(t_{i+k-1})$ ,  
pa mora biti jednak  $f$  ako je i sam  $f$  pravac.

Tada se indukcijom dobiva

$$\begin{aligned}\sum_i B_{i,k}(x)\psi_{i,k}(\tau) &= (x - \tau) \sum_i B_{i,k-1}(x)\psi_{i,k-1}(\tau) \\ &= \dots \\ &= (x - \tau)^{k-1} \sum_i B_{i,1}(x) \underbrace{\psi_{i,1}(\tau)}_{=1} = (x - \tau)^{k-1}.\end{aligned}$$

Rastav za  $x^{j-1}$  se dobiva deriviranjem prethodne jednakosti  $k - j$  puta s obzirom na  $\tau$  i uvrštavanjem  $\tau = 0$ . □

B-splajnovi se daju lagano derivirati:

# Derivacija B-splajnova

## Teorem

(Derivacija B-splajnova) Neka je  $t_i < t_{i+k}$ ,  $i$  neka je  $D_+$  derivacija s desna. Tada je

$$D_+ B_{i,k}(x) = (k - 1) \left( \frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right). \quad (2)$$



**Dokaz:** Opet se samo koristi rekurzija za podijeljene razlike:

$$\begin{aligned}
 D_+ B_{i,k}(x) &= (-1)^k (t_{i+k} - t_i) \left( D_+(x - t)_+^{k-1} \right) [t_i, \dots, t_{i+k}] \\
 &= (-1)^k (t_{i+k} - t_i) \left( (k-1)(x - t)_+^{k-2} \right) [t_i, \dots, t_{i+k}] \\
 &= (-1)^k (k-1)(t_{i+k} - t_i) \\
 &\quad \cdot \frac{(x - t)_+^{k-2} [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] - (x - t)_+^{k-2} [t_i, \dots, t_{i+k-1}]}{t_{i+k} - t_i},
 \end{aligned}$$

što daje traženu jednakost.

U slučaju da  $t_i$  ili  $t_{i+k}$  ima multiplicitet  $k$ , desnu stranu od (2) tretiramo kao i u dokazu za de Boor–Cox-ovu rekurziju. □

## Korolar

Neka je  $f \in \mathcal{S}_{k, \mathbf{T}}$ ,  $f(x) = \sum_{j=1}^n a_j B_{j,k}(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , i multipliciteti svih čvorova nisu veći od  $k$ . Tada je

$$D_+ f(x) = \sum_{j=2}^n a'_j B_{j,k-1}(x),$$

gdje je

$$a'_j = (k-1) \frac{a_j - a_{j-1}}{t_{j+k-1} - t_j}, \quad \text{ako je } t_j < t_{j+k-1},$$

za  $j = 2, \dots, n$ .

**Dokaz:** Koristi se derivacijska formula na  $D_+ f(x)$ , te činjenica da je  $B_{1,k-1}(x) = B_{n+1,k-1}(x) = 0$  za  $x \in [a, b]$ . □

# Računanje vrijednosti splajna u točki

Sada želimo naći efikasan algoritam za računanje splajna

$$f = \sum_{i=1}^n a_i B_{i,k}$$

u točki  $x$ .

Iz de Boor–Cox-ove rekurzije slijedi da je

$$\sum_i a_i B_{i,k} = \sum_i ((1 - \omega_{i,k}) a_{i-1} + \omega_{i,k} a_i) B_{i,k-1}.$$

Ako označimo

$$\mathbf{a}_i^{[1]} := ((1 - \omega_{i,k})\mathbf{a}_{i-1} + \omega_{i,k}\mathbf{a}_i),$$

$\mathbf{a}_i^{[1]}$  se računa kao konveksna kombinacija originalnih koeficijenata, što se, numerički gledano, računa vrlo stabilno.

Nastavimo iteracije, pa nakon  $k - 1$  iteracija imamo

$$f = \sum_i \mathbf{a}_i^{[k-1]} B_{i,1},$$

iz čega slijedi

$$f(x) = \mathbf{a}_i^{[k-1]}(x) \quad \text{za svaki } x \in [t_i, t_{i+1}),$$

ako je  $t_i < t_{i+1}$ .

# de Boor-ov algoritam

Neka je  $x \in [t_j, t_{j+1})$ .

