# Sadržaj predavanja

- Metoda najmanjih kvadrata:
  - Diskretni problem najmanjih kvadrata.
  - Normalne jednadžbe.
  - Linearizacija.
  - Neprekidni problem najmanjih kvadrata.
  - Ortogonalne funkcije.
  - Primjeri ortogonalnih familija funkcija.
  - Svojstva ortogonalnih polinoma.

# Sadržaj predavanja

- Svojstva ortogonalnih polinoma:
  - Tročlana homogena rekurzija.
  - Nultočke ortogonalnih polinoma.
- Računanje vrijednosti funkcija:
  - Polinomi i Hornerova shema.
  - Ortogonalne funkcije i generalizirana Hornerova shema.
  - Primjeri.
    - Razvoj po $T_n$ i skoro minimaks aproksimacije.
    - Fourierov red.

# Diskretni problem najmanjih kvadrata

Neka je funkcija $f$

- zadana na diskretnom skupu točaka $x_0, \ldots, x_n$.

Točaka $x_0, \ldots, x_n$ ima mnogo više nego nepoznatih parametara $a_0, \ldots, a_m$ aproksimacijske funkcije $\varphi$, tj. $n \gg m$.

Aproksimacijska funkcija

$$\varphi(x, a_0, \ldots, a_m)$$

određuje se iz uvjeta da je 2-norma vektora pogrešaka u čvorovima aproksimacije najmanja moguća, tj. minimizira se

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - \varphi(x_k))^2 \to \min .$$

# Najmanji kvadrati za opće linearne funkcije

Linearna metoda najmanjih kvadrata.
Promatramo funkcije oblika

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots a_m\varphi_m(x),$$

gdje su $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ poznate (zadane) (linearno nezavisne) funkcije.

Za zadani niz točaka $(x_1, \ldots, x_n)$ parametre $a_0, \ldots, a_m$ određujemo tako da suma kvadrata

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n} (\varphi(x_k) - f_k)^2 = \sum_{k=0}^{n} (a_0\varphi_0(x_k) + \cdots a_m\varphi_m(x_k) - f_k)^2 \to \min .$$

Oznaka: $f_k = f(x_k)$

# Sustav normalnih jednadžbi

Uočimo da je

- uvijek $\Phi \geq 0$, bez obzira kakvi su parametri, jer se radi o zbroju kvadrata.
- Funkcija $\Phi$ minimizira se kao funkcija više varijabli $a_0, \ldots, a_m$.
- $\Phi$ je dovoljno glatka funkcija, jer je funkcija u parametrima $a_k$, pa je nužni uvjet ekstrema

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Takav pristup vodi na tzv. sustav normalnih jednadžbi.

Problem možemo zapisati matrično.

Nepoznanice:

$$x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Vrijednosti funkcije $f$:

$$b = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Vrijednosti funkcija baze:

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix}$$

Problem najmanjih kvadrata:

$$\Phi = \Phi(x) = \| Ax - b \|_2^2 \to \min$$

Rješavanje: QR, SVD, ...

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi(x) = \| Ax - b \|_2^2 = \\ &= < Ax - b, Ax - b >= \\ &= < A^T Ax, x > -2 < b, x > + < b, b >\end{aligned}$$

Gradijent

$$\nabla \Phi = 2A^T Ax - 2b$$

Normalni sustav jednadžbi

$$A^T Ax = b$$

Hesseova matrica

$$H_\Phi = 2A^T A$$

je pozitivno (semi)definitna pa se radi o minimumu.

# Nelinearni problem najmanjih kvadrata

Što ako $\varphi$ nelinearno ovisi o parametrima?

- Dobivamo nelinearni sustav jednadžbi, koji se relativno teško rješava.
- Problem postaje ozbiljan optimizacijski problem, koji se može približno rješavati.
- Metode koje se najčešće koriste su metode pretraživanja ili Levenberg–Marquardt metoda.

Problem je nelinearan i ako umjesto najmanjih kvadrata minimiziramo

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n} |\varphi(x_k) - f_k|^2 = \sum_{k=0}^{n} |a_0\varphi_0(x_k) + \cdots a_m\varphi_m(x_k) - f_k|^2 \to \min .$$

# Neprekidni problem najmanjih kvadratt

Parametri funkcije $\varphi \in \mathcal{F}$ se po metodi najmanjih kvadrata, traže tako da bude

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_2,$$

pri čemu je $e(x) = f(x) - \varphi(x)$.

Da bismo mogli naći minimalnu grešku u neprekidnom slučaju, moramo definirati

- skalarni produkt za neprekidne funkcije na odgovarajućem intervalu.
- Definicija norme nije dovoljna, jer je rješenje već u diskretnom slučaju bila projekcija na potprostor, a za to nam je potreban skalarni produkt.

# Definicija norme i skalarnog produkta

Neka je $w(x)$ zadana funkcija. $w(x)$ je težinska funkcija ako je

- $w(x) \geq 0$ na intervalu $[a, b]$,
- $w(x)$ može biti jednaka 0 samo u izoliranim točkama.

Težinska $L_2$-norma (ili samo 2-norma) funkcije $u$ na $[a, b]$ je

$$\|u\|_2 = \left( \int_a^b w(x)\, u(x)^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Ako je ta norma konačna i za funkciju $u$ i za funkciju $v$, onda možemo definirati težinski skalarni produkt

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b w(x)\, u(x) v(x)\, dx.$$

# Definicija skalarnog produkta

Skalarni produkt $\langle u, v\rangle$ je dobro definiran (konačan), jer vrijedi Cauchy–Schwarzova nejednakost

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2.$$

$\langle u, v\rangle$ je skalarni produkt, jer

1. $\langle u, u\rangle \geq 0$, a jednak je 0 za one funkcije $u$ koje su nula u svim točkama gdje je $w(x) > 0$, (v. mjera i integral)
2. vrijedi linearnost u prvom argumentu
$$\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v\rangle = \alpha_1 \langle u_1, v\rangle + \alpha_2 \langle u_2, v\rangle,$$
3. i linearnost u drugom argumentu,
$$\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\rangle = \beta_1 \langle u, v_1\rangle + \beta_2 \langle u, v_2\rangle.$$

# Ortogonalne funkcije

Za funkcije $u$ i $v$ reći ćemo da su ortogonalne ako vrijedi

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

Ako su $u$ i $v$ ortogonalne, onda vrijedi

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Pitagorin poučak!

# Sustavi ortogonalnih funkcija

Ako imamo sustav ortogonalnih funkcija $u_k$, $k = 0, \ldots, m$, za koje vrijedi

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad \text{za} \quad i \neq j, \quad i, j = 0, \ldots, m,$$

i $u_k \not\equiv 0$ tamo gdje je $w(x) > 0$, onda vrijedi

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \alpha_k u_k \right\|_2^2 = \sum_{k=0}^{m} |\alpha_k|^2 \|u_k\|_2^2.$$

Prethodna jednakost znači da je ortogonalni sustav funkcija linearno nezavisan tamo gdje je $w(x) > 0$.

