

Numerička analiza

19. predavanje

Autor: Saša Singer

Predavač: Nela Bosner

nela@math.hr

web.math.hr/~nela/nad.html

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Verižni razlomci i racionalna interpolacija:
 - Brojevni verižni razlomci.
 - Uzlazni algoritam za računanje verižnih razlomaka.
 - I i II tip verižnog razlomka.
 - Silazni algoritam za računanje verižnih razlomaka.
 - Funkcijski verižni razlomci — I i II tip.
 - Pretvaranje iz prvog u drugi tip.
 - Recipročne i inverzne razlike.
 - Thieleova racionalna interpolacija.
 - Primjeri racionalne interpolacije i ekstrapolacije.

Verižni razlomci

Racionalne aproksimacije i verižni razlomci

Već smo zaključili da **efektivno** možemo računati samo

- **racionalne aproksimacije** funkcija (4 osnovne aritmetičke operacije).

Za **praktičnu** primjenu racionalnih aproksimacija trebamo

- **dobre** algoritme za njihovo **izvrednjavanje**.

Pretpostavimo da je zadana **racionalna funkcija** oblika

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

gdje su P_n i Q_m polinomi stupnjeva n i m , respektivno,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad Q_m(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k.$$

Dvostruki Horner, ili — može li bolje?

Za **izvrednjavanje** racionalne funkcije možemo koristiti

- **dvije Hornerove sheme** — za **polinom** u brojniku i **polinom** u nazivniku,
- i **jedno** dijeljenje — na **kraju**.

Broj potrebnih operacija je

- $n + m$ množenja, $n + m$ zbrajanja i **jedno** dijeljenje.

Takvo **izvrednjavanje** racionalne funkcije **nije** idealno,

- jer se ono može izvršiti i s **manje** operacija.

No, puno veći praktični **problem** je

- **prikazivost** brojeva u **brojniku** i **nazivniku**.

Problem — dijeljenje velikih brojeva

Recimo, u točki x_0 , vrijednost racionalne funkcije $R(x_0)$ je

- neki broj **razumnog reda** veličine.

Može se dogoditi da je taj broj dobiven

- **dijeljenjem** dva **vrlo velika** broja, $P_n(x_0)$ i $Q_m(x_0)$,

- koja **nisu prikaziva** u aritmetici računala!

Tipičan primjer je **th** x — **ograničen** za $x \rightarrow \pm\infty$.

Uzrok toga je ponašanje **polinoma** za “**velike**” argumente:

- rezultat mora biti “**veliki**” broj.

Racionalne aproksimacije i verižni razlomci

U teoriji nepolinomnih, odnosno, racionalnih aproksimacija, može se pokazati da su (uz neke uvjete)

- najbolje racionalne aproksimacije = one kod kojih za stupnjeve n i m vrijedi: $n = m$ ili $n = m + 1$,
- tj. stupanj polinoma u brojniku je jednak ili za jedan veći od stupnja polinoma u nazivniku.

To su tzv. “stepenice” uz dijagonalu Padéove (n, m) tablice.

U tom slučaju, racionalnu aproksimaciju možemo napisati

- kao funkcijski verižni razlomak.

Brzina računanja i problem “overflowa” riješeni su

- načinom izvrednjavanja takvog verižnog razlomka.

No, prije funkcijskih, upoznajmo brojevne verižne razlomke.

Brojevni verižni razlomci

Izraz oblika

$$R = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \dots}}}}$$

zovemo **brojevni verižni razlomak**.

Ovdje su $b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ realni ili kompleksni brojevi.

Zbog štednje prostora, postoje “kraći”, alternativni zapisi.

Brojevni verižni razlomci — zapis

U literaturi nailazimo na tri oblika zapisa verižnih razlomaka:

$$R = \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots \right],$$

$$R = b_0 + \frac{a_1 |}{| b_1} + \frac{a_2 |}{| b_2} + \frac{a_3 |}{| b_3} + \dots ,$$

i možda najzgodniji zapis

$$R = b_0 + \frac{a_1}{b_1^+} \frac{a_2}{b_2^+} \frac{a_3}{b_3^+} \dots .$$

Katkad se piše i

$$R = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \dots .$$

Brojevi veržni razlomci — n -ta konvergencija

Ako u **beskonačnom** veržnom razlomku uzmemo samo **prvih konačno** mnogo članova, dobivamo broj

$$R_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1^+} \frac{a_2}{b_2^+} \frac{a_3}{b_3^+} \cdots \frac{a_n}{b_n^+}.$$

Takav izraz zove se n -ta **konvergencija** veržnog razlomka R .