Za dane konstantne polinome

$$a_i^{[0]} := a_i, \quad i = j - k + 1, \dots, j,$$

koji određuju

$$f := \sum_{i=1}^n a_i B_{i,k}$$

na intervalu  $[t_j, t_{j+1})$ , generiraju se polinomi  $a_i^{[r]}$ ,  $r = 1, \dots, k - 1$  rekurzijom

$$a_i^{[r+1]} := (1 - \omega_{i,k-r})a_{i-1}^{[r]} + \omega_{i,k-r}a_i^{[r]}, \quad j - k + r + 1 < i \leq j. \quad (3)$$

Tada je

$$f = a_j^{[k-1]} \quad \text{na } [t_j, t_{j+1})$$

Štoviše, ako je  $t_j \leq x \leq t_{j+1}$ , za težine  $\omega_{i,k-r}(x)$  u (3) vrijedi

$$0 \leq \omega_{i,k-r}(x) \leq 1,$$

pa se računanje  $f(x) = a_j^{[k-1]}(x)$  pomoću rekurzije (3) sastoji od konveksnih kombinacija.

# Interpolacija splajnom

# Interpolacija splajnom

Ovdje ćemo pretpostavljati da je  $\mathbf{T} = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  nepadajući niz čvorova, kod kojeg je  $t_i < t_{i+k}$  za svaki  $i$ .

Interpolacijski problem:

Za dane  $\tau = (\tau_i)_{i=1}^n$  i funkciju  $f$  treba odrediti splajn  $s \in \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}$ , takav da je

$$s(\tau_i) = f(\tau_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Uočimo da je  $\dim \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}} = n$ .



Ako je

$$s = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,k} \quad \text{i} \quad f_i := f(\tau_i),$$

onda interpolacijski uvjeti prelaze u određivanje  $(\alpha_i)_{i=1}^n$  koji zadovoljavaju

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,k}(\tau_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

## Uz oznake

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T,$$

$$A := (a_{i,j})_{i,j=1}^n := (B_{j,k}(\tau_i))_{i,j=1}^n \text{ i}$$

$$f := (f_1, \dots, f_n)^T,$$

interpolacijske jednadžbe možemo zapisati matrično

$$A\alpha = f.$$

Problem traženja jedinstvenog interpolacijskog splajna  $s$  sada je pretvoren u problem ispitivanja da li je matrica  $A$  regularna, na što nam odgovor daje slijedeći torem:

# Regularnost interpolacijske matrice

## Teorem

(Schoenberg–Whitney) Neka je  $\tau$  strogo rastući niz točaka za koji iz  $a < t_i = \dots = t_{i+r} = \tau_j < b$  slijedi da je  $r < k - 1$ . Tada je matrica  $A := (B_{j,k}(\tau_i))$  regularna ako i samo ako je

$$B_{i,k}(\tau_i) \neq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

**Napomena.** To zapravo znači da za regularnost treba biti  $t_i < \tau_i < t_{i+k}$ , osim što se još dozvoljava i  $\tau_1 = t_1^+$  i  $\tau_n = t_{n+k}^-$ .

## Primjer – kubični splajn i 'not-a-knot' uvjet

Promatramo interpolaciju u čvorovima  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , a dodatna 2 uvjeta su interpolacija u sredini rubnih intervala:  $(x_0 + x_1)/2$  i  $(x_{n-1} + x_n)/2$ .

Proširena particija  $(t_j)$ :  $x_0, x_0, x_0, x_0, x_1, x_2, \dots$

Točke interpolacije  $(\tau_i)$ :  $x_0, (x_0 + x_1)/2, x_1, x_2, x_3, \dots$

Jer je  $\tau_1 = (x_0 + x_1)/2$  i  $t_1 = x_0$  vrijedi

$$t_1 = x_0 < \frac{x_0 + x_1}{2} = \tau_1 < x_1 = t_5 = t_{1+4}$$

uvjet je zadovoljen.

Jer je  $\tau_i = x_{i-2}$  i  $t_i = x_{i-4}$  vrijedi

$$t_i = x_{i-4} < x_{i-2} = \tau_i < x_i = t_{i+4}$$

uvjet je zadovoljen za  $i = 2, 3, \dots$  (Radi jednostavnosti uzimamo  $x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0$ )

Na isti način promatramo desni rub intervala.