Ako je lijeva strana jednaka nula, mora biti i desna, a po pretpostavci je $\|u_k\|_2 > 0$, pa je jedino moguće da je $\alpha_k = 0$ za $k = 0, \ldots, m$.

# Norma kvadrata greške

Ako je $\varphi$ linearna funkcija, tj. $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$, onda za normu kvadrata greške dobivamo

$$S := \|e\|_2^2 = \|f - \varphi\|_2^2 = \langle f, f\rangle - 2\langle f, \varphi\rangle + \langle \varphi, \varphi\rangle\,.$$

Ako uvrstimo oblik funkcije $\varphi$ i definiciju skalarnog produkta, dobivamo

$$\begin{aligned} S &= \langle f, f\rangle - 2\langle f, \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j\rangle + \langle \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j, \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_\rangle = \\ &= \langle f, f\rangle - 2\sum_{j=0}^{m} a_j\langle f, \varphi_j\rangle + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_j a_k\langle \varphi_j, \varphi_k\rangle \end{aligned}$$

# Sustav normalnih jednadžbi

Kvadrat norme greške $S$ je funkcija koeficijenata $a_j$.

- Radi se o kvadratnoj funkciji u $m+1$ varijabli, pa je uvjet minimuma da su sve parcijalne derivacije jednake 0.

Dakle,

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_i} = -2\langle f, \varphi_i\rangle + 2\sum_{j=0}^{m} a_j\langle \varphi_j, \varphi_i\rangle$$

pa mora biti

$$\sum_{j=0}^{m} \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle a_j = \langle \varphi_i, f\rangle.$$

Ako označimo

$$m_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle, \quad t_i = \langle \varphi_i, f \rangle, \quad i, j = 0, \ldots, m,$$

pri čemu je

$$a^T = [a_0, a_1, \ldots, a_m],$$

onda problem najmanjih kvadrata možemo pisati kao sustav normalnih jednadžbi

$$Ma = t.$$

Matrica $M$ je

- (očito) simetrična,
- ali i pozitivno definitna.

# Pozitivna definitnost matrice $M$

Pozitivna definitnost izlazi iz definicije elemenata $m_{ij}$. Za svaki vektor $x \neq 0$ imamo

$$\begin{aligned} x^T M x &= \textstyle\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m x_i x_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \langle x_i \varphi_i, x_j \varphi_j \rangle \\ &= \left\langle \textstyle\sum_{i=0}^m x_i \varphi_i, \sum_{j=0}^m x_j \varphi_j \right\rangle = \left\| \textstyle\sum_{i=0}^m x_i \varphi_i \right\|_2^2, \end{aligned}$$

što je očito nenegativno.

Nuli je jednako ako i samo ako je

$$\sum_{i=0}^m x_i \varphi_i \equiv 0, \quad \text{čim je } w(x) > 0.$$

# Rješenje problema najmanjih kvadrata

Zaključak. Simetrične pozitivno definitne matrice su nesingularne, pa

- postoji jedinstveno rješenje problema $Ma = t$.

Nadalje, izračunati vektor $a$ je jedinstveni minimum za problem najmanjih kvadrata, jer je

- Hesseova matrica drugih parcijalnih derivacija $H$ pozitivno definitna, što slijedi iz

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial a_j} = 2 \int_a^b w(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx = 2m_{ij},$$

tj. $H = 2M$!

# Primjer

Ako funkciju $f(x)$ na $[0,1]$ uz $w(x) = 1$ aproksimiramo polinomom stupnja $n$ po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, matrica linearnog sustava je

$$M = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \ldots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{bmatrix},$$

pri čemu su

$$s_k := \int_0^1 x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

Matrica linearnog sustava je Hilbertova matrica - loša uvjetovanost!

# Ortogonalne funkcije i najmanji kvadrati

Linearni sustav za neprekidni problem najmanjih kvadrata zapisali smo kao

$$\sum_{j=0}^{m} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle a_j = \langle \varphi_i, f \rangle, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Ako $\varphi_i$, $i = 0, \ldots, m$, tvore ortogonalni sustav funkcija, onda je

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 \quad \text{za } i \neq j, \quad \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = \|\varphi_j\|^2 > 0.$$

Uvrštavanjem u linearni sustav, dobivamo da je sustav dijagonalan, a njegovo rješenje je

$$a_j = \frac{\langle \varphi_j, f \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Greška aproksimacije $f - \varphi^{(m)}$ je okomita na sve linearne kombinacije funkcija $\varphi_k$, za $k = 0, \ldots, m$.

Dovoljno je pokazati da je greška okomita na svaki $\varphi_k$

$$\begin{aligned} \langle f - \varphi^{(m)}, \varphi_k \rangle &= \left\langle f - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j, \varphi_k \right\rangle = \langle f - a_k \varphi_k, \varphi_k \rangle \\ &= \langle f, \varphi_k \rangle - a_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle \\ &= \langle f, \varphi_k \rangle - \frac{\langle \varphi_k, f \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Dobiveni rezultat ima jednostavno geometrijsko značenje — aproksimacija je ortogonalna projekcija na prostor $\Phi_m$ razapet funkcijama $\varphi_k$, za $k = 0, \ldots, m$.

Iz ortogonalnosti

$$\langle f - \varphi^{(m)}, \psi \rangle = 0,$$

gdje je $\psi \in \Phi_m$ bilo koja linearna kombinacija $\varphi_k$, zaključujemo da je i

$$\langle f - \varphi^{(m)}, \varphi^{(m)} \rangle = 0.$$

Tada, zbog okomitosti, možemo pisati

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \|\varphi^{(m)}\|_2^2 = \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \left\| \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j \right\|_2^2 \\ &= \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \sum_{j=0}^{m} |a_j|^2 \, \|\varphi_j\|_2^2. \end{aligned}$$

# Greška rješenja

Iz prethodne relacije slijedi da se greška aproksimacije može zapisati kao

$$\|f - \varphi^{(m)}\|_2 = \left( \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^{m} |a_j|^2 \, \|\varphi_j\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Ako je zadan niz prostora $\Phi_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, onda je iz prethodne relacije jasno da je

$$\|f - \varphi^{(0)}\|_2 \geq \|f - \varphi^{(1)}\|_2 \geq \|f - \varphi^{(2)}\|_2 \geq \cdots,$$

što jasno slijedi i iz činjenice da je

$$\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \cdots.$$

Ako je prostora $\Phi_k$ beskonačno mnogo, očito je da je norma greške aproksimacije

- monotono padajuća i
- odozdo ograničena s 0,

pa mora konvergirati.

Mora li norma greške konvergirati u 0?

Odgovor je ne! Naravno, nužni i dovoljni uvjet da bi greška konvergirala u nulu je

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \, \|\varphi_j\|_2^2,$$

što se odmah čita iz oblika greške.

# Ortogonalizacija

Ako je zadan skup funkcija $\hat{\varphi}_j$ koje su linearno nezavisne, ali nisu ortogonalne na nekom intervalu,

- $\hat{\varphi}_j$ ortogonaliziramo korištenjem (modificiranog) Gram–Schmidtovog procesa ortogonalizacije.
- Funkcije $\varphi_j$ koje razapinju isti prostor kao $\hat{\varphi}_j$ ne treba normirati.