Zapis ili “član”

$$\frac{a_k}{b_k^+}$$

zove se **karika** ili **veriga** veržnog razlomka.

Ideja: **sljedeća konvergencija** dobiva se

● **dodavanjem** nove **karike**, kao u lancu.

Vrijednost brojevnog verižnog razlomka

Ako postoji limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n,$$

onda se vrijednost verižnog razlomka R definira kao

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n.$$

Praktični problem: za zadani n , trebamo algoritam za brzo računanje vrijednosti

- samo n -te konvergencije R_n ,
- svih konvergencija do n -te, tj. vrijednosti R_0, \dots, R_n .

Prirodni put za obje stvari je

- uzlazno po indeksima — od R_0 , prema R_n .

Uzlazni algoritam — početak

Ideja: n -tu konvergenciju verižnog razlomka možemo prikazati u “racionalnom” obliku, kao kvocijent brojeva P_n i Q_n

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1^+} \frac{a_2}{b_2^+} \frac{a_3}{b_3^+} \cdots \frac{a_n}{b_n},$$

a zatim tražimo **rekurzije** za P_n i Q_n .

Za **nultu** konvergenciju R_0 , zapis je

$$R_0 = \frac{P_0}{Q_0} = b_0,$$

pa možemo **izabrati** da je $P_0 = b_0$, $Q_0 = 1$.

Mogli smo i **drugačije** birati — jedini uvjet je $P_0/Q_0 = b_0$.

Uzlazni algoritam — prva konvergencija

Za sljedeću konvergenciju R_1 vrijedi

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = \frac{b_1 P_0 + a_1 Q_0}{b_1 Q_0}.$$

Ako još **definiramo** $P_{-1} = Q_0$, $Q_{-1} = 0$, prethodna relacija glasi

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_1 P_0 + a_1 P_{-1}}{b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}}.$$

Ponovno možemo **zatražiti** da je brojnik **jednak** brojniku, a nazivnik nazivniku, tj. da je

$$P_1 = b_1 P_0 + a_1 P_{-1}, \quad Q_1 = b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}.$$

Te dvije relacije su **baza indukcije**.

Uzlazni algoritam — indukcija

Neka je $R_n = P_n/Q_n$, uz $n \geq 1$, i pretpostavimo da za P_n i Q_n vrijede relacije

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \quad Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}.$$

Pogledajmo što se događa pri prijelazu iz R_n u sljedeću konvergenciju R_{n+1} ,

$$R_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1^+} \cdots \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow R_{n+1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1^+} \cdots \frac{a_n}{b_n^+} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Vidmo da b_n prelazi u

$$b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Kad tu zamjenu napravimo u P_n i Q_n — dobivamo R_{n+1} .

Uzlazni algoritam — indukcija (nastavak)

Dakle, za R_{n+1} vrijedi

$$R_{n+1} = \frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}},$$

gdje je — **pretpostavka** indukcije i **zamjena** $b_n \rightarrow b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$,

$$P'_{n+1} = \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) P_{n-1} + a_n P_{n-2}$$

$$= (b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}) + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1} = P_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1},$$

$$Q'_{n+1} = \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}$$

$$= (b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}) + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1} = Q_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1}.$$

Uzlazni algoritam — indukcija (nastavak)

Ako definiramo

$$P_{n+1} = b_{n+1}P'_{n+1},$$

$$Q_{n+1} = b_{n+1}Q'_{n+1},$$

onda R_{n+1} ostaje **nepromijenjen** (brojnik i nazivnik su skalirani istim brojem b_{n+1}), a prethodna rekurzija postaje

$$P_{n+1} = b_{n+1}P_n + a_{n+1}P_{n-1},$$

$$Q_{n+1} = b_{n+1}Q_n + a_{n+1}Q_{n-1}.$$

Time smo dokazali **korak indukcije**.