$\Rightarrow$  Interpolacija kubičnim splajnom klase  $C^2$  uz 'not-a-knot' uvjet ima jedinstveno rješenje.

Teorem ne govori ništa o egzistenciji potpunog splajna!  
Rubni uvjeti  $s'(x_0) = d_0$  i  $s'(x_n) = d_1$ .

Potpuni splajn uskoro!

# Interpolacijska matrica je vrpčasta

Pretpostavimo sada da je  $n \times n$  matrica  $(B_{j,k}(\tau_i))$  regularna.

Velika prednost korištenja B-splajnova činjenica da matrica  $(B_{j,k}(\tau_i))$  mora biti **vrpčasta (trakasta) matrica širine  $k$** , tj. matrica sa manje nego  $k$  dijagonala iznad i manje nego  $k$  dijagonala ispod glavne dijagonale.

Zbog malog nosača B-splajnova, i  $B_{i,k}(\tau_i) \neq 0$ , vrijedi

$$B_{j,k}(\tau_i) \neq 0 \implies |j - i| < k,$$

odnosno

$$B_{j,k}(\tau_i) = 0 \text{ za } |j - i| \geq k.$$

- Posebnim odabirom ( $\tau_i$ ) širina vrpce može se još smanjiti.
- Za pohranu vrpčastih matrica u memoriju računala može se koristiti tzv. “vrpčasto spremanje” matrice za koju treba spremati onda maksimalno  $(2k - 1) \cdot n$  elemenata matrice (nule se ne pamt) umjesto  $n \times n$ .

# Totalna pozitivnost interpolacijske matrice

Slijedeće važno svojstvo interpolacijske matrice je totalna pozitivnost.

Za danu matricu  $A = (a_{ij})_{i,j=0}^n$  i za zadan niz  $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$  sa

$$A \begin{bmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s \end{bmatrix} := (a_{i_p j_q})_{p=1, q=1}^{r, s}$$

definirana je podmatrica dobivena od  $A$  odabirom određenih redova i stupaca.



## Definicija

Matrica  $A$  reda  $n$  je **totalno pozitivna** ako su sve njezine minore nenegativne, tj.

$$\det A \begin{bmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r \end{bmatrix} \geq 0$$

za sve

$$\begin{aligned} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n \\ j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n \end{aligned}$$

i  $r = 1, 2, 3, \dots, n$ .

## Teorem

(Karlin) Matrica  $(B_{j,k}(\tau_i))$  je totalno pozitivna za sve  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$ .

**Napomena.** Linearni sustav sa regularnom totalno pozitivnom matricom može se rješavati pomoću Gaussovih eliminacija bez pivotiranja.

## Hermiteova interpolacija splajnom

Postoji također i varijanta Schoenberg–Whitney-evog teorema za Hermiteovu interpolaciju:

### Teorem

(Karlín & Ziegler) Neka je dan nepadajući niz  $\tau = (\tau_i)_{i=1}^n$  za koji je  $\tau_i < \tau_{i+k}$  za svaki  $i$ . Pretpostavimo da je

$$t_k < \tau_{i+1} = \cdots = \tau_{i+r} = t_{j+1} = \cdots = t_{j+s} < t_{n+1} \Rightarrow r + s \leq k.$$

Tada za svaku glatku funkciju  $f$  postoji jedinstven  $s \in \mathcal{S}_{k,\mathbb{T}}$  koji se slaže s  $f$  na  $\tau$  ako i samo ako je  $B_{i,k}(\tau_i) \neq 0$  za svaki  $i$ .

**Napomena.** Iz ove varijante teorema slijedi da interpolacija potpunim kubičnim splajnom ima jedinstveno rješenje.

Provjera je analogna kao u slučaju 'not-a-knot' uvjeta.

# Ocjena greške interpolacijaskog splajna

Za Lagrangeovu interpolaciju navest ćemo i ocjenu greške.

Neka je  $I$  (interpolacijski) projektor s nekog skupa glatkih funkcija  $G$ ,  
 $I : G \rightarrow \mathcal{S}_{k,T}$ ,

$$s \in \mathcal{S}_{k,T} \Rightarrow Is = s,$$

i neka je

$$\|g\| := \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$

za neki fiksni interval  $[a, b]$ .