Ortogonalizacija započinje s:

$$\varphi_0 := \hat{\varphi}_0.$$

Zatim, za $j = 1, 2, \ldots$ stavimo

$$\varphi_j := \hat{\varphi}_j - \sum_{k=0}^{j-1} a_k \varphi_k, \quad a_k = \frac{\langle \hat{\varphi}_j, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|_2^2}.$$

# Primjer

Primjer. Nađimo ortogonalnu bazu za prostor razapet funkcijama $1, x, x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w = 1$.

Rješenje. Skalarni produkt funkcija $u$ i $v$ definiran je s

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} w(x)u(x)v(x)\, dx = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\, dx.$$

Prva funkcija u ortogonalnoj bazi jednaka je prvoj zadanoj funkciji,

$$\varphi_0(x) = 1.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \langle x, \varphi_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} x \cdot 1 \, dx = (\text{neparnost}) = 0, \\ \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = x \Big|_{-1}^{1} = 2, \end{aligned}$$

pa je

$$a_0 = \frac{\langle x, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{0}{2} = 0.$$

Odatle odmah dobivamo

$$\varphi_1(x) = x - a_0 \cdot 1 = x.$$

Za ortogonalni polinom stupnja 2 treba izračunati $a_0$ i $a_1$

$$\begin{aligned}
\langle x^2, \varphi_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}, \\
\langle x^2, \varphi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\, dx = (\text{neparnost}) = 0, \\
\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx = \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

pa je

$$a_0 = \frac{\langle x^2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}, \qquad a_1 = \frac{\langle x^2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0.$$

Odatle je

$$\varphi_2(x) = x^2 - a_1 \cdot x - a_0 \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

# Primjer.

Primjer. Korištenjem ortogonalnih polinoma izračunatih u prethodnom primjeru, po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata nađite polinome stupnjeva 0 i 1 koji aproksimiraju funkciju

$$f(x) = e^x$$

na intervalu $[-1, 1]$ uz težinsku funkciju $w(x) = 1$.

Rješenje problema najmanjih kvadrata je funkcija

$$\varphi^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j, \qquad a_j = \frac{\langle \varphi_j, f \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}, \quad j = 0, 1.$$

Za određivanje koeficijenata $a_j$ moramo izračunati

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = 2, \\
\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx = \tfrac{2}{3}, \\
\langle \varphi_0, e^x \rangle &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^x \, dx = e - e^{-1}, \\
\langle \varphi_1, e^x \rangle &= \int_{-1}^{1} x \cdot e^x \, dx = 2e^{-1}.
\end{aligned}$$

Odatle odmah izlazi

$$a_0 = \frac{e - e^{-1}}{2} = \mathrm{sh}(1), \quad a_1 = \frac{2e^{-1}}{\frac{2}{3}} = 3e^{-1}.$$

Aproksimacija konstantom je

$$\varphi^{(0)}(x) = \mathrm{sh}(1)\varphi_0(x) = \mathrm{sh}(1) \cdot 1,$$

a polinomom stupnja 1

$$\varphi^{(1)}(x) = \mathrm{sh}(1)\varphi_0(x) + 3e^{-1}\varphi_1(x) = \mathrm{sh}(1) \cdot 1 + 3e^{-1} \cdot x,$$

što se poklapa s već izračunatim rješenjem koje nije koristilo ortogonalne polinome.

# Primjeri ortogonalnih familija funkcija

Trigonometrijske funkcije

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$$

čine ortogonalnu familiju funkcija na intervalu $[0, 2\pi]$ uz težinsku funkciju $w(x) = 1$.

Pokažimo da je to zaista istina. Neka su $k, \ell \in \mathbb{N}_0$. Tada vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big( \cos(k+\ell)x - \cos(k-\ell)x \big) \, dx.$$

# Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Ako je $k = \ell$, onda je prethodni integral jednak

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell} - x\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Ako je $k \neq \ell$, onda je jednak

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell} - \frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ \pi, & k = \ell, \end{cases} \qquad k, \ell = 1, 2, \ldots,$$

Na sličan način, pretvaranjem produkta trigonometrijskih funkcija u zbroj, možemo pokazati da je

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos \ell x \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ 2\pi, & k = \ell = 0, \\ \pi, & k = \ell > 0, \end{cases} \quad k, \ell = 0, 1, \ldots,$$

te, također, da je

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos \ell x \, dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \ell = 0, 1, \ldots,$$

# Fourierov red

Ako periodičku funkciju $f$ osnovnog perioda duljine $2\pi$ aproksimiramo redom oblika

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

onda, množenjem odgovarajućim trigonometrijskim funkcijama i integriranjem, dobivamo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Prethodni red poznat je pod imenom Fourierov red, a koeficijenti kao Fourierovi koeficijenti.

# Fourierov red i najmanji kvadrati

Ako Fourierov red odsiječemo za $k = m$ dobijemo tzv. trigonometrijski polinom.

- Taj polinom je najbolja aproksimacija u smislu najmanjih kvadrata za $f$ u klasi trigonometrijskih polinoma stupnja manjeg ili jednakog $m$.

Uz ortogonalnost trigonometrijskih funkcija (obzirom na integral kao skalarni produkt), postoji diskretna ortogonalnost (integral se zamijeni sumom).

### Teorem (Dirichlet)

*Neka je* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *takva da vrijedi*

(*i*) *Funkcija* $f$ *ima najviše konačno prekida i to prve vrste na* $[-\pi, \pi]$.

(*ii*) *Funkcija* $f$ *je po dijelovima monotona na* $[-\pi, \pi]$.

*Tada Fourierov red funkcije* $f$ *konvergira* $\forall x \in \mathbb{R}$.

*Neka je* $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *suma Fourierovog reda. Ako je* $f$ *neprekidna u* $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, *onda je* $S(x) = f(x)$.
*Ako* $f$ *ima prekid u* $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, *onda je*

$$S(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

*Također je*

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(\pi-) + f(-\pi+)}{2}.$$

# Klasični ortogonalni polinomi

U praksi najčešće susrećemo pet tipova klasičnih ortogonalnih polinoma.

Prisjetimo se, za polinome

$$\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\},$$

(indeks polinoma označava stupanj), kažemo da su ortogonalni obzirom na težinsku funkciju $w$, na $[a, b]$, ako vrijedi

$$\int_a^b w(x)\, p_m(x)\, p_n(x)\, dx = 0, \quad \text{za } m \neq n.$$

Težinska funkcija

- određuje sistem polinoma do na konstantni faktor u svakom od polinoma.
- Izbor takvog faktora zove se još i standardizacija ili normalizacija.

Zajedničke karakteristike ortogonalnih polinoma:

- Ortogonalni polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurziju

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

  s tim da su poznate "početne" funkcije $p_0$ i $p_1$, i sve funkcije $\alpha_n$, $\beta_n$, za $n \in \mathbb{N}$.
- Oprez. Prethodnu rekurziju zadovoljavaju i mnoge specijalne funkcije koje nisu ortogonalne!
- Nultočke ortogonalnih polinoma uvijek se nalaze unutar intervala $[a, b]$ na kojem su polinomi ortogonalni.