Uzlazni algoritam — rekurzija

Drugim riječima, uz **start rekurzije** definiran relacijama

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad P_0 = b_0, \quad Q_0 = 1,$$

dobivamo tzv. **uzlazni algoritam** izvednjavanja **konvergencija** verižnog razlomka

$$\begin{aligned} P_k &= b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}, \\ Q_k &= b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}, \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

s tim da za **konvergencije** vrijedi $R_k = P_k/Q_k$, za $k = 0, \dots, n$.

Primijetite da se u ovakvom zapisu algoritma

- **lako** mogu **dodavati** novi a_k i b_k ,
- tj. nove **karike** u verižnom razlomku.

Uzlazni algoritam — ideje za ubrzanje

Iz rekurzije se lako čita da su P_k i Q_k dva rješenja iste diferencijske jednadžbe

$$y_k - b_k y_{k-1} - a_k y_{k-2} = 0,$$

samo s različitim početnim uvjetima.

Broj potrebnih operacija u uzlaznom algoritmu je

• 4 množenja i 2 zbrajanja za svaku konvergenciju.

U algoritmu izvrednjavanja bilo bi dobro da su,

• ili svi koeficijenti a_k , ili svi koeficijenti b_k jednaki 1, tako da ne moramo množiti tim koeficijentima. Ušteda je polovina svih množenja!

To se može postići tzv. ekvivalentnim transformacijama.

Ekvivalentne transformacije

Neka su w_k , za $k \geq 1$, proizvoljni brojevi različiti od 0 i neka je $w_{-1} = w_0 = 1$.

Tvrdnja. Verižni razlomak

$$R' = b_0 + \frac{w_0 w_1 a_1}{w_1 b_1^+} \frac{w_1 w_2 a_2}{w_2 b_2^+} \frac{w_2 w_3 a_3}{w_3 b_3^+} \dots$$

ima iste konvergencije kao i polazni verižni razlomak R , tj. vrijedi

$$R'_n = R_n, \quad \text{za svaki } n \geq 0.$$

Drugim riječima,

🔴 uzlazni algoritam daje isti niz rezultata na R i R' .

Ekvivalentne transformacije (nastavak)

Dokaz ide indukcijom,

• po **rekurzijama** iz **uzlaznog** algoritma za R i R' .

Neka su S_n i T_n , redom, brojnik i nazivnik n -te konvergencije R'_n iz **uzlaznog** algoritma za R' , a P_n i Q_n to isto za R .

Indukcijom se lako pokazuje da vrijedi

$$S_k = P_k \cdot \prod_{i=1}^k w_i, \quad T_k = Q_k \cdot \prod_{i=1}^k w_i, \quad k = 1, \dots, n.$$

No, onda je $R'_n = \frac{S_n}{T_n} = \frac{P_n}{Q_n} = R_n$, za svaki $n \geq 0$. ■

Sada možemo verižni razlomak R svesti na **ekvivalentnu** formu, tako da **ili** a_k , **ili** b_k budu **svi** jednaki 1.

Brojnici jednaki 1 — II tip verižnog razlomka

Verižni razlomak u kojem su **svi brojnici jednaki 1**

☛ zove se verižni razlomak **II tipa** (= dolje je “zanimljivo”).

Dobiva se na sljedeći način.

Pretpostavimo da je $a_k \neq 0$, za sve $k \geq 1$. Onda faktore w_k **možemo** izabrati tako da vrijedi

$$w_1 a_1 = 1, \quad w_1 w_2 a_2 = 1, \quad \dots, \quad w_{n-1} w_n a_n = 1, \quad \dots$$

Odatle odmah slijedi da je

$$w_{2k} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}, \quad w_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}{a_1 a_3 \cdots a_{2k+1}},$$

što se dokazuje indukcijom.

Uzlazni algoritam — II tip verižnog razlomka

Dobivamo verižni razlomak **II tipa**, oblika

$$R' = b_0 + \frac{1}{b'_1 +} \frac{1}{b'_2 +} \frac{1}{b'_3 +} \cdots ,$$

s tim da se lako nalaze formule za koeficijente b'_k .

Napomena. Ako je $a_{n+1} = 0$ i $a_k \neq 0$, za sve $k \leq n$, imamo **konačni** verižni razlomak, a postupak ide samo do a_n .

Pripadna **uzlazna** rekurzija za izvrednjavanje ima oblik

$$\begin{aligned} P_k &= b'_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= b'_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Nazivnici jednaki 1 — I tip verižnog razlomka

Verižni razlomak u kojem su **svi nazivnici jednaki 1**

☛ zove se verižni razlomak **I tipa** (= gore je “zanimljivo”).