## Lema

Za svaku neprekidnu funkciju  $g$  na  $[a, b]$  interpolacijska pogreška je ograničena s

$$\|g - Ig\| \leq (1 + \|I\|)\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k, \mathcal{T}}),$$

gdje je

$$\|I\| := \max_{g \in C[a, b] \setminus \{0\}} \frac{\|Ig\|}{\|g\|},$$

$$\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k, \mathcal{T}}) := \min_{s \in \mathcal{S}_{k, \mathcal{T}}} \|g - s\|.$$

**Dokaz:**

$$\begin{aligned} \|g - Ig\| &= \|g - s - I(g - s)\| \leq \|g - s\| + \|I\|\|g - s\| \\ &= (1 + \|I\|)\|g - s\| \end{aligned}$$

za svaki  $s \in \mathcal{S}_{k, \mathcal{T}}$ .

Ako vrijedi za svaki, onda vrijedi i za onaj za koji se postiže minimum, tj.

$$\|g - Ig\| \leq (1 + \|I\|)\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,\tau}).$$



Nedostatak ove ocjene je da ne znamo  $\|I\|$ , a to ovisi o  $|t|$  gdje je

$$|t| := \max_i (t_{i+1} - t_i),$$

ali i o  $\tau$ .

## Lema

*Postoji pozitivna konstanta  $const_k$  takva da je norma interpolacijskog procesa  $I$  ograničena odozdo sa*

$$\|I\| \geq const_k \max_i \frac{\min \{t_{j+k-1} - t_j : \langle t_j, t_{j+k-1} \rangle \cap \langle \tau_i, \tau_{i+1} \rangle \neq \emptyset\}}{\tau_{i+1} - \tau_i}.$$

Iz ove leme se vidi da  $\|I\|$  može biti proizvoljno velik ako dvije interpolacijske točke približimo.

Dakle, mora se posvetiti pažnja odabiru interpolacijskih točaka.

Čak se može pokazati da veliki  $\|I\|$  može uzrokovati i veće greške tijekom floating–point računanja.

O  $\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,T})$  pak možemo još nešto reći.

Definirajmo još **modul neprekidnosti**:

$$\omega(g; h) := \max \{ |g(x) - g(y)| : |x - y| \leq h, x, y \in [a, b] \}.$$

Primijetimo da je za  $g \in C^1(a, b)$  zbog Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti:

$$\omega(g; h) := \leq h \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$$



## Teorem

Za  $j = 0, \dots, k - 1$  postoji konstanta  $const_{k,j}$  takva da za sve

$\mathbf{T} = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  uz

$$t_1 = \dots = t_k = a < t_{k+1} \leq \dots \leq t_n < b = t_{n+1} = \dots = t_{n+k},$$

$i$  za svaki  $g \in C^j[a, b]$ ,

$$\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}) \leq const_{k,j} |t|^j \omega(g^{(j)}; |t|).$$

Posebno za  $j = k$  imamo

$$\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}) \leq const_k |t|^k \|g^{(k)}\|,$$

ako  $g$  ima  $k$  neprekidnih derivacija.

Za kubični splajnove možemo biti još precizniji:

### Teorem

*Neka je  $s$  kubični splajn klase  $C^2$  koji interpolira funkciju  $f$  u čvorovima i zadovoljava rubne uvjete*

- a)  $s'(a) = f'(a), s'(b) = f'(b),$
- b)  $s''(a) = f''(a), s''(b) = f''(b),$
- c)  $s^{(r)}(a) = f^{(r)}(b),$  za  $r = 0, 1$  (periodički rubni uvjeti).

*Tada pogreška interpolacije zadovoljava*

$$\|s^{(r)} - f^{(r)}\| \leq R_r$$

*gdje je  $R_r$  dan u tablici:*

klasa f-je	$R_0$	$R_1$	$R_2$
$C^1[a, b]$	$\frac{9}{8} h\omega(f'; h)$	$4\omega(f'; h)$	-
$C^2[a, b]$	$\frac{19}{96} h^2\omega(f''; h)$	$\frac{2}{3} h\omega(f''; h)$	$4\omega(f''; h)$
$C^2, C^3_{\Delta}$	$\frac{41}{1728} h^3\omega(f'''; h)$	$\frac{2}{27} h^2\omega(f'''; h)$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) h\omega(f'''; h)$
$R_3$			
-			
-			
$\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\beta\right) \omega(f'''; h)$			

gdje su

$$h := |t|, \quad h_i := t_{i+1} - t_i, \quad \beta := \frac{\max h_i}{\min h_i},$$

a  $X_{\Delta}$  znači da je funkcija po djelovima klase  $X$ .