# Čebiševljevi polinomi prve vrste

Čebiševljevi polinomi prve vrste

- označavaju se s $T_n$,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Za njih postoji i eksplicitna formula

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Osim toga, $n$-ti Čebiševljev polinom prve vrste $T_n$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

# Čebiševljevi polinomi prve vrste na $[0, 1]$

Katkad se koriste i Čebiševljevi polinomi prve vrste

- transformirani na interval $[0, 1]$,
- u oznaci $T_n^*$.

Dobivaju se korištenjem linearne (preciznije, afine) transformacije

$$[0, 1] \ni x \mapsto \xi := 2x - 1 \in [-1, 1].$$

Relacija ortogonalnosti postaje

$$\int_0^1 \frac{T_m^*(x)\, T_n^*(x)}{\sqrt{x - x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0, \end{cases}$$

a rekurzivna relacija

$$T^*_{n+1}(x) - 2(2x - 1)\,T^*_n(x) + T^*_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$T^*_0(x) = 1, \quad T^*_1(x) = 2x - 1.$$

# Čebiševljevi polinomi druge vrste

Čebiševljevi polinomi druge vrste

- označavaju se s $U_n$,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, U_m(x)\, U_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi/2, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Zadovoljavaju istu rekurziju kao i polinomi prve vrste

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,$$

uz malo drugačiji start

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

Za njih postoji i eksplicitna formula

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

$n$-ti Čebiševljev polinom druge vrste $U_n$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0.$$

# Legendreovi polinomi

Legendreovi polinomi

- označavaju se s $P_n$,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = 1.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2/(2n+1), & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Osim toga, $n$-ti Legendreov polinom $P_n$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

# Laguerreovi polinomi

Laguerreovi polinomi

- označavaju se s $L_n$,
- ortogonalni su na intervalu $[0, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 1, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

# Laguerreovi polinomi (nastavak)

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.$$

Osim toga, $n$-ti Laguerreov polinom $L_n$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

# Hermiteovi polinomi

Hermiteovi polinomi

- označavaju se s $H_n$,
- ortogonalni su na intervalu $(-\infty, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2^n\, n! \sqrt{\pi}, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Osim toga, $n$-ti Hermiteov polinom $H_n$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

# Ortogonalni polinomi i tročlane rekurzije

Razvoj polinoma po ortogonalnim polinomima

### Teorem

*Neka je* $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ *familija ortogonalnih polinoma na intervalu* $[a, b]$ *s težinskom funkcijom* $w(x) \geq 0$. *Pretpostavljamo da je* $p_n$ *polinom stupnja n, za svaki* $n \geq 0$.

*Ako je f polinom stupnja m, tada vrijedi*

$$f = \sum_{n=0}^{m} \frac{\langle f, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} \, p_n.$$

***Dokaz:*** Provodi se Gram–Schmidtovim procesom ortogonalizacije na sustavu potencija $\{1, x, x^2, \ldots\}$, pa se iskoristi da je $f$ linearna kombinacija baze $\{1, x, \ldots, x^m\}$. $\square$

# Ortogonalnost na polinome nižeg stupnja

Jednostavna posljedica prethodne tvrdnje je sljedeći rezultat, kojeg ćemo koristiti u nastavku.

## Korolar

*Korolar. Neka je $p_n$ ortogonalni polinom stupnja n, za $n \geq 0$, i neka je f bilo koji polinom stupnja strogo manjeg od n, tj. $f \in \mathcal{P}_{n-1}$. Onda je*

$$\langle p_n, f \rangle = 0.$$

Drugim riječima,

- $p_n$ je ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja od $n$.

Dokaz. Stavimo $m = n - 1$, pa tvrdnja ide direktno iz prikaza u prošlom teoremu i ortogonalnosti. □

# Nultočke ortogonalnih polinoma

## Teorem

*Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Tada svaki polinom $p_n$ ima točno $n$ različitih (jednostrukih) realnih nultočaka na otvorenom intervalu $\langle a, b \rangle$.*

***Dokaz:*** Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sve međusobno različite nultočke polinoma $p_n$ za koje vrijedi:

- $a < x_i < b$,
- $p_n(x)$ mijenja predznak u $x_i$ ($x_i$ je neparne kratnosti).

Budući da je $p_n$ stupnja $n$,

- po osnovnom teoremu algebre, $p_n$ ima točno $n$ nultočaka,
- a onih koje zadovoljavaju prethodna dva svojstva ima manje ili jednako $n$, tj. znamo da je $m \leq n$.

Polinom $p_n$ onda možemo prikazati u obliku produkta

$$p_n(x) = h(x)\,(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_m)^{r_m},$$

pri čemu

- svi $r_i$ moraju biti neparni, a
- polinom $h(x)$ ne smije promijeniti predznak na $(a, b)$.

Pretpostavimo da nultočaka koje zadovoljavaju tražena dva svojstva ima striktno manje od $n$, tj. $m < n$.

Pokažimo da je to nemoguće. Definiramo polinom

$$B(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m).$$

Množenjem s $p_n(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x)B(x) &= p_n(x)\,(x-x_1)\cdots(x-x_m) \\ &= h(x)\,(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_m)^{r_m+1}. \end{aligned}$$

Po definiciji točaka $x_1,\ldots,x_m$, ovaj polinom ne mijenja znak prolaskom kroz točke $x_1,\ldots,x_m$ (eksponenti $r_i+1$ su parni).

Osim toga, $h(x)$ ne mijenja znak na $(a,b)$, tj.

- čitav polinom $p_n(x)B(x)$ ne mijenja znak na $(a,b)$.

Zato vrijedi

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x)\,dx \neq 0,$$

jer je to integral funkcije fiksnog predznaka (plus ili minus).

S druge strane, prethodni integral je skalarni produkt polinoma $B$ (stupnja $m < n$) i polinoma $p_n$ (stupnja $n$).

- Svaki ortogonalni polinom $p_n$ je okomit na sve polinome nižeg stupnja (v. korolar), pa je

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x)\,dx = \langle B, p_n\rangle = 0,$$

što je kontradikcija.

Zaključak. Pretpostavka o stupnju polinoma $B$ je bila pogrešna, tj. mora biti $m = n$.

Dakle, $p_n$ ima točno $n$ nultočaka $x_1, \ldots, x_n$ u kojima mijenja predznak, pa one moraju biti jednostruke, jer je $p_n'(x_i) \neq 0$. $\square$

# Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zadana je familija ortogonalnih polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$ na intervalu $[a, b]$ i neka su $A_n$ i $B_n$ vodeća dva koeficijenta polinoma $p_n$, tj.

$$p_n(x) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots,$$

s tim da je $A_n \neq 0$. Tada $p_n$ možemo napisati kao

$$p_n(x) = A_n(x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}).$$

Definiramo još i

$$a_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \qquad \gamma_n = \|p_n\|^2 = \langle p_n, p_n \rangle > 0.$$

Uočite: $a_n$ je omjer vodećih koeficijenata susjednih polinoma.