Dobiva se na sljedeći način.

Ako su $b_k \neq 0$, za sve $k \geq 1$, onda faktore w_k **možemo** izabrati tako da vrijedi

$$w_1 b_1 = 1, \quad w_2 b_2 = 1, \quad \dots, \quad w_n b_n = 1, \dots$$

Očito, treba uzeti

$$w_k = \frac{1}{b_k}.$$

Uzlazni algoritam — I tip verižnog razlomka

Dobivamo verižni razlomak **I tipa**, oblika

$$R' = b_0 + \frac{a'_1}{1+} \frac{a'_2}{1+} \frac{a'_3}{1+} \cdots .$$

Za koeficijente a'_k vrijedi

$$a'_k = \frac{a_k}{b_{k-1}b_k}.$$

Pripadna **uzlazna** rekurzija za izvodnjavanje je

$$P_k = P_{k-1} + a'_k P_{k-2}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$$Q_k = Q_{k-1} + a'_k Q_{k-2},$$

Napomena. Ako se ovdje dogodi da je $b_{n+1} = 0$, onda treba “**skratiti**” karike, sve dok ne dobijemo nešto **različito** od **nule** (ili “skratiti do kraja”).

Eulerova forma verižnih razlomaka

Ako brojeve w_k izaberemo tako da je

- **zbroj** brojnika i nazivnika jednak **jedan** (osim kod prve karike),

tj. ako uzmemo

$$w_1 b_1 = 1, \quad w_{k-1} w_k a_k + w_k b_k = 1, \quad k = 2, 3, \dots,$$

onda se verižni razlomak svede na tzv. **Eulerovu formu**

$$R' = b_0 + \frac{\alpha_1}{1^+} \frac{\alpha_2}{(1 - \alpha_2)^+} \frac{\alpha_3}{(1 - \alpha_3)^+} \dots$$

Eulerova forma verižnog razlomka, uglavnom se koristi pri **dokazivanju tvrdnji**.

Silazni algoritam

Postoje razne **ocjene** i **teoremi** o tome

- koliko **dobro** n -ta konvergencija R_n aproksimira verižni razlomak R .

Zato često **unaprijed znamo**

- koliki n treba uzeti da bismo dobili željenu **točnost** u R_n .

Onda možemo krenuti “**silazno**” od b_n . **Definiramo** $F_n = b_n$ (ili, formalno, $F_{n+1} = \infty$), a zatim računamo

$$F_k = b_k + \frac{a_{k+1}}{F_{k+1}}, \quad k = (n), n - 1, \dots, 0.$$

Na kraju je, očito, $R_n = F_0$.

Silazni algoritam — brzina, optimalnost

Broj operacija u svakom **koraku silaznog** algoritma je

- točno **jedno** zbrajanje i **jedno** dijeljenje,

za razliku od **uzlaznog**, koji, u svakom **koraku**, treba

- **4** množenja i **2** zbrajanja (u općem slučaju).

Eventualno možemo proći sa samo **2** množenja.

Može se pokazati da je **silazna** rekurzija

- **optimalan** (najbolji) **algoritam** za **izvrednjavanje** verižnih razlomaka,

u pogledu **broja operacija**.

Silazni algoritam — komentari

U tom smislu, u usporedbi s polinomima,

- silazna rekurzija je analogon Hornerove sheme,
- a uzlazna je analogon potenciranja i zbrajanja.

U oba slučaja,

- u sporijem algoritmu lakše dodajemo nove “članove”.

Funkcijski verižni razlomci

Funkcijski verižni razlomci — oblici

Funkcijski verižni razlomci mogu se dobiti na više načina, i mogu imati više oblika.

Funkcijske verižne razlomke koji imaju varijablu samo u brojniku zvat ćemo verižni razlomci **I tipa**. Njihov opći oblik je

$$f(x) = \beta_0 + \frac{x - x_1}{\beta_1^+} \frac{x - x_2}{\beta_2^+} \frac{x - x_3}{\beta_3^+} \dots$$

Funkcijski verižni razlomci mogu imati varijablu samo u nazivniku. To su verižni razlomci **II tipa**. Njihov opći oblik je

$$f(x) = b_0 + \frac{a_1}{(x + b_1)^+} \frac{a_2}{(x + b_2)^+} \frac{a_3}{(x + b_3)^+} \dots$$

Funkcijski verižni razlomci — izvrednjavanje

Za izvrednjavanje n -te konvergencije $f_n(x)$ verižnih razlomaka **prvog** tipa, možemo koristiti **silazni** algoritam.