# Interpolacija u Greville-ovim točkama

Ako postoji sloboda odabira interpolacijskih točaka ( $\tau_i$ ) za danu proširenu particiju  $\mathbf{T}$ , tada se preporučaju **Greville-ove točke**:

$$\tau_i = t_{i,k}^* := \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{k-1}.$$

Za njih vrijedi

$$x = \sum_{i=1}^n t_{i,k}^* B_{i,k}(x).$$

Ako sa  $I_k^*$  označimo interpolacijski operator koji interpolira splajnom reda  $k$  u Greville-ovim točkama, može se pokazati da je

$$\|I_2^*\| = 1, \quad \|I_3^*\| \leq 2, \quad \|I_4^*\| \leq 27$$

Pa, pošto je

$$\|g - I_k^*g\| \leq (1 + \|I_k^*\|)\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,T}),$$

po svojoj prilici, za “umjeren”  $k$  (a sigurno za  $k \leq 4$ ),  $I_k^*$  je skoro najbolja moguća aproksimacija funkcije  $g$  u prostoru  $\mathcal{S}_{k,T}$ .

# Splajn aproksimacija pomoću diskretne MNK

- Želimo upotrijebiti polinomni splajn u metodi najmanjih kvadrata, tj. tražimo  $\varphi \in \mathcal{S}(k, \mathbf{T})$ ,  $\dim \mathcal{S}(k, \mathbf{T}) = n$ , gdje je  $\mathbf{T} = \{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ ,  $t_i \leq t_{i+1}$  proširena particija na  $[a, b]$ ,

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,k}$$

koji najbolje aproksimira određeni skup podataka u smislu najmanjih kvadrata, što je ekvivalentno određivanju koeficijenata  $\alpha_j$ , tako da  $\varphi$  najbolje aproksimira dane podatke.

# Splajn aproksimacija pomoću disk. MNK (na.)

- Za diskretnu metodu najmanjih kvadrata pretpostavljamo da splajnom želimo aproksimirati podatke izražene u  $m \geq n$  točaka

$$(x_i, y_i) \in [a, b], \quad i = 1, \dots, m.$$

- Dakle, želimo riješiti sljedeći problem

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \sum_{i=1}^m (y_i - \varphi(x_i))^2 = \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \sum_{i=1}^m \left( y_i - \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,k}(x_i) \right)^2.$$

- Ako sve podatke sada prikažemo u matričnom obliku

# Splajn aproksimacija pomoću disk. MNK (na.)

$$A = \begin{bmatrix} B_{1,k}(x_1) & B_{2,k}(x_1) & \cdots & B_{n,k}(x_1) \\ B_{1,k}(x_2) & B_{2,k}(x_2) & \cdots & B_{n,k}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1,k}(x_m) & B_{2,k}(x_m) & \cdots & B_{n,k}(x_m) \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$



# Splajn aproksimacija pomoću disk. MNK (na.)

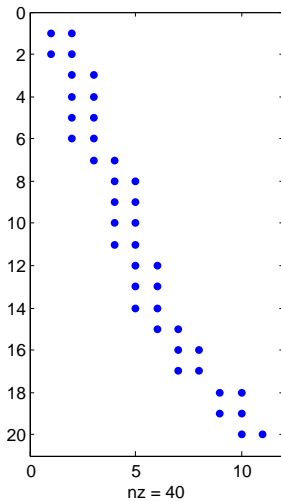
tada smo dobili standardni linearni problem najmanjih kvadrata

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2.$$

- Zbog već spomenutih svojstva B-splajnova, za svaki  $x \in [a, b]$  postoji najviše  $k$  B-splajnova za koje je  $B_{j,k}(x) \neq 0$ .
- Zbog toga matrica  $A$  ima vrpčastu strukturu, kod koje u svakom retku matrice postoji najviše  $k$  netrivialnih elemenata.
- Znamo da će ovaj problem imati jedinstveno rješenje ako matrica  $A$  ima puni stupčani rang.