## Teorem

*Teorem. Neka je* $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ *familija ortogonalnih polinoma na intervalu* $[a, b]$ *s težinskom funkcijom* $w(x) \geq 0$*.*
*Za svaki* $n \geq 1$ *vrijedi tročlana homogena rekurzija*

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) p_n(x) - c_n p_{n-1}(x),$$

*pri čemu su koeficijenti u rekurziji dani formulama*

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \left( \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{B_n}{A_n} \right) = -\frac{a_n}{\gamma_n} \langle x p_n, p_n \rangle, \\ c_n &= \frac{A_{n+1} A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}. \end{aligned}$$

Za polinome $p_n$ s vodećim koeficijentom $A_n = 1$, ove formule su još jednostavnije, jer je $a_n = 1$.

***Dokaz:*** Definiramo polinom $G$ na sljedeći način — tako da poništimo vodeći koeficijent u $p_{n+1}$, tj. dobijemo $\deg G \leq n$.

$$\begin{aligned} G(x) &= p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x) \\ &= (A_{n+1}x^{n+1} + B_{n+1}x^n + \cdots) \\ &\quad - \frac{A_{n+1}}{A_n} x(A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots) \\ &= \left(B_{n+1} - \frac{A_{n+1}B_n}{A_n}\right) x^n + \cdots . \end{aligned}$$

Dakle, $G$ je zaista stupnja manjeg ili jednakog $n$.

Polinom $G$ onda možemo napisati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog $n$, tj.

$$G(x) = d_n p_n(x) + \cdots + d_0 p_0(x).$$

Računanjem koeficijenata $d_i$ (v. prvi teorem o prikazu) izlazi

$$d_i = \frac{\langle G, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} = \frac{1}{\gamma_i} \big( \langle p_{n+1}, p_i \rangle - a_n \langle x p_n, p_i \rangle \big), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Treba još izračunati oba skalarna produkta na desnoj strani.

Za prvi produkt, iz ortogonalnosti odmah dobivamo

$$\langle p_{n+1}, p_i \rangle = 0, \quad i \leq n,$$

tj. tog člana nema u relaciji za koeficijente $d_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Za drugi produkt $\langle xp_n, p_i\rangle$ dobivamo

$$\langle xp_n, p_i\rangle = \int_a^b w(x)p_n(x)xp_i(x)\,dx = \langle p_n, xp_i\rangle.$$

Polinom $xp_i(x)$ je stupnja $i+1$. Nadalje, polinom $p_n$ je ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja.

Dakle, za sve $i \leq n-2$, stupanj polinoma $xp_i(x)$ je manji ili jednak $n-1$, pa je

$$\langle xp_n, p_i\rangle = \langle p_n, xp_i\rangle = 0, \quad i \leq n-2.$$

Kombiniranjem ta dva rezultata, dobivamo

$$d_i = 0, \quad \text{za} \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Zbog toga je

$$G(x) = d_n p_n(x) + d_{n-1}p_{n-1}(x).$$

Kad uvrstimo $G(x) = p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x)$ i sredimo, izlazi

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + d_n) p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Dakle, vrijedi tročlana rekurzija, s $b_n = d_n$ i $c_n = -d_{n-1}$.

Iz prve relacije, uspoređivanjem vodećih koeficijenata funkcije $G$ i funkcije s desne strane, slijedi prva formula za $b_n = d_n$.

Iz opće relacije za $d_i$, za koeficijente $d_{n-1}$ i $d_n$ dobivamo

$$d_i = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle x p_n, p_i \rangle = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle p_n, x p_i \rangle, \quad i = n-1, n.$$

Odavde izlaze i preostale dvije formule (izjednačavanjem vodećih koeficijenata polinoma $x p_{n-1}$ i njegovog zapisa u bazi $p_i$, $i = 0, \ldots, n$).
$\square$

# Christoffel–Darbouxov identitet

Mnoge korisne relacije za ortogonalne polinome izvode se korištenjem sljedećeg teorema.

### Teorem

*Teorem. (Christoffel–Darbouxov identitet.) Neka je* $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ *familija ortogonalnih polinoma na intervalu* $[a, b]$ *s težinskom funkcijom* $w(x) \geq 0$. *Za njih vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\gamma_k} = \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{a_n\gamma_n(x-y)}.$$

***Dokaz:*** Manipulacijom tročlane rekurzije. □

# Hornerova shema i ortogonalni polinomi

Već ste upoznali Hornerovu shemu za izvrednjavanje polinoma.

- Postoji vrlo slična shema za izvrednjavanje ortogonalnih polinoma.
- Ponovimo svojstva Hornerove sheme za polinome.

# Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Zadan je polinom $p_n$ stupnja $n$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_n \neq 0,$$

kojemu treba izračunati vrijednost u zadanoj točki $x_0$. To se može napraviti na više načina.

- Prvo, napravimo to direktno po zapisu, potencirajući.

Krenemo li od nulte potencije $x^0 = 1$, svaka sljedeća potencija dobiva se rekurzivno

$$x^i = x \cdot x^{i-1}.$$

Imamo li zapamćen $x^{i-1}$, lako je izračunati $x^i$ — korištenjem samo jednog množenja.

$$2n \text{ množenja} \ + \ n \text{ zbrajanja.}$$

# Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Izvrednjavanje polinoma u točki može se izvesti i s manje množenja — ako polinom zapišemo u obliku

$$p_n(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

Algoritam koji po prethodnoj relaciji izvrednjava polinom zove se Hornerova shema.

$$n \text{ množenja} \quad + \quad n \text{ zbrajanja.}$$

Dodatna prednost Hornerove sheme:

- Hornerova shema može biti stabilnija nego direktno potenciranje, zbog redova veličine članova u sumi.

# Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Promatrajmo polinom koji dobijemo dijeljenjem polinoma $p_n$ s polinomom stupnja 1 oblika $x - x_0$.

- Kvocijent ta dva polinoma nazovimo $q_{n-1}$ — to je ponovno polinom, stupnja $n - 1$,
- a ostatak je broj koji označimo s $b_0$.

Tada vrijedi

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x) + b_0.$$

Uvrštavanje $x = x_0$ u prethodnu relaciju pokazuje da je

$$b_0 = p_n(x_0) = r_0.$$

Označimo koeficijente polinoma $q_{n-1}$ s $b_i$, za $1 \leq i \leq n$,

$$q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i.$$

Uvrstimo li to u relaciju za dijeljenje, sređivanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije, dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x) = b_n x^n \quad & +(b_{n-1} - x_0\, b_n) x^{n-1} + \cdots + (b_1 - x_0\, b_2) x \\ & + b_0 - x_0\, b_1 . \end{aligned}$$

Za vodeći koeficijent $b_n$, odmah zaključujemo $b_n = a_n$, a za ostale koeficijente dobivamo

$$a_i = b_i - x_0 \cdot b_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 0.$$

Dakle, $b_i$ možemo izračunati iz $b_{i+1}$ rekurzijom

$$b_i = a_i + x_0 \cdot b_{i+1}.$$

Primijetite da je to relacija istog oblika kao za dobivanje $c_i$, samo s pomaknutim indeksima. Kako je na startu $b_n = c_{n-1}$, zaključujemo da je

$$b_i = c_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zaključak: koeficijenti koje dobijemo u Hornerovoj shemi su

- koeficijenti kvocijenta i ostatka pri dijeljenju polinoma $p_n$ linearnim faktorom $x - x_0$.