Stavimo $F_n = \beta_n$ (ili $F_{n+1} = \infty$), a zatim računamo

$$F_k = \beta_k + \frac{x - x_{k+1}}{F_{k+1}}, \quad k = (n), n - 1, \dots, 0,$$

i na kraju je

$$f_n(x) = F_0.$$

Kako do verižnih razlomaka?

Obično je nešto lakše doći do verižnih razlomaka tipa I, a zatim ih možemo pretvoriti u tip II. Uobičajeno se verižni razlomak nalazi **nestandardiziranim postupkom** kad se funkcija zapisuje “**pomoću same sebe**”.

Primjer. Razvijmo u verižni razlomak prvog tipa funkciju

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Prvo, potrebno je funkciju malo drugačije zapisati. Lako se provjerava da je

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}}.$$

Kako do verižnih razlomaka? (nastavak)

Ako ponovimo ovaj raspis u nazivniku razlomka, dobivamo verižni razlomak

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2^+} \frac{x}{2^+} \frac{x}{2^+} \cdots$$

Navedimo neke od poznatih verižnih razlomaka, bez njihova “izvoda”:

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{1}{1^-} \frac{x}{1^+} \frac{x}{2^-} \frac{x}{3^+} \frac{x}{2^-} \frac{x}{5^+} \frac{x}{2^-} \frac{x}{7^+} \cdots, \\ &= 1 + \frac{x}{1^-} \frac{x}{2^+} \frac{x}{3^-} \frac{x}{2^+} \frac{x}{5^-} \frac{x}{2^+} \frac{x}{7^-} \cdots, \end{aligned}$$

Neki verižni razlomci

$$\ln(x + 1) = \frac{x}{1^+} \frac{x}{2^+} \frac{x}{3^+} \frac{4x}{4^+} \frac{4x}{5^+} \frac{9x}{6^+} \frac{9x}{7^+} \frac{16x}{8^+} \frac{16x}{9^+} \cdots,$$

$$x \operatorname{tg} x = \frac{x^2}{1^-} \frac{x^2}{3^-} \frac{x^2}{5^-} \frac{x^2}{7^-} \cdots, \quad x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

$$x \operatorname{arctg} x = \frac{x^2}{1^+} \frac{x^2}{3^+} \frac{4x^2}{5^+} \frac{9x^2}{7^+} \frac{16x^2}{9^+} \cdots,$$

$$x \operatorname{th} x = \frac{x^2}{1^+} \frac{x^2}{3^+} \frac{x^2}{5^+} \frac{x^2}{7^+} \cdots$$

$$x \operatorname{Arth} x = \frac{x^2}{1^-} \frac{x^2}{3^-} \frac{4x^2}{5^-} \frac{9x^2}{7^-} \frac{16x^2}{9^-} \cdots.$$

Odnos prvi tip \leftrightarrow drugi tip

Svi ovi verižni razlomci su **prvog** tipa. Ima li koristi znati kako bi izgledao njihov **drugi** tip? Na primjer, šesta konvergencija verižnog razlomka za $\sqrt{1+x}$ bi izgledala ovako, redom, prvi tip, racionalna funkcija, drugi tip:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2^+} \frac{x}{2^+} \frac{x}{2^+} \frac{x}{2^+} \frac{x}{2^+} \frac{x}{2} = \frac{7x^3 + 56x^2 + 112x + 64}{x^3 + 24x^2 + 80x + 64} \\ &= 7 + \frac{-112}{(x+20)^+} \frac{-24/7}{(x+8/3)^+} \frac{-8/63}{(x+4/3)^+}.\end{aligned}$$

Drugi tip ima kompliciranije koeficijente, ali ima **upola manje** karika za izvrednjavanje, pa će to **dva** puta **ubrzati** postupak izvrednjavanja.

Postupak pretvaranje se obavlja u dva koraka.

Prvi tip \implies drugi tip

U prvom se koraku od verižnog razlomka prvog tipa dobiva racionalna funkcija.

Za silazni algoritam za izvrednjavanje verižnog razlomka prvog tipa, F_k pišemo kao kvocijent dva polinoma:

$$F_k = \frac{u_k}{v_k}.$$

Tada silazna rekurzija glasi

$$\frac{u_k}{v_k} = \beta_k + \frac{(x - x_{k+1})v_{k+1}}{u_{k+1}}.$$

Kao što smo to i prije radili, izjednačimo brojnike i nazivnike funkcija s obje strane.

Prvi tip \implies drugi tip (nastavak)

Dobivamo

$$u_k = \beta_k u_{k+1} + (x - x_{k+1})v_{k+1},$$

$$v_k = u_{k+1}.$$

Naravno, v_k možemo eliminirati uvrštavanjem iz druge jednadžbe u prvu, pa dobivamo

$$u_k = \beta_k u_{k+1} + (x - x_{k+1})u_{k+2}, \quad k = n, n-1, \dots, 0,$$

uz start $u_{n+2} = 0$, $u_{n+1} = 1$. Konačno, n -ta je konvergencija jednaka

$$f_n(x) = F_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{u_0}{u_1},$$

gdje su u_0 i u_1 neki **polinomi** istog stupnja (onda n mora biti **paran**).

Prvi tip \implies drugi tip (nastavak)

Da bismo iz **racionalne** funkcije dobili **drugi** tip verižnog razlomka, potrebno je koristiti silaznu rekurziju za drugi tip i uspoređivati s u_0/u_1 .

Iz silazne rekurzije za drugi tip izlazi

$$\frac{u_0}{u_1} = \tilde{b}_0 + \frac{a_1}{x + F_1},$$

pa možemo pisati $u_0 = u_1 \tilde{b}_0 + a_1 \tilde{R}_1$, gdje je \tilde{R}_1 **monični** polinom (**vodeći** koeficijent je jednak **1**) stupnja za **1** manjeg od stupnja polinoma u_0 i u_1 . Time su koeficijenti \tilde{b}_0 i a_1 **jednoznačno** određeni.

Zatim ponovimo postupak:

$$\frac{u_1}{u_2} = x + b_1 + \frac{a_2}{x + F_2}.$$

Prvi tip \implies drugi tip (nastavak)

Zatim primijetimo da vrijedi

$$\frac{u_0}{u_1} = \tilde{b}_0 + \frac{a_1}{x + b_1 + \frac{a_2}{x + F_2}} = \tilde{b}_0 + \frac{a_1 u_2}{u_1},$$

odakle zaključujemo da je

$$u_2 = \tilde{R}_1.$$

Na kraju dobivamo

$$u_1 = \tilde{R}_1(x + b_1) + a_2 \tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 \tilde{b}_1 + a_2 \tilde{R}_2,$$

gdje je \tilde{R}_2 opet **monični** polinom stupnja za 1 manjeg od stupnja polinoma \tilde{R}_1 . Odavde nalazimo b_1 i a_2 .

Prvi tip \implies drugi tip (nastavak)

Ova rekurzija smanjuje stupanj polinoma i prekida se kad dobijemo polinom stupnja 0.

Algoritam za pretvaranje racionalne funkcije u drugi tip verižnog razlomka je sljedeći.

Definira se $\tilde{R}_{-1} = u_0$ i $\tilde{R}_0 = u_1$. Zatim se vrti petlja

$$\tilde{R}_{k-1} = \tilde{R}_k \tilde{b}_k + a_{k+1} \tilde{R}_{k+1} \quad \text{za } k = 0, 1, 2, \dots,$$

gdje je su $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \dots$ monični polinomi, sve dok za neki $k = \ell$ ne postane $\tilde{R}_{\ell+1} = 1$. Pritom je

$$\tilde{b}_k = \begin{cases} b_0, & k = 0, \\ x + b_k, & k \neq 0. \end{cases}$$

Thieleova racionalna interpolacija

Interpolacija racionalnim funkcijama

Racionalne funkcije:

- bolje aproksimiraju funkcije koje imaju **singularitete**, nego što to mogu polinomi;
- polinomi **ne mogu** dobro aproksimirati funkciju u okolini **točke prekida**, jer ih oni sami nemaju.

Prvo definiramo **recipročne razlike**, a zatim **verižni razlomak** koji će interpolirati funkciju f u točkama x_1, \dots, x_n (ovdje su indeksi od 1, a ne od 0).

Recipročne razlike **nultog** i **prvog** reda definiraju se, redom, kao

$$\rho_0(x_0) = f(x_0), \quad \rho_1(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)},$$

Recipročne razlike

... a one **viših** redova rekurzivno — kao

$$\rho_k(x_0, \dots, x_k) = \frac{x_0 - x_k}{\rho_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-1}) - \rho_{k-1}(x_1, \dots, x_k)} + \rho_{k-2}(x_1, \dots, x_{k-1}), \quad k \geq 2.$$

Za računanje recipročnih razlika koristi se **tablica** vrlo slična onoj za **podijeljene razlike**.

Algoritam koji koristi **recipročne razlike** numerirat će točke indeksima od **1** do **n** (zbog toga u tablici nema **x_0**).

Recipročne razlike (nastavak)

x_k	$f(x_k)$	$\rho_1(x_k, x_{k+1})$	$\rho_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$	\cdots	$\rho_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$
x_1	$f(x_1)$	$\rho_1(x_1, x_2)$			
x_2	$f(x_2)$	$\rho_1(x_2, x_3)$	$\rho_2(x_1, x_2, x_3)$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$\rho_1(x_{n-2}, x_{n-1})$	$\rho_2(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$	\ddots	$\rho_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$
x_n	$f(x_n)$	$\rho_1(x_{n-1}, x_n)$			

Inverzne razlike

Uz recipročne razlike, često se definiraju i **inverzne razlike**

$$\phi_0(x_0) = f(x_0), \quad \phi_1(x_0, x_1) = \frac{x_1 - x_0}{\phi_0(x_1) - \phi_0(x_0)},$$

odnosno

$$\phi_k(x_0, \dots, x_k)$$

$$= \frac{x_k - x_{k-1}}{\phi_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-2}, x_k) - \phi_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1})},$$

$$k \geq 2.$$

Veza recipročnih i inverznih razlika

Postoji i veza između inverznih i recipročnih razlika. Vrijedi

$$\phi_0(x_0) = \rho_0(x_0), \quad \phi_1(x_0, x_1) = \rho_1(x_0, x_1),$$

odnosno, za $k \geq 2$

$$\phi_k(x_0, \dots, x_k) = \rho_k(x_0, \dots, x_k) - \rho_{k-2}(x_0, \dots, x_{k-2}).$$

U formuli za **recipročne razlike** točku x_0 smatramo varijablom i označimo je s x . **Thieleovu formulu** izvest ćemo iz **identiteta**:

$$f(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\phi_1(x_1, x_2)^+} \cdots \frac{x - x_{n-1}}{\phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)^+} \frac{x - x_n}{\rho_n(x, x_1, \dots, x_n) - \rho_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-1})}.$$

Thielova formula

Pokažimo da vrijedi prethodni identitet. Iz

$$\rho_1(x, x_1) = \frac{x - x_1}{f(x) - f(x_1)}$$

slijedi da je

$$f(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\rho_1(x, x_1)}.$$

Zatim, iz formule

$$\rho_2(x, x_1, x_2) = \frac{x - x_2}{\rho_1(x, x_1) - \rho_1(x_1, x_2)} + \rho_0(x_1)$$

Thielova formula (nastavak)

... slijedi da je

$$\rho_1(x, x_1) = \rho_1(x_1, x_2) + \frac{x - x_2}{\rho_2(x, x_1, x_2) - \rho_0(x_1)}.$$

Uvrštavanjem tog izraza u formulu za $f(x)$, dobivamo

$$f(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\rho_1(x_1, x_2) + \frac{x - x_2}{\rho_2(x, x_1, x_2) - \rho_0(x_1)}}.$$

Konačno, željeni **identitet** dobivamo indukcijom po n , uz korištenje definicije **inverznih razlika**.

Thielova formula (nastavak)

Ako izbrišemo zadnji član u identitetu, dobivamo Thielovu interpolacijsku formulu

$$R(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\phi_1(x_1, x_2)} \cdots \frac{x - x_{n-1}}{\phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)}.$$

Pokažimo da se zaista radi o interpolaciji, tj. da je

$$R(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

što se odmah vidi iz identiteta, počevši od x_n , jer je

$$\frac{x - x_n}{\rho_n(x, x_1, \dots, x_n) - \rho_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-1})}$$

jednak 0 za $x = x_n$, pa je $R(x_n) = f(x_n)$.

Thielova formula (nastavak)

Nakon toga, gledamo $R(x_{n-1})$ i $f(x_{n-1})$.

- Oni su za jednu verigu kraći i to za onu verigu koja sadrži “član razlike”.
- U svakoj daljnjoj točki x_{n-2}, \dots, x_1 , verižni je razlomak kraći za jednu verigu od prethodne.

Primjer.

Aproksimirajmo $\text{tg } 1.565$ korištenjem Thieleove interpolacijske formule, ako znamo vrijednosti funkcije tg u točkama

$$x_i = 1.53 + 0.01 * i, \quad i = 0, \dots, 4.$$

Primjer tg

Prvo izračunajmo recipročne razlike.

x_k	$f(x_k)$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
1.53	24.49841				
		0.001255851			
1.54	32.46114		-0.0308670		
		0.000640314		2.96838	
1.55	48.07848		-0.0207583		3.56026
		0.000224507		2.97955	
1.56	92.62050		-0.0106889		
		0.000008597			
1.57	1255.76557				

Primjer tg (nastavak)

Thielova interpolacija daje

$$R(x) = 24.49841 + \frac{x - 1.53}{0.001255851} + \frac{x - 1.54}{-24.5293} + \frac{x - 1.55}{2.96713} + \frac{x - 1.56}{3.59113}.$$

Uvrštavanjem 1.565 dobivamo

$$R(1.565) = 172.5208,$$

dok je prava vrijednost

$$\text{tg}(1.565) = 172.5211.$$

Ubrzavanje sumacije redova

I sumacija redova može se znatno ubrzati korištenjem **racionalne ekstrapolacije**. Ako treba izračunati

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

označimo s S_N , N -tu parcijalnu sumu reda

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n.$$

Vrijednosti S_N možemo interpretirati kao vrijednosti neke funkcije f u točkama N, \dots

Ubrzavanje sumacije redova (nastavak)

... ili u nekim drugim točkama, na primjer, u točkama $1/N$,

$$S_N = f\left(\frac{1}{N}\right).$$

Očito je da vrijedi

$$S = S_\infty = f(0).$$

Ideja je $f(0)$ izračunati kao **ekstrapoliranu** vrijednost od

$$f\left(\frac{1}{N_1}\right), f\left(\frac{1}{N_2}\right), \dots, \quad N_1 < N_2 < \dots .$$

N_i -ovi, na primjer, mogu biti, redom, **prirodni** brojevi.

Primjer sumacije redova

Primjer. Treba izračunati

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

korištenjem racionalne ekstrapolacije.

Uzet ćemo $N = 1, 2, 4, 8, 16$ i izračunati **parcijalne sume**

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

Shvatimo li to kao **funkciju** od $x = 1/N$ i označimo $S(x) = S_N$, onda možemo formirati tablicu recipročnih razlika.

Primjer sumacije redova (nastavak)

x	$S(x)$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
$\frac{1}{16}$	1.584346533				
		-1.097945891			
$\frac{1}{8}$	1.527422052		-0.238678243		
		-1.204112002		4.826059143	
$\frac{1}{4}$	1.423611111		-0.166126405		0.016938420
		-1.44		9.947195880	
$\frac{1}{2}$	1.25		-0.089285214		
		-2			
1	1				

Primjer sumacije redova (nastavak)

Thielova interpolacija daje

$$R(x) = 1.584346533 + \frac{x - \frac{1}{16}}{-1.097945891} + \frac{x - \frac{1}{8}}{-1.823024776} + \frac{x - \frac{1}{4}}{5.924005034} + \frac{x - \frac{1}{2}}{0.255616663}.$$

Uvrštavanjem 0 dobivamo

$$R(0) = 1.644927974,$$

dok je prava vrijednost

$$S_{\infty} = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934067.$$

Primjer sumacije redova (nastavak)

Zanimljivo je spomenuti što se dobije ako samo **zbrajamo** članove reda i **ne ekstrapoliramo**. Vidjet ćemo da taj red vrlo **sporo** konvergira. Na primjer, dobivamo

$$S_{3000} = 1.644601,$$

$$S_{10000} = 1.644834,$$

$$S_{30000} = 1.644901,$$

$$S_{100000} = 1.644924.$$