# Splajn aproksimacija pomoću disk. MNK (na.)

- To će se postići, isto kao i kod interpolacije, ako za svaki  $j = 1, \dots, n$  postoji  $x_{ij}$  takav da je  $x_{ij} \in \langle t_j, t_{j+k} \rangle$ , pri čemu su svi  $x_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$  međusobno različiti.
- To znači, da za svaki  $B_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, n$  postoji neki zasebni  $x_{ij}$  za koji je  $B_{j,k}(x_{ij}) \neq 0$ .
- U tom slučaju matrica  $A$  nema niti jedan nulstupac, i svi su linearno nezavisni.



# Linearna splajn aproksimacija pomoću DMNK

- Riješit ćemo konkretan problem najmanjih kvadrata za po dijelovima linearnu aproksimaciju.
- Proširena particija  $\mathbf{T}$  ima sve unutrašnje čvorove multipliciteta 1, tj.

$$a = t_1 = t_2 < t_3 < t_4 < \dots < t_n < t_{n+1} = t_{n+2} = b.$$

- Pripadni prostor splajnova  $\mathcal{S}(2, \mathbf{T})$  je, naravno, dimenzije  $n$ .
- Ako uzmemo neki  $x$  takav da je  $x \in [t_i, t_{i+1}]$ , tada su na tom segmentu samo dva B-splajna netrivialna:  $B_{i-1,2}$  i  $B_{i,2}$ .
- Zbog toga u matrici  $A = [B_{j,2}(x_i)]$  svaki redak ima najviše dva netrivialna elementa.

# Linearna splajn aproksimacija pomoću DMNK

- U slučaju da je  $m = n$ , i da su  $x_i = t_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tada se problem najmanjih kvadrata svodi na rješavanje trivijalnog sustava linearnih jednadžbi za  $A = I$  (jer je  $B_{j,2}(t_{i+1}) = \delta_{ij}$ ).
- U tom slučaju radi se o **interpolaciji** točaka  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a rezultat je  $\alpha_j = y_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , tj.

$$\varphi = \sum_{j=1}^n y_j B_{j,2}.$$

# Linearna splajn aproksimacija pomoću DMNK

- U slučaju da je  $m > n + 1$ , i da za svaki  $j = 1, \dots, n$  postoji  $x_j$  takav da je  $x_j \in \langle t_j, t_{j+2} \rangle$ , pri čemu su svi  $x_j, j = 1, \dots, n$  međusobno različiti, tada se radi o **problemu najmanjih kvadrata sa jedinstvenim rješenjem**

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,2}.$$

# Splajn aproksimacija pomoću neprekidne MNK

- Sada rješavamo problem

$$\min_{\varphi \in \mathcal{S}_{k,T}} \|f - \varphi\|_2.$$

- Parametre funkcije  $\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,k}$  odredit ćemo rješavanjem sustava normalnih jednažbi

$$Ax = b,$$

# Splajn aproksimacija pomoću nepr. MNK (n.)

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} \langle B_{1,k}, B_{1,k} \rangle & \langle B_{1,k}, B_{2,k} \rangle & \cdots & \langle B_{1,k}, B_{n,k} \rangle \\ \langle B_{2,k}, B_{1,k} \rangle & \langle B_{2,k}, B_{2,k} \rangle & \cdots & \langle B_{2,k}, B_{n,k} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle B_{n,k}, B_{1,k} \rangle & \langle B_{n,k}, B_{2,k} \rangle & \cdots & \langle B_{n,k}, B_{n,k} \rangle \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \langle f, B_{1,k} \rangle \\ \langle f, B_{2,k} \rangle \\ \vdots \\ \langle f, B_{n,k} \rangle \end{bmatrix}.$$



# Splajn aproksimacija pomoću nepr. MNK (n.)

- Ako je  $w \equiv 1$ , tada se elementi matrice  $A$  različiti od nule

$$\langle B_{i,k}, B_{j,k} \rangle = \int_{t_i}^{t_{i+k}} B_{i,k} B_{j,k} dx = \sum_{l=i}^{i+k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} B_{i,k} B_{j,k} dx \quad (5)$$

za  $|i - j| \leq k - 1$ , mogu računati egzaktno tako da se primjeni Gaussova integracijska formula u  $k$  točaka

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^k w_j f\left(\frac{z_j(b-a)}{2} + \frac{b+a}{2}\right)$$

na svaki od  $k$  integrala u sumi u (5).

# Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

- U slučaju linearne aproksimacije, bazne funkcije su “krovići”  $B_{j,2}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , a  $w(x) = 1$ .
- Pogledajmo kako u tom slučaju izgleda matrica  $A$ .
- Prvo možemo zaključiti da je  $B_{i,2}(x) \cdot B_{j,2}(x) = 0$  za sve  $x \in [a, b]$  kada je  $|i - j| > 1$ .
- Dalje vrijedi

$$\begin{aligned}
 B_{j-1,2}(x) \cdot B_{j,2}(x) &= \begin{cases} \frac{t_{j+1}-x}{t_{j+1}-t_j} \cdot \frac{x-t_j}{t_{j+1}-t_j}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{-x^2 + (t_j + t_{j+1})x - t_j t_{j+1}}{(t_{j+1} - t_j)^2}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
 & \quad j = 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

# Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

$$\begin{aligned}
 B_{1,2}(x)^2 &= \begin{cases} \frac{(t_3-x)^2}{(t_3-t_2)^2}, & x \in [t_2, t_3] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{x^2-2t_3x+t_3^2}{(t_3-t_2)^2}, & x \in [t_2, t_3] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
 B_{j,2}(x)^2 &= \begin{cases} \frac{(x-t_j)^2}{(t_{j+1}-t_j)^2}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ \frac{(t_{j+2}-x)^2}{(t_{j+2}-t_{j+1})^2}, & x \in [t_{j+1}, t_{j+2}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{x^2-2t_jx+t_j^2}{(t_{j+1}-t_j)^2}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ \frac{x^2-2t_{j+2}x+t_{j+2}^2}{(t_{j+2}-t_{j+1})^2}, & x \in [t_{j+1}, t_{j+2}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
 & \quad j = 2, \dots, n-1
 \end{aligned}$$

# Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

$$B_{n,2}(x)^2 = \begin{cases} \frac{(x-t_n)^2}{(t_{n+1}-t_n)^2}, & x \in [t_n, t_{n+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{x^2 - 2t_n x + t_n^2}{(t_{n+1}-t_n)^2}, & x \in [t_n, t_{n+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

- Elemente matrice  $A$  sada je lako odrediti.

# Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

$$\begin{aligned}\langle B_{j-1,2}, B_{j,2} \rangle &= \int_a^b B_{j-1,2}(x) B_{j,2}(x) dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} B_{j-1,2}(x) B_{j,2}(x) dx \\ &= \frac{t_{j+1} - t_j}{6}, \quad j = 2, \dots, n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle B_{1,2}, B_{1,2} \rangle &= \int_a^b B_{1,2}(x) B_{1,2}(x) dx = \int_{t_2}^{t_3} B_{1,2}(x) B_{1,2}(x) dx \\ &= \frac{t_3 - t_2}{3}\end{aligned}$$

# Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

$$\begin{aligned}\langle B_{j,2}, B_{j,2} \rangle &= \int_a^b B_{j,2}(x) B_{j,2}(x) dx = \int_{t_j}^{t_{j+2}} B_{j,2}(x) B_{j,2}(x) dx \\ &= \frac{t_{j+2} - t_j}{3}, \quad j = 1, \dots, n-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle B_{n,2}, B_{n,2} \rangle &= \int_a^b B_{n,2}(x) B_{n,2}(x) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} B_{n,2}(x) B_{n,2}(x) dx \\ &= \frac{t_{n+1} - t_n}{3}\end{aligned}$$



# Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

a vektor  $b$  je oblika

$$b = \begin{bmatrix} \int_{t_2}^{t_3} f(x) B_{1,2}(x) dx \\ \int_{t_2}^{t_4} f(x) B_{2,2}(x) dx \\ \vdots \\ \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(x) B_{n-1,2}(x) dx \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x) B_{n,2}(x) dx \end{bmatrix}.$$



# Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

- Sustav  $Ax = b$  se sada jednostavno može riješiti
  - pomoću faktorizacije Choleskog
  - specijalnom  $LDL^T$  metodom za tridijagonalne matrice
  - SOR metodom
  - metodom konjugiranih gradijenata