# Potpuna Hornerova shema

Što se događa ako postupak dijeljenja polinoma linearnim faktorom nastavimo, tj. ponovimo više puta?

Vrijedi

$$\begin{aligned} p_n(x) &= (x - x_0)q_{n-1}(x) + r_0 \\ &= (x - x_0)\big[(x - x_0)q_{n-2}(x) + r_1\big] + r_0 \\ &= (x - x_0)^2 q_{n-2}(x) + r_1(x - x_0) + r_0 \\ &= \cdots \\ &= r_n(x - x_0)^n + \cdots + r_1(x - x_0) + r_0. \end{aligned}$$

Dakle, polinom $p_n$ razvijen je po potencijama od $(x - x_0)$.

Koja su značenja koeficijenata $r_i$?

Usporedimo dobiveni oblik s Taylorovim polinomom oko $x_0$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!} \left(x - x_0\right)^i,$$

pa zaključujemo da vrijedi

$$r_i = \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Dakle, potpuna Hornerova shema računa

- sve Taylorove koeficijente polinoma u zadanoj točki,

tj. sve derivacije polinoma u zadanoj točki $x_0$, podijeljene pripadnim faktorijelima.

# Razvoji po ortogonalnim polinomima

U primjenama se često koriste razvoji oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

gdje je $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ neki ortogonalni sustav funkcija na domeni aproksimacije.

- Razvoj funkcije $f$ u red po ortogonalnim polinomima je očita generalizacija reda potencija.
- Takvi redovi koriste se za aproksimaciju funkcije $f$, ako znamo da red konvergira prema $f$ na nekoj domeni.

“Rezanjem” reda dobivamo aproksimaciju funkcije $f$

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x).$$

Posebno se često koriste razvoji po Čebiševljevim polinomima prve vrste

- za aproksimaciju elementarnih i “manje elementarnih” specijalnih funkcija,
- zbog skoro jednolikog rasporeda greške na domeni — tzv. “skoro minimaks aproksimacije”.

Da bismo izračunali $f_N(x)$ moramo znati sve koeficijente $a_n$ i sve funkcije $p_n$.

- Najčešće nemamo formulu za $p_n$, nego znamo da funkcije $p_n$ zadovoljavaju jednostavnu tročlanu rekurziju po $n$.

Pristup računanju vrijednosti $f_N(x)$ je isti kao i ranije:

- Ako unaprijed ne znamo $N$, onda se sumacija vrši unaprijed, a $p_n(x)$ se računa redom iz rekurzije.
- Iz teorije aproksimacija, često je moguće unaprijed naći koliko članova $N$ treba uzeti za (uniformnu) zadanu točnost. Tada se koristi generalizacija Hornerove sheme za brzo izvrednjavanje $f_N$.

# Izvrednjavanje tročlanih rekurzija

Prisjetimo se, ortogonalni polinomi, ali i mnoge druge specijalne funkcije (koje ne moraju biti ortogonalne), zadovoljavaju rekurziju oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

s tim da su poznate "početne" funkcije $p_0$ i $p_1$, i sve funkcije $\alpha_n$, $\beta_n$, za $n \in \mathbb{N}$.

Definiramo rekurziju za koeficijente

$$\begin{aligned} B_{N+2} &= B_{N+1} = 0, \\ B_n &= a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u formulu za $f_N(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned}
f_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x) = (\text{uvrstimo } a_n \text{ iz rekurzije za } B_n) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \left(B_n + \alpha_n(x) B_{n+1} + \beta_{n+1}(x) B_{n+2}\right) p_n(x) \\
&= \sum_{n=-1}^{N-1} B_{n+1} p_{n+1}(x) + \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) B_{n+1} p_n(x) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N+1} \beta_n(x) B_{n+1} p_{n-1}(x) \\
&= (\text{rastavimo indekse na 1 do } N-1 \text{ i ostale}) = \cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cdots &= \sum_{n=1}^{N-1} B_{n+1}\big(p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x)\big) \\
&\quad + B_0p_0(x) + B_1p_1(x) + \alpha_0(x)B_1p_0(x) \\
&= \text{(iskoristimo da je tročlana rekurzija homogena)} \\
&= B_0p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)\big).
\end{aligned}
$$

U algoritmu je uobičajeno napraviti jedan korak rekurzije za koeficijente $B_n$ “na ruke”, tako da

- algoritam počinje indeksima $B_{N+1} = 0$, $B_N = a_N$.

# Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Ako trebamo izračunati i derivaciju $f_N'(x)$, do pripadnog algoritma dolazimo deriviranjem rekurzije za $B_n$.

- Koeficijente $B_n$ shvatimo kao funkcije od $x$.
- Deriviramo $B_n = a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}$, s tim da $B_n'$ označava derivaciju $B_n$ po $x$, u točki $x$.

"Formalnim" deriviranjem dobivamo rekurziju za $B_n'$

$$\begin{aligned}
B_{N+2} &= B_{N+1} = 0, \\
B_{N+2}' &= B_{N+1}' = 0, \\
B_n &= a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0. \\
B_n' &= -\alpha_n'(x)B_{n+1} - \alpha_n(x)B_{n+1}' \\
&\quad -\beta_{n+1}'(x)B_{n+2} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}', \quad n = N, \ldots, 0.
\end{aligned}$$

Odavde je vidljivo da je i $B'_N = 0$. Uz standardnu oznaku

$$b_n = -\alpha'_n(x)B_{n+1} - \beta'_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0,$$

je $b_N = 0$, pa rekurziju za $B'_n$ pišemo u obliku

$$B'_n = b_n - \alpha_n(x)B'_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B'_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0,$$

što ima skoro isti oblik kao i rekurzija za $B_n$, osim zamjene $a_n$ s $b_n$.

Vrijednost $f'_N(x)$ dobivamo deriviranjem $f_N(x)$,

$$f_N(x) = B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)\big).$$

Odmah slijedi

$$\begin{aligned} f_N'(x) &= B_0 p_0'(x) + B_0' p_0(x) \\ &\quad + B_1 \left( p_1'(x) + \alpha_0'(x) p_0(x) + \alpha_0(x) p_0'(x) \right), \\ &\quad + B_1' \left( p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x) \right). \end{aligned}$$

Zaključak. Da bismo izračunali $f_N'(x)$, dovoljno je znati samo derivacije "početnih" funkcija $p_0'$ i $p_1'$, kao i $\alpha_n'$ i $\beta_n'$.

- Za računanje $f_N'(x)$ treba i rekurzija za $f_N(x)$, pa se te dvije vrijednosti obično zajedno računaju.
- Rekurzije za $B_n$ i $B_n'$ provodimo u istoj petlji.

# Parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma

Tvrdnja. Neparni Čebiševljevi polinomi su neparne, a parni su parne funkcije.

Dokaz se provodi indukcijom. Za nulti i prvi polinom, tvrdnja očito vrijedi, jer je $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Pretpostavimo da su svi parni polinomi (do nekog stupnja $n$), parne, a svi neparni, neparne funkcije. Iz rekurzije

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

vidimo da je

- član $2xT_n(x)$ suprotne parnosti od $T_n(x)$, tj.
- $2xT_n(x)$ je iste parnosti kao $T_{n-1}$,
- pa je $T_{n+1}$ iste parnosti kao $T_{n-1}$. $\square$

Isti dokaz kao za parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma vrijedi i za:

- Čebiševljeve polinome druge vrste,
- Legendreove polinome,
- Hermiteove polinome.

Sada je jasno da se parne funkcije razvijaju po parnim, a neparne po neparnim Čebiševljevim polinomima.

Zaključak. Za sve polinome koji su parne/neparne funkcije, korisno je imati rekurziju samo za parne/neparne polinome.

# Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Napišimo rekurziju za dva susjedna parna polinoma

$$\begin{aligned} T_{2n+2}(x) - 2xT_{2n+1}(x) + T_{2n}(x) &= 0 \\ T_{2n}(x) - 2xT_{2n-1}(x) + T_{2n-2}(x) &= 0, \end{aligned}$$

kao i rekurziju za srednji, neparni član

$$T_{2n+1}(x) - 2xT_{2n}(x) + T_{2n-1}(x) = 0.$$

Zbrojimo rekurzije za parne članove. Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2T_{2n}(x) - 2x\big(T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x)\big) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Iz rekurzije za neparni član iskoristimo da je

$$T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x) = 2xT_{2n}(x).$$

Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2(1 - 2x^2)\,T_{2n}(x) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Početak te rekurzije su prva dva parna polinoma

$$T_0(x) = 1, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Za neparne polinome, rekurzija se dobiva na sličan način. Rekurzija za neparne Čebiševljeve polinome je istog oblika kao za parne

$$T_{2n+1}(x) + 2(1 - 2x^2)\,T_{2n-1}(x) + T_{2n-3}(x) = 0,$$

uz početak te rekurzije

$$T_1(x) = x, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

# Rekurzije za ostale ortogonalne polinome

Napomena. Za sve ostale klasične ortogonalne polinome (osim Laguerreovih), rekurzija za parne/neparne polinome izvodi se na isti način.

Napomena. Rekurziju za parne/neparne Čebiševljeve polinome mogli smo i lakše izvesti, korištenjem

- adicijske formule za trigonometrijske funkcije,
- i eksplicitne formule za $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

# Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \cos x$$

ima razvoj po parnim normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k}\left(\frac{2x}{\pi}\right), \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

| $k$ | $a_k$ | $k$ | $a_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.47200121576823476745 | 6 | 0.00000000021934576590 |
| 1 | −0.49940325827040708740 | 7 | −0.00000000000074816487 |
| 2 | 0.02799207961754761751 | 8 | 0.00000000000000193230 |
| 3 | −0.00059669519654884650 | 9 | −0.00000000000000000391 |
| 4 | 0.00000670439486991684 | 10 | 0.00000000000000000001 |
| 5 | −0.00000004653229589732 | | |

Supstitucijom

$$y = \frac{2x}{\pi}$$

prethodni se razvoj svodi na razvoj funkcije kosinus na intervalu $[-1, 1]$ po parnim Čebiševljevim polinomima.

Formule za koeficijente u razvoju su onda

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \qquad k \geq 0.$$

Ove integrale možemo izračunati analitički

- tek za poneke funkcije $f$.

Za numeričko računanje koeficijenata $a_k$, za $k \leq n$, postoje dva pristupa:

- Gauss-Čebiševljeva integracija reda većeg od $n$,
- diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma u nultočkama ili ektremima Čebiševljevog polinoma $T_{N+1}$, za $N \geq n$.

Za razvoje po $T_k$, ova dva pristupa su ekvivalentna.

# Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Budući da su Čebiševljevi polinomi $T_k$ zapravo kosinusi, za njih vrijede

- vrlo slične relacije diskretne ortogonalnosti kao kod trigonometrijskih funkcija (v. malo kasnije).

Neka su $x_j$ sve različite nultočke Čebiševljevog polinoma $T_{N+1}$, tj. neka je

$$T_{N+1}(x_j) = \cos(N+1)\vartheta_j = 0.$$

Nije teško izračunati da je tada

$$x_j = \cos\vartheta_j, \quad \vartheta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2(N+1)}, \quad j = 0, \ldots, N.$$

Za Čebiševljeve polinome na skupu nultočaka $\{x_0, \ldots, x_N\}$ vrijede sljedeće relacije ortogonalnosti

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N} T_k(x_j)\, T_\ell(x_j) &= \sum_{j=0}^{N} \cos(k\vartheta_j) \cos(\ell\vartheta_j) \\ &= \begin{cases} 0 & k \neq \ell, \text{ uz } k, \ell \leq N, \\ (N+1)/2 & k = \ell, \text{ uz } 0 < k \leq N, \\ N+1 & k = \ell = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Skica dokaza: Produkt kosinusa pretvorimo u zbroj kosinusa.

- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume, i uzme se realni dio rezultata.

Dakle, $\{T_0, T_1, \ldots, T_N\}$ je ortogonalna baza u prostoru polinoma $\mathcal{P}_N$ obzirom na diskretni skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, g(x_j).$$

Uočite da ovom sustavu funkcija ne možemo dodati sljedeći Čebiševljev polinom $T_{N+1}$, jer je

- njegov vektor vrijednosti u zadanim točkama nul-vektor.

Napomena: Unitarni prostor "događaja" je $\mathbb{R}^{N+1}$, s tim da

- svakoj funkciji $f$ pridružujemo
- vektor njezinih vrijednosti u točkama $x_0, \ldots, x_N$.

Neka je $f_n$ aproksimacija za $f$ po pripadnoj diskretnoj ortogonalnoj metodi najmanjih kvadrata, oblika

$$f_n(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} d_k T_k(x), \quad n \leq N.$$

Za koeficijente vrijedi standardna formula $\langle f, T_k \rangle / \| T_k \|^2$ u pripadnom skalarnom produktu, pa je

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_k(x_j), \quad k = 0, \ldots, N.$$

Napomena: koeficijenti $d_k$ ovise o $N$, samo to nije posebno označeno!

Za zadane $f$ i $N$, ovi koeficijenti

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_k(x_j), \quad k = 0, \ldots, N,$$

se jednostavno računaju!

Ako koeficijenti $a_k$ relativno brzo padaju, onda za relativno male vrijednosti $N$ (na pr. $N = 31$, ili $N = 63$) dobivamo

- da se $a_k$ i $d_k$ podudaraju na punu točnost računala (double, extended)!

Slične relacije diskretne ortogonalnosti vrijede i u ekstremima polinoma $T_{N+1}$.

# Razvoj $\ln(x+1)$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \ln(1+x)$$

ima razvoj po normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[0,1]$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k^*(x), \quad x \in [0,1],$$

gdje je $T_k^*(x) = T_k(2x-1)$.

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

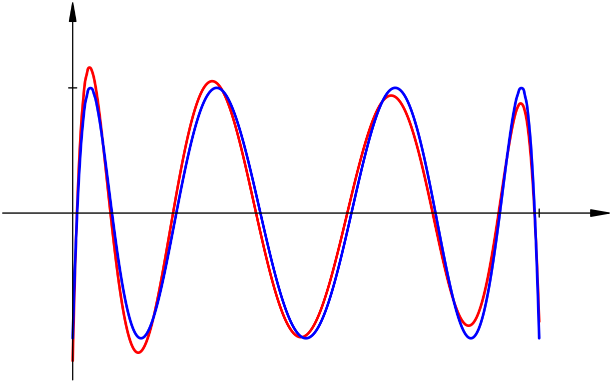
| $k$ | $a_k$ | $k$ | $a_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.37645281291919543163 | 13 | 0.00000000001717587317 |
| 1 | 0.34314575050761980479 | 14 | −0.00000000000273642009 |
| 2 | −0.02943725152285941438 | 15 | 0.00000000000043819577 |
| 3 | 0.00336708925556438925 | 16 | −0.00000000000007048360 |
| 4 | −0.00043327588861004446 | 17 | 0.00000000000001138172 |
| 5 | 0.00005947071198957983 | 18 | −0.00000000000000184431 |
| 6 | −0.00000850296754120286 | 19 | 0.00000000000000029978 |
| 7 | 0.00000125046736220057 | 20 | −0.00000000000000004886 |
| 8 | −0.00000018772799565082 | 21 | 0.00000000000000000798 |
| 9 | 0.00000002863025064840 | 22 | −0.00000000000000000131 |
| 10 | −0.00000000442095698068 | 23 | 0.00000000000000000021 |
| 11 | 0.00000000068956027323 | 24 | −0.00000000000000000004 |
| 12 | −0.00000000010845068551 | 25 | 0.00000000000000000001 |

- Za aproksimaciju $f_7$ funkcije $f$ uzimamo sumu prvih 8 članova reda (do uključivo $k = 7$).
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_7(x)$, pogreške $e_7(x) = f(x) - f_7(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka $x$.

$$
\begin{aligned}
f_7(x) &= \sum_{k=0}^{7} a_k T_k^*(x), \\
e_7(x) &= a_8 T_8^*(x) + \sum_{k=9}^{\infty} a_k T_k^*(x).
\end{aligned}
$$

Na sljedećem grafu je

- greška $e_7(x) = f(x) - f_7(x)$ prikazana crvenom bojom,
- prvi odbačeni član $a_8\,T_8^*(x)$ plavom bojom.



**Pogreška je približno jednaka prvom odbačenom članu!**

# Ekonomizacija Taylorovog reda

Još jedan način dobivanja aproksimacije pomoću Čebiševljevih polinoma.

Taylorov red funkcije $f$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i.$$

Izaberemo $N$:

$$f_N(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i\, x^i.$$

Koristeći eksplicitne izraze za Čebiševljeve polinome, $f_N$ prikažemo kao

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k\, T_k(x).$$

Izaberemo $n < N$ (odbacimo nekoliko zadnjih članova). Aproksimacija je:

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, T_k(x).$$

Koeficijenti Čebiševljevih polinoma:

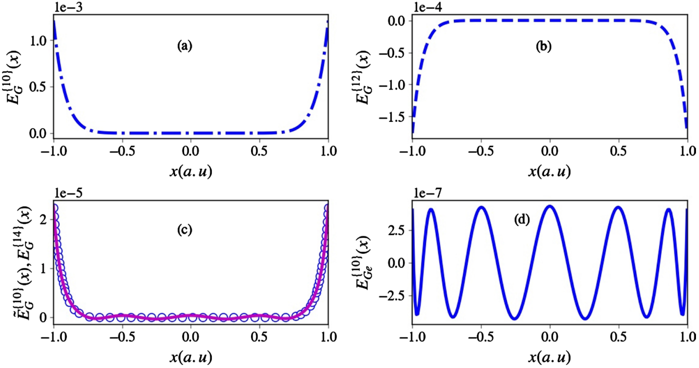
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \\ T_3(x) \\ T_4(x) \\ T_5(x) \\ T_6(x) \\ T_7(x) \\ T_8(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ -2 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & -3 & 0 & 1 & & & & & \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 0 & 1 & & & \\ -2 & 0 & 9 & 0 & -6 & 0 & 1 & & \\ 0 & -7 & 0 & 14 & 0 & -7 & 0 & 1 & \\ 2 & 0 & -16 & 0 & 20 & 0 & -8 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{-1} \\ 2^0 x \\ 2^1 x^2 \\ 2^2 x^3 \\ 2^3 x^4 \\ 2^4 x^5 \\ 2^5 x^6 \\ 2^6 x^7 \\ 2^7 x^8 \end{bmatrix}$$

**Primjer.**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \exp(-x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \\
f_{14}(x) &= \sum_{k=0}^{7} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \\
f_{14}(x) &= \frac{739773}{1146880} - \frac{205029}{655360} T_2(x) + \frac{114127}{2949120} T_4(x) - \\
&\quad - \frac{18943}{5898240} T_6(x) + \frac{293}{1474560} T_8(x) - \frac{61}{5898240} T_{10}(x) + \\
&\quad + \frac{1}{2949120} T_{12}(x) - \frac{1}{41287680} T_{14}(x)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{10}(x) &= \frac{739773}{1146880} - \frac{205029}{655360} T_2(x) + \frac{114127}{2949120} T_4(x) - \\ &\quad - \frac{18943}{5898240} T_6(x) + \frac{293}{1474560} T_8(x) - \frac{61}{5898240} T_{10}(x)\end{aligned}$$

- $E_G^{10}(x)$, $E_G^{12}(x)$ i $E_G^{14}(x)$ - pogreška za Taylorove polinome $f_{10}(x)$, $f_{12}(x)$ i $f_{14}(x)$
- $\tilde{E}_G^{10}(x)$ - pogreška za ekonomiziranu aproksimaciju $\tilde{f}_{10}(x)$
- $E_{Ge}^{10}(x)$ - zanemariti




Ekonomizacija - polinomom stupnja 10 postižemo istu točnost kao polinomom stupnja 14

# Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

Za trigonometrijske funkcije, također, vrijede relacije diskretne ortogonalnosti, slično kao i za Čebiševljeve polinome $T_n$.

Na mreži od $N+1$ točaka $0, 1, \ldots, N$, uz oznaku

$$x_j = \frac{2\pi}{N+1} j, \qquad j = 0, \ldots, N,$$

vrijede sljedeće relacije diskretne ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} \sin kx_j \sin lx_j &= \begin{cases} 0, & k \neq l \text{ i } k = l = 0, \\ (N+1)/2, & k = l \neq 0, \end{cases} \\
\sum_{j=0}^{N} \sin kx_j \cos lx_j &= 0, \\
\sum_{j=0}^{N} \cos kx_j \cos lx_j &= \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ (N+1)/2, & k = l \neq 0, \\ N+1, & k = l = 0, \end{cases}
\end{aligned}
$$

uz uvjet da je $k + l \leq N$.

Dokaz ovih relacija ide još malo jednostavnije nego za Čebiševljeve polinome.

- Produkt trigonometrijskih funkcija treba pretvoriti u zbroj ili razliku.
- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume.