Sadržaj predavanja

- Aproksimacija i interpolacija:
  - Uvod u polinomnu spline interpolaciju.
  - Linearni spline i ocjena greške.
  - Linearni splajn i ocjena greške (ponavljanje).
  - Po dijelovima kubična interpolacija — uvod.
  - Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija.
  - Ocjene pogreške za kubičnu Hermiteovu interpolaciju.
  - Aproksimacije derivacija i numeričko deriviranje.
  - Po dijelovima kubična kvazihermiteova interpolacija.
  - Kubični splajn i neprekidnost druge derivacije.
  - Razne vrste rubnih uvjeta.
  - Ocjene pogreške za kubični splajn.

Sadržaj predavanja

- Polinomna splajn interpolacija
  - B-splajn.
  - Interpolacija splajnom.
  - Primjeri interpolacije B-splajnom.
- Aproksimacije derivacija i numeričko deriviranje.

Po djelovima polinomna interpolacija

Polinomna interpolacija visokog stupnja

- može imati vrlo loša svojstva,
- u praksi se ne smije koristiti.

Umjesto toga, koristi se

- po djelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu koristi se polinom fiksnog, niskog stupnja.
- Funkcija je jednostavnija te daje daje
  - dobru aproksimaciju, a
  - točnost se ne povečava povečavanjem stupnja polinoma već povečavanjem broja podintervala

Splajn

Zadana particija intervala $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Po dijelovima polinomijalana funkcija:

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} \quad \text{je polinom}$$

Splajn stupnja k (reda $k+1$):

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} \quad \text{je polinom } k\text{-tog stupnja}$$

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} = a_{i,0} + a_{i,1}x + a_{i,2}x^2 + \ldots + a_{i,k}x^k$$

$$i = 0, \ldots, n-1$$

Problem interpolacije

Za dane

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

i

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$$

odrediti splajn s koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Egzistencija:

Jedinstvenost:

Linearni splajn

Po dijelovima linearna funkcija:

$$s(x) = a_{i,0} + a_{i,1}x \quad \text{za} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Interpolacijski uvjeti $\Rightarrow$

$$s(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \quad \text{za} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

ili

$$s(x) = y_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{za} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

s je neprekidan:

$$s(x_i-) = s(x_i) = s(x_i+)$$

Interpolacijska greška za linearni splajn

Ako je funkcija f klase $C^2[a,b]$, onda je pogreška takve interpolacije zapravo

- maksimalna pogreška od n linearnih interpolacija.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ pogreška je

- greška linearne interpolacije

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_2^k}{2!} |\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k), \quad M_2^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|.$$

$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k)$ je parabola i ekstrem može imati samo

- na rubu intervala: greška je 0
- u sredini intervala $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$:

$$\omega(x_e) = -\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}.$$

Neka je h maksimalni razmak čvorova po svim podintervalima

$$h := \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k := x_k - x_{k-1}\},$$

i neka je M_2 maksimum apsolutne vrijednosti f'' na cijelom intervalu $[a, b]$

$$M_2 := \max_{1 \leq k \leq n} M_2^k = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Na cijelom intervalu $[a, b]$, onda možemo pisati

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{M_2}{2!} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{1}{8} M_2 \cdot h^2.$$

Zaključak. Ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da maksimalni razmak čvorova $h \to 0$,

- onda i maksimalna greška teži u 0, tj.
- dobivamo uniformnu konvergenciju!

Na primjer, za ekvidistantne mreže, za koje je

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b - a}{n},$$

pogreška je reda veličine h^2, odnosno n^{-2}.

Interpolacija u unutarnjim točkama

Umjesto interpolacije u čvorovima x_i, mogli smo postaviti interpolacijske uvjete u unutarnjim točkama:

$$s(t_{k,1}) = y_{k,1} = f(t_{k,1}), \quad s(t_{k,2}) = y_{k,1} = f(t_{k,2}), \quad \text{za} \quad t_{k,1}, t_{k,2} \in (x_{k-1}, x_k$$

Interpolacijski uvjeti $\Rightarrow$

$$s(x) = y_{k,1} + \frac{y_{k,2} - y_{k,1}}{t_{k,2} - t_{k,1}}(x - t_{k,1}) \quad \text{za} \quad x \in [x_{k-1}, x_k)$$

s nije neprekidan:

$$\begin{aligned} s(x_k-) &= y_{k,1} + \frac{y_{k,2} - y_{k,1}}{t_{k,2} - t_{k,1}}(x_k - t_{k,1}) \\ &\neq y_{k+1,1} + \frac{y_{k+1,2} - y_{k+1,1}}{t_{k+1,2} - t_{k+1,1}}(x_k - t_{k+1,1}) = s(x_k+) \end{aligned}$$

Napomena. Radi jednoznačnosti, u slučaju prekida u čvorovima, obično se splajn definira da je neprekidan sdesna.

Izračunajmo interpolacijsku grešku ako interpolacijske točke dijele segment $[x_{k-1}, x_k]$ u omjeru $1 : 2 : 1$.

Kao i prije, funkcija $\omega(x) = (x - t_{k,1})(x - t_{k,1})$ ekstrem može imati samo u rubovima i sredini intervala.

Jer je $t_{k,1} = x_{k-1} + \frac{1}{4} h_k$ i $t_{k,2} = x_{k-1} + \frac{3}{4} h_k$, najveća apsolutna vrijednost je u rubovima

$$\omega(x_{k-1}) = \omega(x_k) = \frac{3}{16} h_k^2.$$

Ocjena greške je

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{M_2}{2!} \cdot \frac{3}{16} h^2 = \frac{3}{32} M_2 \cdot h^2.$$

Usporedimo pogreške u ova dva pristupa:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - s(x)| &\leq \frac{1}{8} M_2 \cdot h^2 \quad \text{interpolacija u čvorovima (n točaka)} \\
|f(x) - s(x)| &\leq \frac{3}{32} M_2 \cdot h^2 \quad \text{interpolacija u dvije unutarnje toke ($2n$ toča}
\end{aligned}
$$

Duplo više podataka a pogreška se smanjila za četvrtinu.

Da smo u $2n$ točaka koristili interpolaciju u čvorovima, greška bi bila

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{32} M_2 \cdot h^2.$$

Umjesto h koristimo $h/2$ u ocjeni greške.

Bolje je koristiti neprekidni splajn!

Kvadratični splajn

$$s(x) = a_{k,0} + a_{k,1}x + a_{k,2}x^2 \quad \text{za} \quad x \in [x_{k-1}, x_k]$$

- Na svakom intervalu 3 koeficijenta $\times$ n intervala $=$ 3n koeficijenata

  Splajn (polinom 2. stupnja) je jednoznačno određen na svakom intervalu.

  Ovakav splajn ne treba biti neprekidan.

- Ako su čvorovi točke interpolacije (plus jedna točka iz unutrašnjosti intervala)

  Splajn će biti neprekidan ($s(x_k-) = f(x_k)$ i $s(x_k+) = f(x_k)$)

Što ako želimo interpolaciju samo u čvorovima (x_k)?

- Interpolacijski uvjeti: 2 na svakom intervalu $\Rightarrow$ $2n$ uvjeta.

  $\Rightarrow$ koeficijenti nisu jednoznačno određeni

- s neprekidan ($\in C^0$) - zadovoljeno zbog interpolacijskih uvjeta u čvorovima
- Dodatni uvjet na glatkoću:

  $s \in C^1(a, b)$ - dodatnih $n-1$ uvjeta (u unutarnjim čvorovima $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$)

- Ukupno $3n$ koeficijenata i $3n-1$ uvjeta (jednadžbi)
- Dodatni interpolacijski uvjet $s'(a) = d_0$.

Kvadratični splajn klase $C^1(a, b)$ je jednoznačno određen interpolacijskim uvjetima:

- Na intervalu $[x_0, x_1]$ uvjeti:

$$s(x_0) = y_0, \quad s(x_1) = y_1, , \quad s'(x_0) = d_0$$

  jednoznačno određuju polinom 2. stupnja.

- Na intervalu $[x_1, x_2]$ uvjeti:

$$s(x_1) = y_1, \quad s(x_2) = y_2, , \quad s'(x_1) = s'(x_1-)$$

  jednoznačno određuju polinom 2. stupnja.

- $\ldots$

Greška interpolacije za kvadratični splajn

- Kod interpolacije u 3 unutarnje točke na svakom podintervalu primjenom formule za interpolacijsku pogrešku polinomom 2. stupnja lagano dobijemo da je

$$|f(x) - s(x)| \leq C \max_{x \in [a,b]} |f'''(x)| \cdot h^3$$

  ako je funkcija koju interpoliramo klase $C^3(a, b)$

- Kod interpolacije samo u čvorovima (splajnom klase C^1) pogreška je istog oblika! (Samo je konstanta C različita.)
- Interpolacija u $n + 1$ točki daje u biti istu točnost kao interpolacija u $2n$ i $3n$ točaka!

- Uočimo, zahtjev da je kvadratični splajn $s \in C^1(a, b)$ znači:

  - neprekidnost u unutarnjim čvorovima - $n - 1$ uvjet

  - neprekidnost derivacije u unutarnjim čvorovima - $n - 1$ uvjet

- Ukupno $2n - 2$ uvjeta

- Preostalih $n + 2$ uvjeta može se zadati na različite načine, zavisno o primjeni:

  - Interpolacija - interpolacija u $n + 1$ čvoru
  + interpolacija derivacije u x_0

  - Metoda najmanjih kvadrata

  - Zadovoljavanje diferencijalne jednadžbe u čvorovima
  + početni uvjet

- ...

Digresija.

- Što je kvadratični splajn klase C^2

  - neprekidnost u unutarnjim čvorovima - $n-1$ uvjet

  - neprekidnost derivacije u unutarnjim čvorovima - $n-1$ uvjet

  - neprekidnost druge derivacije u unutarnjim čvorovima - $n-1$ uvjet

- Ukupno $3n-3$ uvjeta
- Preostalo 3 uvjeta
- Polinom 2. stupnja
- Polinomi su također splajnovi!

Splajn reda $m+1$ (stupnja m)

$$s(x) = a_{k,0} + a_{k,1}x + a_{k,2}x^2 + \ldots + a_{k,m}x^m \quad \text{za} \quad x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$m+1$ koeficijent $\times$ n intervala $= (m+1)n$ koeficijenata

Maksimalna glatkoća

- s neprekidan ($\in C^0$) - $(n-1)$ uvjet
- $s \in C^{m-1}(a,b)$ - dodatnih $(m-1)(n-1)$ uvjeta
- Ukupno $(m+1)n$ koeficijenata i $m(n-1)$ uvjeta (jednadžbi)
- Možemo postaviti dodatnih $n+m$ uvjeta

Interpolacijski uvjeti

Npr. $n+m$ uvjeta možemo dobiti:

- Interpolacija u čvorovima - $n+1$ uvjet
- Preostalo $m-1$ uvjeta
- $m-1$ interpolacijski uvjet na derivacije (1., 2., ... reda) u rubovima intervala $[a,b]$ (u čvorovima x_0 i x_n)
- Zgodno je da u oba ruba budu uvjeti na iste derivacije
  $\Rightarrow \quad m-1$ je paran $\quad \Rightarrow \quad m = 1, 3, 5, \ldots$

Ovo još ne znači da iz ovih uvjeta možemo jedinstveno odrediti splajn reda $m+1$

Kubični splajn ($m = 3$) i interpolacija

Kubični splajn - po dijelovima kubična funkcija (na segmentima $[x_i, x_{i+1}]$)

Uvjet da je splajn s klase C^2 daje $3n - 3$ uvjeta.
Interpolacija: $n + 1$ uvjeta
Dodatna 2 uvjeta:

- Potpuni splajn: $s'(x_0) = \alpha,\ s'(x_n) = \beta$.
- Druga derivacija u rubovima: $s''(x_0) = \alpha,\ s''(x_n) = \beta$.
- Prirodni splajn(slobodni krajevi): $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.
- Periodički splajn: $s'(x_0) = s'(x_n),\ \ s''(x_0) = s''(x_n)$.
- 'Not-a-knot' uvjet: $s'''(x_1-) = s'''(x_1+)$, $s'''(x_{n-1}-) = s'''(x_{n-1})+$.

Metoda najmanjih kvadrata i splajnovi

Π - Zadana subdivizija segmenta $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

$\mathcal{S}_m(\Pi)$ - prostor svih splajnova reda $m+1$ i klase C^{m-1} na zadanoj subdiviziji Π

u, v - splajnovi, $u, v \in \mathcal{S}_m(\Pi)$

Da li je i $u + v \in \mathcal{S}_m(\Pi)$?

u, v polinomi stupnja m na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$
$\Rightarrow \quad u + v$ polinom stupnja m na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$

$u, v \in C^{m-1}(a, b) \quad \Rightarrow \quad u + v \in C^{m-1}(a, b)$

Da li je za $\alpha \in \mathbf{R}$ i $\alpha u \in \mathcal{S}_m(\Pi)$?

u polinom stupnja m na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$
$\Rightarrow \quad \alpha u$ polinom stupnja m na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$

$u \in C^{m-1}(a, b) \quad \Rightarrow \quad \alpha u \in C^{m-1}(a, b)$

$\mathcal{S}_m(\Pi)$ je **vektorski prostor**

Kolika je dimenzija prostora $\mathcal{S}_m(\Pi)$?
Kako izgleda baza prostora $\mathcal{S}_m(\Pi)$?

Zašto je baza prostora splajnova važna?

Problem interpolacije:

- $s \in \mathcal{S}_m(\Pi)$
- s po djelovima polinom stupnja m
  $\Rightarrow \quad (m+1) \cdot n$ nepoznatih koeficijenata
- $s \in C^{m-1} \quad \Rightarrow m \cdot (n-1)$ uvjeta
- interpolacija funkcije u čvorovima $\quad \Rightarrow n+1$ uvjet
- interpolacija derivacija funkcije u rubovima $\quad \Rightarrow m-1$ uvjet
- $n \cdot (m+1)$ uvjet (jednadžba) i $n \cdot (m+1)$ koeficijent (nepoznanica)
- rješavamo kvadratni (regularni?) sustav jednadžbi (LR, QR, ...)

(Diskretna) metoda najmanjih kvadrata:

- $s \in \mathcal{S}_m(\Pi)$
- s po djelovima polinom stupnja m
  $\Rightarrow \quad (m + 1) \cdot n$ nepoznatih koeficijenata
- $s \in C^{m-1} \quad \Rightarrow m \cdot (n - 1)$ uvjeta
- Preostalih $n + m$ uvjeta odredimo metodom najmanjih kvadrata

(Diskretna) metoda najmanjih kvadrata:

- Neka su zadani parovi (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$, $N > n + m$.
- Odredite $\bar{s} \in \mathcal{S}_m(\Pi)$ za koji je suma
$$\sum_{i=1}^{N} (s(t_i) - y_i)^2$$
minimalna.
- Minimizacija po $s \in \mathcal{S}_m(\Pi)$ je minimizacija po $(m + 1) \cdot n$ koeficijentu uz zadovoljavanje $m \cdot (n - 1)$ uvjeta (neprekidnosti).
- Ovo je tzv. problem minimizacije s ograničenjima. Složeni problem.
- Ako je $\mathcal{S}_m(\Pi)$ vektorski prostor i ako znamo bazu
  $\rightarrow$ linearna metoda najmanjih kvadrata (QR, SVD, ...)

Zašto je baza prostora splajnova važna?

Reprezentacija splajna (kada su koeficijenti poznati)

- $s \in \mathcal{S}_m(\Pi)$
- Π - pamtimo $n+1$ čvor x_k
- s po djelovima polinom stupnja m
  $\Rightarrow$ pamtimo $(m+1) \cdot n$ koeficijenata
- Ukupno pamtimo $n \cdot m + 2n + 1$ podatak
- Ako koristimo prikaz u bazi za $\mathcal{S}_m(\Pi)$
- Π - pamtimo $n+1$ čvor x_k
- Trebamo pamtiti $n+m$ koeficijenata (dimenzija vektorskog prostora) $\mathcal{S}_m(\Pi)$
- Ukupno pamtimo $2n + m + 1$ podatak

Baza prostora kubičnih splajnova

Napomena. Ovdje ćemo koristiti činjenicu da je kubični splajn jednoznačno zadan s $n+1$ interpolacijskih uvjeta (u $x_0, \ldots, x_n$) i 2 uvjeta za interpolaciju derivacije u rubovima.
Ovo će biti dokazano kasnije!

$\Rightarrow$ dimenzija je $n+3$?

Za $i = 0, \ldots, n$ definiramo splajn S_i iz uvjeta:

$$\begin{aligned} B_i(x_i) &= 1, \\ B_i(x_j) &= 0, \quad \text{za } j \neq i, \\ B_i'(a) &= 0, \\ B_i'(b) &= 0, \end{aligned}$$

te D_0 i D_1:

$$\begin{aligned}
D_0(x_j) &= 0, \quad \text{za } j = 0, \ldots, n, \\
D_0'(a) &= 1, \\
D_0''(b) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1(x_j) &= 0, \quad \text{za } j = 0, \ldots, n, \\
D_1'(a) &= 0, \\
D_1''(b) &= 1.
\end{aligned}$$

Pokazat ćemo da iz jedinstvenosti interpolacijskog splajna slijedi da su $S_0, \ldots, S_n, D_0, D_1$ linearno nezavisni i da čine bazu $\mathcal{S}_3(\Pi)$.

Neka je $s \in \mathcal{S}_3(\Pi)$, tada splajn

$$\sum_i s(x_i)S_i + s'(a)D_0 + s'(b)D_1$$

interpolira splajn s. Jer i s interpolira samog sebe, zbog jedinstvenosti interpolacijskog splajna je

$$s \equiv \sum_i s(x_i)S_i + s'(a)D_0 + s'(b)D_1$$

$\Rightarrow$ skup izvodnica

$$0 \equiv \sum_i \alpha_i S_i + \beta_0 D_0 + \beta_1 D_1 = s$$

Uvrstimo x_i, $i = 1, \ldots, n$:

$$0 = s(x_i) = \alpha_i.$$

U rubovima je

$$0 = s'(a) = \beta_0, \quad \text{i} \quad 0 = s'(b) = \beta_1$$

$\rightarrow$ nezavisnost

$\{S_0, \ldots, S_n, D_0, D_1\}$ je baza prostora $\mathcal{S}_3(\Pi)$. $\square$

Ova baza je nepraktična i ne koristi se.

B-splajnovi

Odredimo najmanji mogući k takav da splajn $B_i \in \mathcal{S}_3(\Pi)$ zadovoljava:

$$\begin{aligned} B_i &\in C^2(a,b), \\ B_i(x) &= 0 \quad \text{za} \quad x \notin [x_i, x_{i+k}] \\ B_i &\not\equiv 0. \end{aligned}$$

Rješenje.

k-intervala $\quad \to \quad 4 \cdot k$ koeficijenata

$B_i \in C^2(a,b) \quad \to \quad 3 \cdot (k+1)$ uvjeta (u $x_i, \ldots, x_{i+k}$)

$4 \cdot k - 3 \cdot (k+1) = k - 3$

$B_i \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad k - 3 > 0$

Najmanji k: $\quad k = 4$

B-splajn - splajn s minimalnim kompaktnim nosačem:

$$\begin{aligned} B_i &\in C^2(a,b), \\ B_i(x) &= 0 \quad \text{za} \quad x \notin [x_i, x_{i+4}] \\ B_i &\neq 0. \end{aligned}$$

Naziv (engl.): B(asis) spline.
Subdiviziju Π segmenta $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

proširimo s proizvoljnim točkama

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < a \quad \text{i} \quad b < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+2}.$$

Za novu subdiviziju

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+2}$$

promatramo B-splajnove

$$B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$$

To su svi netrivijalni B-splajnovi na (a, b).
Čine bazu prostora $\mathcal{S}_3(\Pi)$

B-splajnovi nisu jedinstveno određeni: ako je B_i B-splajn onda je i αB_i B-splajn (za $\alpha \neq 0$).

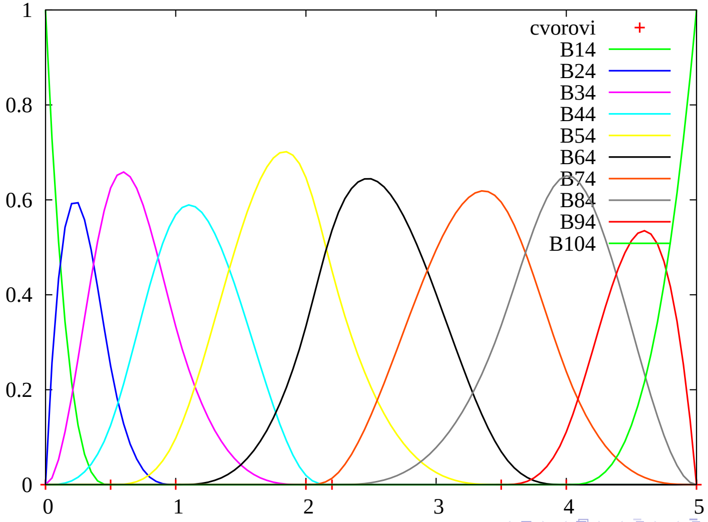
Normiranje:

$$\sum_i B_i(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

-particija jedinice

B-splajn je različit od 0 na (x_i, x_{i+4})
Ako je $B_i(x) = 0$ za $x \in (x_i, x_{i+4})$ onda $B_i \equiv 0$.

B-splajnovi reda 4



Što je splajn?

- Po dijelovima polinomijalna funkcija?
- U principu da, ali uz njega obično vežemo neka dodatna svojstva. Glatkoću, npr.
- Većina splajn poistovjećuje s kubičnim splajnom maksimalne glatkoće (klase C^2)
- Možemo reći da je to kombinacija B-splajnova.
- Glatkoća ne mora biti maksimalna. Može varirati od čvor do čvora.
- Može se gledati i generalniji pristup. Po dijelovima eksponencijalna funkcija, p.d. racionalna funkcija, ...

B-splajn

Po djelovima polinomna funkcija

Neka je dan strogo rastući niz točaka (čvorova) $\mathbf{X} := (x_i)_{i=0}^{\ell}$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell = b$$

i neka je $k \in \mathbb{N}$. Ako je $p_0, \ldots, p_{\ell-1}$ bilo koji niz od ℓ polinoma reda k (stupnja $k-1$), tada definiramo odgovarajuću po djelovima polinomnu (polinomnu splajn) funkciju f sa

$$f(x) := p_i(x) \text{ za } x \in [x_i, x_{i+1}\rangle, \; i = 0, \ldots, \ell - 1.$$

Dakle, po dogovoru

- f je neprekidna s desna,
- a obično se zadnji podinterval proširi i na x_ℓ, pa imamo

$$f(x) := p_{\ell-1}(x) \text{ za } x \in [x_{\ell-1}, x_\ell].$$

Prostor polinomnih splajnova

Prostor ovakvih funkcija označavamo sa $\mathcal{P}_{k,\mathbf{x}}$, on je linearan i dimenzija mu je $k \cdot \ell$.

Ipak se još traži i neka glatkoća splajna, i to tako da se definiraju uvjeti glatkoće u čvorovima:

$$f^{(j)}(x_i^+) = f^{(j)}(x_i^-) \text{ za } j = 0, \ldots, \nu_i - 1, \; i = 1, \ldots, \ell - 1.$$

ν_i zovemo broj uvjeta neprekidnosti u x_i i $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)_{i=1}^{\ell-1}$.

Prostor takvih splajnova označavamo sa $\mathcal{P}_{k,\mathbf{x},\boldsymbol{\nu}}$, a

$$\dim \mathcal{P}_{k,\mathbf{x},\boldsymbol{\nu}} = k \cdot \ell - \sum_{i=1}^{\ell-1} \nu_i, \quad \nu_i \leqslant k.$$

Postavlja se pitanje odabira dobre baze za taj prostor.

B-splajn

Definicija

Neka je $\mathbf{T} := (t_i)_{i=1}^{n+k}$ nepadajući niz čorova, tada i-ti (normalizirani) B-splajn reda k za niz čvorova $\mathbf{T}$ označavamo s $B_{i,k,\mathbf{T}}$ i definiramo sa

$$B_{i,k,\mathbf{T}}(x) := (-1)^k (t_{i+k} - t_i)(x - t)_+^{k-1}[t_i, \ldots, t_{i+k}],$$

za $\forall x \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, gdje se odsječena potencija $(\cdot)_+^r$ definira sa

$$(x)_+^r := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^r & x \geqslant 0 \end{cases}$$

za $r = 1, 2, \ldots$, a za $r = 0$ sa

$$(x)_+^0 := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Proširena particija

Neka je **T** dan s:

$$t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k = x_0 = a,$$

$$t_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant t_{k+M} = \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{x_{\ell-1}, \ldots, x_{\ell-1}}_{m_{\ell-1}},$$

$$b = x_\ell = t_{k+M+1} \leqslant \cdots \leqslant t_{2k+M},$$

gdje su m_i, $0 < m_i \leqslant k$, multipliciteti čvorova, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_{\ell-1})$, i $M := \sum_{i=1}^{\ell-1} m_i$.

Nadalje, neka je $\nu_i = k - m_i$ i $n = k + M$, tada se prostor razapet B-splajnovima označava sa $\mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}$, dimenzija mu je n, i može se pokazati da je

$$\mathcal{S}_{k,\mathbf{T}} = \mathcal{P}_{k,\mathbf{x},\boldsymbol{\nu}}.$$

Niz čvorova **T** zove se proširena particija particije **X.** Najčešće se uzima

$$t_1 = \cdots = t_k = a \text{ i } t_{n+1} = \cdots = t_{n+k} = b.$$

Može se još proširiti definicija B-splajnova na slučaj kada je $t_i = \cdots = t_{i+k}$, tada je

$$B_{i,k,\mathbf{T}} :\equiv 0.$$

Kada je jasno na koju se proširenu particiju B-splajnovi odnose, možemo skratiti oznaku:

$$B_{i,k} := B_{i,k,\mathbf{T}}.$$

B-splajnovi se računaju pomoću rekurzije, koja koji put služi kao alternativna definicija B-splajnova:

de Boor–Cox-ova rekurzija

Teorem

(de Boor–Cox-ova rekurzija)

a) *Za* $t_i < t_{i+1}$ *je*

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } t_i \leqslant x < t_{i+1} \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{1}$$

b) *Neka je* $k \geqslant 2$ *i* $t_i < t_{i+k}$*, tada za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$B_{i,k} = \omega_{i,k} B_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1},$$

$$\omega_{i,k}(x) = \begin{cases} \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i}, & \text{ako je } t_i \neq t_{i+k-1} \\ \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

Dokaz: Dio a) slijedi direktno iz definicije. Za $k = 1$, uz $t_i < t_{i+1}$, ona daje

$$\begin{aligned} B_{i,1}(x) &= -(t_{i+1} - t_i)(x - t)_+^0[t_i, t_{i+1}] \\ &= -(x - t_{i+1})_+^0 + (x - t_i)_+^0, \end{aligned}$$

pa za $x < t_i$ imamo

$$B_{i,1}(x) = -0 + 0 = 0,$$

za $t_i \leqslant x < t_{i+1}$ imamo

$$B_{i,1}(x) = -0 + 1 = 1,$$

dok je za $x \geqslant t_{i+1}$

$$B_{i,1}(x) = -1 + 1 = 0.$$

Za b) primjetimo da je

$$(x - t)_+^{k-1} = (x - t) \cdot (x - t)_+^{k-2},$$

pa ako primjenimo Leibnizovu formulu za podijeljenu razliku produkta funkcija dobivamo

$$\begin{aligned}
(x - t)_+^{k-1}[t_i, \ldots, t_{i+k}] &= \left((x - t)(x - t)_+^{k-2}\right)[t_i, \ldots, t_{i+k}] \\
&= \sum_{r=i}^{i+k} (x - t)[t_i, \ldots, t_r] \cdot (x - t)_+^{k-2}[t_r, \ldots, t_{i+k}] \\
&= (x - t)[t_i] \cdot (x - t)_+^{k-2}[t_i, \ldots, t_{i+k}] \\
&\quad + (x - t)[t_i, t_{i+1}] \cdot (x - t)_+^{k-2}[t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}],
\end{aligned}$$

jer je $(x-t)$ polinom prvog stupnja pa je $(x-t)[t_i,\ldots,t_r]=0$ za $r \geqslant i+2$.

Odatle, uz pomoć rekurzije za podijeljene razlike, slijedi:

$$\begin{aligned}
B_{i,k}(x) &= (-1)^k(t_{i+k}-t_i)(x-t)_+^{k-1}[t_i,\ldots,t_{i+k}] \\
&= (-1)^k(t_{i+k}-t_i)\Big((x-t_i)\cdot(x-t)_+^{k-2}[t_i,\ldots,t_{i+k}] \\
&\quad -(x-t)_+^{k-2}[t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]\Big) \\
&= (-1)^k(t_{i+k}-t_i)\left(\frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i}((x-t)_+^{k-2}[t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]\right. \\
&\quad \left. -(x-t)_+^{k-2}[t_i,\ldots,t_{i+k-1}]) - (x-t)_+^{k-2}[t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]\right)
\end{aligned}$$

$$= (-1)^{k-1}\Big((x-t_i)(x-t)_+^{k-2}[t_i,\ldots,t_{i+k-1}]$$

$$+(t_{i+k-1}-x)(x-t)_+^{k-2}[t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]\Big)$$

$$= \frac{x-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k}-x}{t_{i+k}-t_{i+1}}B_{i+1,k-1}(x).$$

U zadnjem redu zapravo pretpostavljamo $t_i < t_{i+k-1}$ i $t_{i+1} < t_{i+k}$.

Ako jedna od nejednakosti ne vrijedi, onda je jedan od $B_{i,k-1}$ ili $B_{i+1,k-1}$ jednak nul funkciji pa se koristi “de Boor-ova maksima” koja kaže da bilo što pomnoženo s nulom daje nulu. $\square$

Svojstva B-splajnova

Neka važna svojstva:

Teorem

a) $B_{i,k}(x) = 0$, *za* $x < t_i$ *i* $x > t_{i+k}$,

b) $B_{i,k}(x) > 0$, *za* $t_i < x < t_{i+k}$, *iz čega slijedi*

$$\operatorname{supp} B_{i,k} \subseteq [t_i, t_{i+k}].$$

c) $\sum_{i=1}^{n} B_{i,k}(x) = 1$, *za svaki* $x \in [a, b]$ *(particija jedinice).*

Dokaz: Prvo ćemo dokazati a): $B_{i,k}(x) = 0$, za $x < t_i$ i $x > t_{i+k}$

- Iz definicija “plus” funkcije i podijeljenih razlika, jasno je da je

$$B_{i,k} = 0 \quad \text{za} \quad x < t_i,$$

  jer je

$$(x - t)_+^{k-1} = 0,$$

  što vrijedi i za njegove derivacije, za svaki $t = t_j$, $j = i, \ldots, i + k$.
- S druge strane, za $x > t_{i+k}$ imamo k-tu podijeljenu razliku polinoma $(x - t)^{k-1}$, koja je jednaka nuli.

Dokaz za b) $B_{i,k}(x) > 0$, za $t_i < x < t_{i+k}$, ide indukcijom po k.

- Za $k = 1$ i $t_i < t_{i+1}$ imamo (1).

$$B_{i,1} = \begin{cases} 1 & x \in [t_i, t_{i+1}\rangle, \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

- Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za B-splajnove reda $k - 1$.

  Tada za $t_i < x < t_{i+k}$ iz rekurzije (2)

  $B_{i,k}$ se dobiva linearnom kombinacijom s pozitivnim koeficijentima

  (u slučaju kada je $t_i < t_{i+k-1}$ i $t_{i+1} < t_{i+k}$) dvaju nenegativnih $B_{i,k-1}$ i $B_{i+1,k-1}$, od kojih je barem jedan pozitivan.

  Dakle, tvrdnja vrijedi i za $B_{i,k}$.

Dokaz za c) $\sum_{i=1}^{n} B_{i,k}(x) = 1$ također ide indukcijom po k.

- Tvrdnja je trivijalna za $k = 1$.
- Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za B-splajnove reda $k - 1$.

  Tada iz rekurzije B-splajnove i a) za $x \in [t_j, t_{j+1}\rangle$ imamo

$$
\begin{aligned}
\sum_i B_{i,k}(x) &= \sum_{i=j+1-k}^{j} B_{i,k}(x) \\
&= \sum_{i=j+1-k}^{j} \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \sum_{i=j+1-k}^{j} \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) \\
&= \sum_{i=j+1-k}^{j} \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \sum_{i=j+2-k}^{j+1} \frac{t_{i+k-1} - x}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) \\
&= \sum_{i=j+2-k}^{j} B_{i,k-1}(x) = 1.
\end{aligned}
$$

□

- B-splajn za koji vrijedi $B_{i,k}(t_i) > 0$ ili $B_{i,k}(t_{i+k}) > 0$ je onaj kojem je prvi ili zadnji čvor maksimalnog multipliciteta, tj. multipliciteta k.

  U najčešćem slučaju, kada je $t_1 = \cdots = t_k$ i $t_{n+1} = \cdots = t_{n+k}$, to će vrijediti za prvi i zadnji B-splajn.

- Tada, iz de Boor–Cox-ove rekurzije, ili iz vrijednosti B-splajna i njegovih derivacija u krajnjim točkama, imamo

$$B_{1,k} = \frac{(t_{k+1} - x)^{k-1}}{(t_{k+1} - t_k)^{k-1}},$$

  i za njega vrijedi

$$\begin{aligned} B_{1,k}(t_k) &= 1, \\ B_{1,k}^{(i)}(t_{k+1}) &= 0, \quad \text{za } i = 0, \ldots, k-2. \end{aligned}$$

- Analogno je

$$B_{n,k} = \frac{(x - t_n)^{k-1}}{(t_{n+1} - t_n)^{k-1}},$$

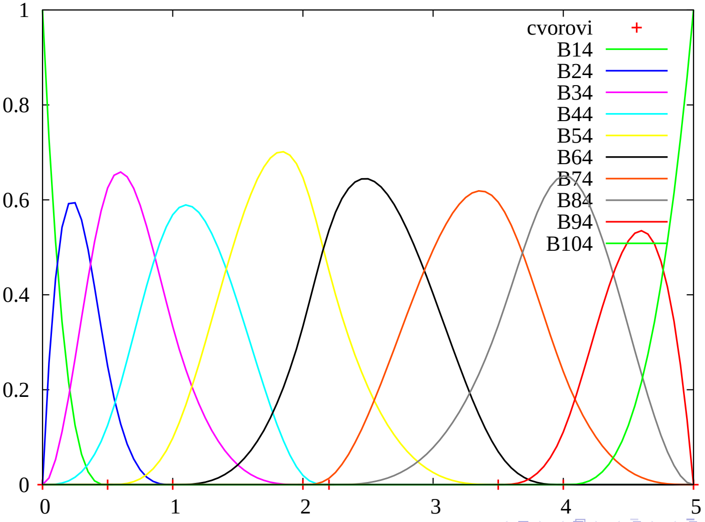
te

$$\begin{aligned} B^{(i)}_{n,k}(t_n) &= 0, \quad \text{za } i = 0, \ldots, k-2, \\ B_{n,k}(t_{n+1}) &= 1. \end{aligned}$$

Teorem

Ako niti jedan od čvorova iz nosača B-splajna $B_{i,k}$ nije multipliciteta k, $B_{i,k}$ je unimodalan, tj. postoji točno jedan ekstrem, na $\langle t_i, t_{i+k}\rangle$.

B-splajnovi reda 4



Korolar

Ako je

a) $t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle$, *tada je* $B_{i,k}(t) > 0$ *za* $i = j - k + 1, \ldots, j$;

b) t_j *multipliciteta* $m < k$, *tj.*

$$t_{j-1} < t_j = \cdots = t_{j+m-1} < t_{j+m},$$

tada je $B_{i,k}(t_j) > 0$ *za* $i = j - k + m, \ldots, j - 1$.

Dokaz: Iz prethodnog teorema znamo da je nosač od $B_{i,k}$ sadržan u $[t_i, t_{i+k}]$.

a) Ako je $t_j \in \{t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k-1}\}$ i $t_j < t_{j+1}$, tada je $B_{i,k}(t) > 0$ za $t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle$.

Dakle $i = j, j - 1, \ldots, j - k + 1$.

b) Neka su l_i i r_i takvi da je

$$t_i = t_{i+1} = \cdots = t_{i+l_i-1}$$

$$t_{i+k+1-r_i} = \cdots = t_{i+k-1} = t_{i+k},$$

onda je

$$B_{i,k}(t_j) > 0 \quad \text{za } j = i + l_i, \ldots, i + k - r_i.$$

Ako krenemo od $i = 1$, povečavamo i za jedan i gledamo koji je prvi i za koji je $B_{i,k}(t_j) > 0$.

Takav i mora zadovoljavati $t_{i+k} = t_{j+m}$, dakle $i = j - k + m$.

Zadnji i za koji to vrijedi je $i = j - 1$. $\square$

Ekvidistantni čvorovi

Primjer

Neka je $(t_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ definiran sa $t_i := x_0 + ih$ za neku točku $x_0 \in \mathbb{R}$ i korak $h > 0$, i neka je $k \in \mathbb{N}$.

- Tada je pridruženi prostor splajnova reda k translatorno invarijantan, pa je
$$B_{i+j,k}(x) = B_{i,k}(x - jh)$$
za sve $i, j \in \mathbb{Z}$.
- B-splajn $B_{i,k}$ je simetričan s obzirom na točku $\frac{t_i+t_{i+k}}{2} = x_0 + \left(i + \frac{k}{2}\right) h$, tj. s obzirom na polovište svog nosača, gdje postiže i maksimum, dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ je
$$B_{i,k}(x) = B_{i,k}(t_i + t_{i+k} - x).$$
- Zbog toga dovoljno je znati izračunati jednu polovicu jednog B-splajna da bi mogli izračunati sve.

Marsdenov identitet

Pošto se i polinomi nalaze u prostoru splajnova,

zanimljivo je vidjeti koji su koeficijenti u rastavu potencija u bazi B-splajnovima potencija

Marsdenov identitet

Teorem

(Marsdenov identitet) Za proizvoljan $\tau \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x-\tau)^{k-1} = \sum_i \psi_{i,k}(\tau) B_{i,k}(x),$$

gdje je

$$\psi_{i,k}(\tau) := (t_{i+1}-\tau)\cdots(t_{i+k-1}-\tau).$$

Štoviše za $j = 1, 2, \ldots, k$ je

$$x^{j-1} = \sum_i \xi_i^{(j)} B_{i,k}(x),$$

gdje su

$$\xi_i^{(j)} = (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{(k-1)!} \psi_{i,k}^{(k-j)}(0).$$

Dokaz: Promotrimo poseban niz

$$\sum_i a_i B_{i,k}, \text{ gdje je } a_i := \psi_{i,k}(\tau), \text{ za } \forall i.$$

Tada iz de Boor–Cox-ove rekurzije

$$\begin{aligned} B_{i,k} &= \omega_{i,k} B_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1} \\ \omega_{i,k}(x) &= \begin{cases} \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i}, & \text{ako je } t_i \neq t_{i+k-1} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \end{aligned}$$

slijedi

$$\sum_i a_i B_{i,k} = \sum_i B_{i,k-1} \big((1 - \omega_{i,k}) a_{i-1} + \omega_{i,k} a_i \big).$$

Ako je $B_{i,k-1} \neq 0$, tj. $t_i < t_{i+k-1}$ onda je

$$\begin{aligned}
&(1-\omega_{i,k}(x))a_{i-1} + \omega_{i,k}(x)a_i = \\
&= ((1-\omega_{i,k}(x))(t_i - \tau) + \omega_{i,k}(x)(t_{i+k-1} - \tau))\psi_{i,k-1}(\tau) \\
&= (x-\tau)\psi_{i,k-1}(\tau),
\end{aligned}$$

pošto je

$$(1-\omega_{i,k})f(t_i) + \omega_{i,k}f(t_{i+k-1})$$

jedinstveni pravac koji prolazi kroz $f(t_i)$ i $f(t_{i+k-1})$,
pa mora biti jednak f ako je i sam f pravac.

Tada se indukcijom dobiva

$$\begin{aligned}\sum_i B_{i,k}(x)\psi_{i,k}(\tau) &= (x-\tau)\sum_i B_{i,k-1}(x)\psi_{i,k-1}(\tau)\\ &= \cdots\\ &= (x-\tau)^{k-1}\sum_i B_{i,1}(x)\underbrace{\psi_{i,1}(\tau)}_{=1} = (x-\tau)^{k-1}.\end{aligned}$$

Rastav za x^{j-1} se dobiva deriviranjem prethodne jednakosti $k-j$ puta s obzirom na τ i uvrštavanjem $\tau = 0$. □

B-splajnovi se daju lagano derivirati:

Derivacija B-splajnova

Teorem

(Derivacija B-splajnova) Neka je $t_i < t_{i+k}$, i neka je D_+ derivacija s desna. Tada je

$$D_+ B_{i,k}(x) = (k-1)\left(\frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i+k-1}-t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k}-t_{i+1}}\right). \tag{2}$$

Dokaz: Opet se samo koristi rekurzija za podijeljene razlike:

$$
\begin{aligned}
D_+ B_{i,k}(x) &= (-1)^k (t_{i+k} - t_i) \left(D_+ (x - t)_+^{k-1} \right) [t_i, \ldots, t_{i+k}] \\
&= (-1)^k (t_{i+k} - t_i) \left((k - 1)(x - t)_+^{k-2} \right) [t_i, \ldots, t_{i+k}] \\
&= (-1)^k (k - 1)(t_{i+k} - t_i) \\
&\quad \cdot \frac{(x - t)_+^{k-2}[t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}] - (x - t)_+^{k-2}[t_i, \ldots, t_{i+k-1}]}{t_{i+k} - t_i},
\end{aligned}
$$

što daje traženu jednakost.

U slučaju da t_i ili t_{i+k} ima multiplicitet k, desnu stranu od (2) tretiramo kao i u dokazu za de Boor–Cox-ovu rekurziju. □

Korolar

Neka je $f \in \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}$, $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j B_{j,k}$, $x \in [a,b]$, *i multipliciteti svih čvorova nisu veći od* k. *Tada je*

$$D_+ f(x) = \sum_{j=2}^{n} a_j' B_{j,k-1}(x),$$

gdje je

$$a_j' = (k-1)\frac{a_j - a_{j-1}}{t_{j+k-1} - t_j}, \quad \text{ako je } t_j < t_{j+k-1},$$

za $j = 2, \ldots, n$.

Dokaz: Koristi se derivacijska formula na $D_+ f(x)$, te činjenica da je $B_{1,k-1}(x) = B_{n+1,k-1}(x) = 0$ za $x \in [a,b]$. □

Računanje vrijednosti splajna u točci

Sada želimo naći efikasan algoritam za računanje splajna

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i B_{i,k}$$

u točci x.

Iz de Boor–Cox-ove rekurzije slijedi da je

$$\sum_i a_i B_{i,k} = \sum_i ((1 - \omega_{i,k}) a_{i-1} + \omega_{i,k} a_i) B_{i,k-1}.$$

Ako označimo

$$a_i^{[1]} := ((1 - \omega_{i,k})a_{i-1} + \omega_{i,k} a_i),$$

$a_i^{[1]}$ se računa kao konveksna kombinacija originalnih koeficijenata, što se, numerički gledano, računa vrlo stabilno.

Nastavimo iteracije, pa nakon $k - 1$ iteracija imamo

$$f = \sum_i a_i^{[k-1]} B_{i,1},$$

iz čega slijedi

$$f(x) = a_i^{[k-1]}(x) \quad \text{za svaki } x \in [t_i, t_{i+1}\rangle,$$

ako je $t_i < t_{i+1}$.

de Boor-ov algoritam

Neka je $x \in [t_j, t_{j+1}\rangle$.

Za dane konstantne polinome

$$a_i^{[0]} := a_i, \quad i = j - k + 1, \ldots, j,$$

koji određuju

$$f := \sum_{i=1}^{n} a_i B_{i,k}$$

na intervalu $[t_j, t_{j+1}\rangle$, generiraju se polinomi $a_i^{[r]}$, $r = 1, \ldots, k - 1$ rekurzijom

$$a_i^{[r+1]} := (1 - \omega_{i,k-r}) a_{i-1}^{[r]} + \omega_{i,k-r} a_i^{[r]}, \quad j - k + r + 1 < i \leqslant j. \qquad (3)$$

Tada je

$$f = a_j^{[k-1]} \quad \text{na } [t_j, t_{j+1}\rangle$$

Štoviše, ako je $t_j \leqslant x \leqslant t_{j+1}$, za težine $\omega_{i,k-r}(x)$ u (3) vrijedi

$$0 \leqslant \omega_{i,k-r}(x) \leqslant 1,$$

pa se računanje $f(x) = a_j^{[k-1]}(x)$ pomoću rekurzije (3) sastoji od konveksnih kombinacija.

Interpolacija splajnom

Interpolacija splajnom

Ovdje ćemo pretpostavljati da je $\mathbf{T} = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ nepadajući niz čvorova, kod kojeg je $t_i < t_{i+k}$ za svaki i.

Interpolacijski problem:

Za dane $\tau = (\tau_i)_{i=1}^{n}$ i funkciju f treba odrediti splajn $s \in \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}$, takav da je

$$s(\tau_i) = f(\tau_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Uočimo da je $\dim \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}} = n$.

Ako je

$$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_{j,k} \quad \text{i} \quad f_i := f(\tau_i),$$

onda interpolacijski uvjeti prelaze u određivanje $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ koji zadovoljavaju

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_{j,k}(\tau_i) = f_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Uz oznake

$$\begin{aligned} \alpha &:= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}, \\ A &:= (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} := (B_{j,k}(\tau_i))_{i,j=1}^{n} \text{ i} \\ f &:= (f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

interpolacijske jednadžbe možemo zapisati matrično

$$A\alpha = f.$$

Problem traženja jedinstvenog interpolacijskog splajna s sada je pretvoren u problem ispitivanja da li je matrica A regularna, na što nam odgovor daje slijedeći torem:

Regularnost interpolacijske matrice

Teorem

(Schoenberg–Whitney) Neka je τ strogo rastući niz točaka za koji iz $a < t_i = \cdots = t_{i+r} = \tau_j < b$ slijedi da je $r < k - 1$. Tada je matrica $A := (B_{j,k}(\tau_i))$ regularna ako i samo ako je

$$B_{i,k}(\tau_i) \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Napomena. To zapravo znaći da za regularnost treba biti $t_i < \tau_i < t_{i+k}$, osim što se još dozvoljava i $\tau_1 = t_1^+$ i $\tau_n = t_{n+k}^-$.

Primjer – kubični splajn i 'not-a-knot' uvjet

Promatramo interpolaciju u čvorovima x_i, $i = 0, \ldots, n$, a dodatna 2 uvjeta su interpolacija u sredini rubnih intervala: $(x_0 + x_1)/2$ i $(x_{n-1} + x_n)/2$.

Proširena particija (t_i): $x_0, x_0, x_0, x_0, x_1, x_2, \ldots$

Točke interpolacije (τ_i): $x_0, (x_0 + x_1)/2, x_1, x_2, x_3, \ldots$

Jer je $\tau_1 = (x_0 + x_1)/2$ i $t_1 = x_0$ vrijedi

$$t_1 = x_0 < \frac{x_0 + x_1}{2} = \tau_1 < x_1 = t_5 = t_{1+4}$$

uvjet je zadovoljen.

Jer je $\tau_i = x_{i-2}$ i $t_i = x_{i-4}$ vrijedi

$$t_i = x_{i-4} < x_{i-2} = \tau_i < x_i = t_{i+4}$$

uvjet je zadovoljen za $i = 2, 3, \ldots$. (Radi jednostavnosti uzimamo $x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0$)

Na isti način promatramo desni rub intervala.

$\Rightarrow$ Interpolacija kubičnim splajnom klase C^2 uz 'not-a-knot' uvjet ima jedinstveno rješenje.

Teorem ne govori ništa o egzistenciji potpunog splajna!
Rubni uvjeti $s'(x_0) = d_0$ i $s'(x_n) = d_1$.

Potpuni splajn uskoro!

Interpolacijska matrica je vrpčasta

Pretpostavimo sada da je $n \times n$ matrica $(B_{j,k}(\tau_i))$ regularna.

Velika prednost korištenja B-splajnova činjenica da matrica $(B_{j,k}(\tau_i))$ mora biti vrpčasta (trakasta) matrica širine k ,
tj. matrica sa manje nego k dijagonala iznad i manje nego k dijagonala ispod glavne dijagonale.

Zbog malog nosača B-splajnova, i $B_{i,k}(\tau_i) \neq 0$, vrijedi

$$B_{j,k}(\tau_i) \neq 0 \Longrightarrow |j - i| < k,$$

odnosno

$$B_{j,k}(\tau_i) = 0 \text{ za } |j - i| \geqslant k.$$

- Posebnim odabirom (τ_i) širina vrpce može se još smanjiti.
- Za pohranu vrpčastih matrica u memoriju računala može se korsititi tzv. "vrpčasto spremanje" matrice za koju treba spremiti onda maksimalno $(2k - 1) \cdot n$ elemenata matrice (nule se ne pamte) umjesto $n \times n$.

Totalna pozitivnost interpolacijske matrice

Slijedeće važno svojstvo interpolacijske matrice je totalna pozitivnost.

Za danu matricu $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{n}$ i za zadan niz $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$ sa

$$A \begin{bmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ j_1, \ldots, j_s \end{bmatrix} := (a_{i_p j_q})_{p=1,}^{r} {}_{q=1}^{s}$$

definirana je podmatrica dobivena od A odabirom određenih redova i stupaca.

Definicija

Matrica A reda n je totalno pozitivna ako su sve njezine minore nenegativne, tj.

$$\det A \begin{bmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ j_1, \ldots, j_r \end{bmatrix} \geqslant 0$$

za sve

$$\begin{gathered} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n \\ j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n \end{gathered}$$

i $r = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Teorem

(Karlin) Matrica $(B_{j,k}(\tau_i))$ *je totalno pozitivna za sve* $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$.

Napomena. Linearni sustav sa regularnom totalno pozitivnom matricom može se rješavati pomoću Gaussovih eliminacija bez pivotiranja.

Hermiteova interpolacija splajnom

Postoji također i varijanta Schoenberg–Whitney-evog teorema za Hermiteovu interpolaciju:

Teorem

(Karlin & Ziegler) Neka je dan nepadajući niz $\tau = (\tau_i)_{i=1}^n$ *za koji je* $\tau_i < \tau_{i+k}$ *za svaki* i*. Pretpostavimo da je*

$$t_k < \tau_{i+1} = \cdots = \tau_{i+r} = t_{j+1} = \cdots = t_{j+s} < t_{n+1} \Rightarrow r + s \leqslant k.$$

Tada za svaku glatku funkciju f *postoji jedinstven* $s \in \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}$ *koji se slaže s* f *na* τ *ako i samo ako je* $B_{i,k}(\tau_i) \neq 0$ *za svaki* i*.*

Napomena. Iz ove varijante teorema slijedi da interpolacija potpunim kubičnim splajnom ima jedinstveno rješenje.
Provjera je analogna kao u slučaju 'not-a-knot' uvjeta.

Ocjena greške interpolacijaskog splajna

Za Lagrangeovu interpolaciju navest ćemo i ocjenu greške.

Neka je I (interpolacijski) projektor s nekog skupa glatkih funkcija G, $I : G \to \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}$,

$$s \in \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}} \Rightarrow Is = s,$$

i neka je

$$\|g\| := \max_{a \leqslant x \leqslant b} |g(x)|$$

za neki fiksni interval $[a, b]$.

Lema

Za svaku neprekidnu funkciju g na $[a,b]$ interpolacijska pogreška je ograničena s

$$\|g - Ig\| \leqslant (1 + \|I\|)\operatorname{dist}(g, \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}),$$

gdje je

$$\begin{aligned} \|I\| &:= \max_{g \in C[a,b] \setminus \{0\}} \frac{\|Ig\|}{\|g\|}, \\ \operatorname{dist}(g, \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}) &:= \min_{s \in \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}} \|g - s\|. \end{aligned}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \|g - Ig\| &= \|g - s - I(g - s)\| \leqslant \|g - s\| + \|I\| \|g - s\| \\ &= (1 + \|I\|)\|g - s\| \end{aligned}$$

za svaki $s \in \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}$.

Ako vrijedi za svaki, onda vrijedi i za onaj za koji se postiže minimum, tj.

$$\|g - Ig\| \leqslant (1 + \|I\|)\mathrm{dist}\,(g, \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}).$$

$\square$

Nedostatak ove ocjene je da ne znamo $\|I\|$, a to ovisi o $|t|$ gdje je

$$|t| := \max_i\,(t_{i+1} - t_i),$$

ali i o τ.

Lema

Postoji pozitivna konstanta $const_k$ takva da je norma interpolacijskog procesa I ograničena odozdo sa

$$\|I\| \geqslant const_k \max_i \frac{\min\left\{t_{j+k-1} - t_j : \langle t_j, t_{j+k-1}\rangle \cap \langle \tau_i, \tau_{i+1}\rangle \neq \emptyset\right\}}{\tau_{i+1} - \tau_i}.$$

Iz ove leme se vidi da $\|I\|$ može biti proizvoljno velik ako dvije interpolacijske točke približimo.

Dakle, mora se posvetiti pažnja odabiru interpolacijskih točaka.

Čak se može pokazati da veliki $\|I\|$ može uzrokovati i veće greške tijekom floating–point računanja.

O $\mathrm{dist}(g, \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}})$ pak možemo još nešto reći.

Definirajmo još modul neprekidnosti:

$$\omega(g; h) := \max\{|g(x) - g(y)| : |x - y| \leqslant h, x, y \in [a, b]\}.$$

Primijetimo da je za $g \in C^1(a, b)$ zbog Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti:

$$\omega(g; h) :=\leq h \max_{x\in[a,b]} |g'(x)|$$

Teorem

Za $j = 0, \ldots, k-1$ *postoji konstanta* $const_{k,j}$ *takva da za sve* $\mathbf{T} = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ *uz*

$$t_1 = \cdots = t_k = a < t_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant t_n < b = t_{n+1} = \cdots = t_{n+k},$$

i za svaki $g \in C^j[a, b]$*,*

$$\operatorname{dist}(g, \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}) \leqslant const_{k,j} |t|^j \omega(g^{(j)}; |t|).$$

Posebno za $j = k$ *imamo*

$$\operatorname{dist}(g, \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}) \leqslant const_k |t|^k \|g^{(k)}\|,$$

ako g *ima* k *neprekidnih derivacija.*

Za kubični splajnove možemo biti još precizniji:

Teorem

Neka je s kubični splajn klase C^2 koji interpolira funkciju f u čvorovima i zadovoljava rubne uvjete

a) $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$,
b) $s''(a) = f''(a)$, $s''(b) = f''(b)$,
c) $s^{(r)}(a) = f^{(r)}(b)$, *za* $r = 0, 1$ *(periodički rubni uvjeti).*

Tada pogreška interpolacije zadovoljava

$$\|s^{(r)} - f^{(r)}\| \leqslant R_r$$

gdje je R_r dan u tablici:

klasa f-je	R_0	R_1	R_2
$C^1[a,b]$	$\frac{9}{8} h\omega(f';h)$	$4\omega(f';h)$	-
$C^2[a,b]$	$\frac{19}{96} h^2\omega(f'';h)$	$\frac{2}{3} h\omega(f'';h)$	$4\omega(f'';h)$
C^2, C^3_Δ	$\frac{41}{1728} h^3\omega(f''';h)$	$\frac{2}{27} h^2\omega(f''';h)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) h\omega(f''';h)$

R_3
-
-
$\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\beta\right)\omega(f''';h)$

gdje su

$$h := |t|, \quad h_i := t_{i+1} - t_i, \quad \beta := \frac{\max h_i}{\min h_i},$$

a X_Δ znači da je funkcija po djelovima klase X.

Interpolacija u Greville-ovim točkama

Ako postoji sloboda odabira interpolacijskih točaka (τ_i) za danu proširenu particiju $\mathbf{T}$, tada se preporučaju Greville-ove točke:

$$\tau_i = t_{i,k}^* := \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{k-1}.$$

Za njih vrijedi

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_{i,k}^* B_{i,k}(x).$$

Ako sa I_k^* označimo interpolacijski operator koji interpolira splajnom reda k u Greville-ovim točkama, može s pokazati da je

$$\|I_2^*\| = 1, \quad \|I_3^*\| \leqslant 2, \quad \|I_4^*\| \leqslant 27$$

Pa, pošto je

$$\|g - I_k^* g\| \leqslant (1 + \|I_k^*\|) \operatorname{dist}(g, \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}),$$

po svoj prilici, za “umjeren” k (a sigurno za $k \leqslant 4$), I_k^* je skoro najbolja moguća aproksimacija funkcije g u prostoru $\mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}$.

Interpolacija kubičnim splajnom

Particija $x_0, x_1, \ldots, x_n$ intervala $[a, b]$ zadana.
Promatramao problem interpolacije potpunim kubičnim splajnom.

Uvjeti:
$s \in C^2(a, b)$

Interpolacijski uvjeti:

$$s(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n$$

i u rubovima

$$s'(x_0) = d_0, \quad \text{i} \quad s'(x_n) = d_1.$$

Splajn s je oblika

$$\begin{aligned} s(x) \quad &= \quad c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}) \\ &\quad + c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3, \end{aligned}$$

za $x \in [x_{k-1}, x_k]$, i za $k = 1, \ldots, n$.

Na svakom intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ splajn s zadovoljava interpolacijske uvjete

$$\begin{aligned} s(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\ s(x_k) &= f_k, \end{aligned}$$

Ovi uvjeti automatski osiguravaju neprekidnost splajna s.

Sa s_i označimo

$$s_i := s'(x_i), \quad \text{za } i = 0, \ldots, n.$$

s_i su za sada nepoznati, odredit ćemo ih naknadno.

Ovime smo ujedno dodali uvjet da je $s \in C^1$!

Zapišimo s na drugi način.

Na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ splajn s zadovoljava interpolacijske uvjete

$$\begin{aligned} s(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\ s(x_k) &= f_k, \\ s'(x_{k-1}) &= s_{k-1}, \\ s'(x_k) &= s_k. \end{aligned}$$

Hermiteova interpolacija kubičnim polinomom!

Newtonov oblik Hermiteovog interpolacijskog polinoma koji ima dva dvostruka čvora x_{k-1} i x_k je

$$\begin{aligned} s(x) &= f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\ &\quad + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 \\ &\quad + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 (x - x_k), \end{aligned}$$

uz uvažavanje da je

$$\begin{aligned} f[x_{k-1}, x_{k-1}] &= s_{k-1}, \\ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k}, \\ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}. \end{aligned}$$

s_k određujemo iz uvjeta neprekidnosti 2. derivacije.

$$\begin{aligned} s''(x) &= 2\frac{f[x_{k-1},x_k]-s_{k-1}}{h_k}+ \\ &+\frac{s_k+s_{k-1}-2f[x_{k-1},x_k]}{h_k^2}\cdot\big(4(x-x_{k-1})+2(x-x_k)\big) \end{aligned}$$

Posebno

$$\begin{aligned} s''(x_{k-1}+) &= 2\frac{f[x_{k-1},x_k]-s_{k-1}}{h_k}- \\ &-2\frac{s_k+s_{k-1}-2f[x_{k-1},x_k]}{h_k} \\ s''(x_k-) &= 2\frac{f[x_{k-1},x_k]-s_{k-1}}{h_k}+ \\ &+4\frac{s_k+s_{k-1}-2f[x_{k-1},x_k]}{h_k} \end{aligned}$$

Uvjet $s''(x_k-) = s''(x_k+) \quad \Rightarrow$

$$2\frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} + 4\frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k} =$$
$$2\frac{f[x_k, x_{k+1}] - s_k}{h_{k+1}} - 2\frac{s_{k+1} + s_k - 2f[x_k, x_{k+1}]}{h_{k+1}}$$

odnosno

$$\frac{s_{k-1}}{3h_k} + 2\frac{s_k}{3h_k} + 2\frac{s_k}{3h_{k+1}} + \frac{s_{k+1}}{3h_{k+1}} = \frac{f[x_{k-1}, x_k]}{h_k} + \frac{f[x_k, x_{k+1}]}{h_{k+1}}$$

ili

$$h_{k+1}s_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})s_k + h_k s_{k+1} =$$
$$= 3(h_{k+1}f[x_{k-1}, x_k] + h_k f[x_k, x_{k+1}]).$$

Ovo je linearni sustav

- s $(n+1)$-om nepoznanicom i $(n-1)$-om jednadžbom.

s_0 i s_n su zadani (potpuni splajn)

Matrica tako dobivenog linearnog sustava je tridijagonalna

$$\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_1 & & & \\ h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-1} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-2} \\ & & & h_n & 2(h_{n-1}+h_n) \end{bmatrix}$$

i strogo dijagonalno dominantna po recima, jer je

$$2(h_k+h_{k+1}) > h_k + h_{k+1},$$

pa je i regularna.

Posebno, mogu se primijeniti Gaussove eliminacije.

Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija

Vrijednosti s_k možemo izabrati tako da su one baš jednake derivaciji zadane funkcije u odgovarajućoj točki, tj. da vrijedi

$$s_k = f'(x_k).$$

U tom slučaju je kubični polinom

- određen lokalno, tj. ne ovisi o drugim kubičnim polinomima,
- razlog — na rubovima zadane 2 funkcijske vrijednosti i 2 vrijednosti derivacija.

Takva se interpolacija zove po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija.

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Neka je funkcija $f \in C^4[a, b]$. Za svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ vrijedi ocjena greške za Hermiteovu kubičnu interpolaciju

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_4^k}{4!} |\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})^2 (x - x_k)^2, \qquad M_4^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f^{(4)}(x)|.$$

Ekstrem od $|\omega|$ se dostiže u sredini intervala: $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$.

Vrijednost u x_e je

$$\omega(x_e) = (x_e - x_{k-1})^2 (x_e - x_k)^2 = \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16}.$$

Definiramo li, ponovno, maksimalni razmak čvorova

$$h = \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k = x_k - x_{k-1}\},$$

onda, na čitavom $[a, b]$, možemo pisati

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{M_4}{4!} \frac{h^4}{16} = \frac{1}{384} h^4 \cdot M_4,$$

pri čemu je

$$M_4 = \max_{k=1,\ldots,n} \{M_4^k\} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Drugim riječima, ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da $h \to 0$, onda i maksimalna greška teži u 0.

Neka je $f \in C^1[a, b]$ i pretpostavimo da

- f ima ograničenu i integrabilnu četvrtu derivaciju na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$.

Tada je

$$\begin{aligned}
\|f(x) - s(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f'(x) - s'(x)\|_\infty &\leq \frac{\sqrt{3}}{216} h^3 \|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f''(x) - s''(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{12} h^2 \|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f^{(3)}(x) - s^{(3)}(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{2} h \|f^{(4)}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Greška kubične splajn interpolacije klase C^2

Neka je $f \in C^2[a, b]$ i pretpostavimo da

- f ima ograničenu i integrabilnu četvrtu derivaciju na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$.

Tada je

$$
\begin{aligned}
\|f(x) - s(x)\|_\infty &\leq \frac{5}{384}\, h^4 \,\|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f'(x) - s'(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{24}\, h^3 \,\|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f''(x) - s''(x)\|_\infty &\leq \frac{3}{8}\, h^2 \,\|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f^{(3)}(x) - s^{(3)}(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} + \beta\right) h \,\|f^{(4)}\|_\infty,
\end{aligned}
$$

gdje je $\beta := (\max_k h_k)/(\min_k h_k)$ mjera neuniformnosti mreže.

Uočimo,
C^1 interpolacija u $n+1$ vrijednosti funkcije i $n+1$ vrijednosti prve derivacije

$$\|f(x)-s(x)\|_\infty \le \frac{1}{384}\, h^4\, \|f^{(4)}\|_\infty.$$

C^2 interpolacija u $n+1$ vrijednosti funkcije

$$\|f(x)-s(x)\|_\infty \le \frac{5}{384}\, h^4\, \|f^{(4)}\|_\infty.$$

C^1 interpolacija - duplo više podataka a pogreška 5 puta manja.

Da smo u C^2 interpolaciji koristili duplo više podataka - pogreška bi bila 16 puta manja.

Splajn aproksimacija pomoću diskretne MNK

- Želimo upotrijebiti polinomni splajn u metodi najmanjih kvadrata, tj. tražimo $\varphi \in \mathcal{S}(k, \mathbf{T})$, $\dim \mathcal{S}(k, \mathbf{T}) = n$, gdje je $\mathbf{T} = \{t_i\}_{i=1}^{n+k}$, $t_i \leqslant t_{i+1}$ proširena particija na $[a, b]$,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_{j,k}$$

koji najbolje aproksimira određeni skup podataka u smislu najmanjih kvadrata, što je ekvivalentno određivanju koeficijenata α_j, tako da φ najbolje aproksimira dane podatke.

Splajn aproksimacija pomoću diskr. MNK (na.)

- Za diskretnu metodu najmanjih kvadrata pretpostavljamo da splajnom želimo aproksimirati podatke izražene u $m \geq n$ točaka

$$(x_i, y_i) \in [a, b], \quad i = 1, \dots, m.$$

- Dakle, želimo riješiti sljedeći problem

$$\min_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \varphi(x_i))^2 = \min_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_{j,k}(x_i) \right)^2.$$

- Ako sve podatke sada prikažemo u matričnom obliku

Splajn aproksimacija pomoću diskr. MNK (na.)

$$A = \begin{bmatrix} B_{1,k}(x_1) & B_{2,k}(x_1) & \cdots & B_{n,k}(x_1) \\ B_{1,k}(x_2) & B_{2,k}(x_2) & \cdots & B_{n,k}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1,k}(x_m) & B_{2,k}(x_m) & \cdots & B_{n,k}(x_m) \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

Splajn aproksimacija pomoću diskr. MNK (na.)

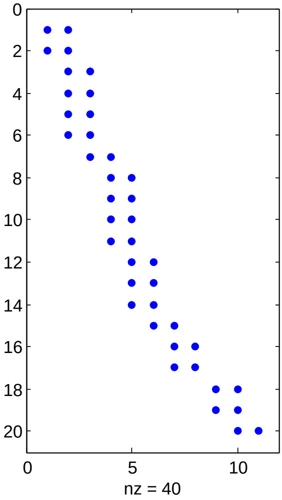
tada smo dobili standardni linearni problem najmanjih kvadrata

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2.$$

- Zbog već spomenutih svojstva B-splajnova, za svaki $x \in [a, b]$ postoji najviše k B-splajnova za koje je $B_{j,k}(x) \neq 0$.
- Zbog toga matrica A ima vrpčastu strukturu, kod koje u svakom retku matrice postoji najviše k netrivijalnih elemenata.
- Znamo da će ovaj problem imati jedinstveno rješenje ako matrica A ima puni stupčani rang.

Splajn aproksimacija pomoću diskr. MNK (na.)

- To će se postići, isto kao i kod interpolacije, ako za svaki $j = 1, \ldots, n$ postoji x_{i_j} takav da je $x_{i_j} \in \langle t_j, t_{j+k} \rangle$, pri čemu su svi x_{i_j}, $j = 1, \ldots, n$ međusobno različiti.
- To znači, da za svaki $B_{j,k}$, $j = 1, \ldots, n$ postoji neki zasebni x_{i_j} za koji je $B_{j,k}(x_{i_j}) \neq 0$.
- U tom slučaju matrica A nema niti jedan nulstupac, i svi su linearno nezavisni.


0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
5
10
nz = 40

Linearna splajn aproksimacija pomoću DMNK

- Riješit ćemo konkretan problem najmanjih kvadrata za po dijelovima linearnu aproksimaciju.
- Proširena particija **T** ima sve unutrašnje čvorove multipliciteta 1, tj.

$$a = t_1 = t_2 < t_3 < t_4 < \cdots < t_n < t_{n+1} = t_{n+2} = b.$$

- Pripadni prostor splajnova $\mathcal{S}(2, \mathbf{T})$ je, naravno, dimenzije n.
- Ako uzmemo neki x takav da je $x \in [t_i, t_{i+1}]$, tada su na tom segmentu samo dva B-splajna netrivijalna: $B_{i-1,2}$ i $B_{i,2}$.
- Zbog toga u matrici $A = [B_{j,2}(x_i)]$ svaki redak ima najviše dva netrivijalna elementa.

Linearna splajn aproksimacija pomoću DMNK

- U slučaju da je $m = n$, i da su $x_i = t_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, tada se problem najamanjih kvadrata svodi na rješavanje trivijalnog sustava linearnih jednadžbi za $A = I$ (jer je $B_{j,2}(t_{i+1}) = \delta_{ij}$).
- U tom slučaju radi se o interpolaciji točaka (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, a rezultat je $\alpha_j = y_j$, $j = 0, \ldots, n$, tj.

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} y_j B_{j,2}.$$

Linearna splajn aproksimacija pomoću DMNK

- U slučaju da je $m > n + 1$, i da za svaki $j = 1, \ldots, n$ postoji x_{i_j} takav da je $x_{i_j} \in \langle t_j, t_{j+2} \rangle$, pri čemu su svi x_{i_j}, $j = 1, \ldots, n$ međusobno različiti, tada se radi o problemu najmanjih kvadrata sa jedinstvenim rješenjem

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_{j,2}.$$

Splajn aproksimacija pomoću neprekidne MNK

- Sada rješavamo problem

$$\min_{\varphi \in \mathcal{S}_{k,\mathbf{T}}} \|f - \varphi\|_2.$$

- Parametre funkcije $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_{j,k}$ odredit ćemo rješavanjem sustava normalnih jednadžbi

$$Ax = b,$$

Splajn aproksimacija pomoću nepr. MNK (n.)

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} \langle B_{1,k}, B_{1,k} \rangle & \langle B_{1,k}, B_{2,k} \rangle & \cdots & \langle B_{1,k}, B_{n,k} \rangle \\ \langle B_{2,k}, B_{1,k} \rangle & \langle B_{2,k}, B_{2,k} \rangle & \cdots & \langle B_{2,k}, B_{n,k} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle B_{n,k}, B_{1,k} \rangle & \langle B_{n,k}, B_{2,k} \rangle & \cdots & \langle B_{n,k}, B_{n,k} \rangle \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \langle f, B_{1,k} \rangle \\ \langle f, B_{2,k} \rangle \\ \vdots \\ \langle f, B_{n,k} \rangle \end{bmatrix}.$$

Splajn aproksimacija pomoću nepr. MNK (n.)

- Ako je $w \equiv 1$, tada se elementi matrice A različiti od nule

$$\langle B_{i,k}, B_{j,k} \rangle = \int_{t_i}^{t_{i+k}} B_{i,k} B_{j,k} \, dx = \sum_{l=i}^{i+k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} B_{i,k} B_{j,k} \, dx \tag{5}$$

za $|i - j| \leqslant k - 1$, mogu računati egzaktno tako da se primjeni Gaussova integracijska formula u k točaka

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^{k} w_j f\left(\frac{z_j(b-a)}{2} + \frac{b+a}{2} \right)$$

na svaki od k integrala u sumi u (5).

Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

- U slučaju linearne aproksimacije, bazne funkcije su "krovići" $B_{j,2}$, $j = 1, \ldots, n$, a $w(x) = 1$.
- Pogledajmo kako u tom slučaju izgleda matrica A.
- Prvo možemo zaključiti da je $B_{i,2}(x) \cdot B_{j,2}(x) = 0$ za sve $x \in [a, b]$ kada je $|i - j| > 1$.
- Dalje vrijedi

$$
\begin{aligned}
B_{j-1,2}(x) \cdot B_{j,2}(x) &= \begin{cases} \frac{t_{j+1}-x}{t_{j+1}-t_j} \cdot \frac{x-t_j}{t_{j+1}-t_j}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{-x^2+(t_j+t_{j+1})x-t_j t_{j+1}}{(t_{j+1}-t_j)^2}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
j = 2, \ldots, n
$$

Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

$$B_{1,2}(x)^2 = \begin{cases} \frac{(t_3-x)^2}{(t_3-t_2)^2}, & x \in [t_2, t_3] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2-2t_3x+t_3^2}{(t_3-t_2)^2}, & x \in [t_2, t_3] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$B_{j,2}(x)^2 = \begin{cases} \frac{(x-t_j)^2}{(t_{j+1}-t_j)^2}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ \frac{(t_{j+2}-x)^2}{(t_{j+2}-t_{j+1})^2}, & x \in [t_{j+1}, t_{j+2}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2-2t_jx+t_j^2}{(t_{j+1}-t_j)^2}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ \frac{x^2-2t_{j+2}x+t_{j+2}^2}{(t_{j+2}-t_{j+1})^2}, & x \in [t_{j+1}, t_{j+2}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$j = 2, \ldots, n-1$$

Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

$$B_{n,2}(x)^2 = \begin{cases} \frac{(x-t_n)^2}{(t_{n+1}-t_n)^2}, & x \in [t_n, t_{n+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{x^2-2t_nx+t_n^2}{(t_{n+1}-t_n)^2}, & x \in [t_n, t_{n+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

- Elemente matrice A sada je lako odrediti.

Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

$$
\begin{aligned}
\langle B_{j-1,2}, B_{j,2}\rangle &= \int_a^b B_{j-1,2}(x)B_{j,2}(x)dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} B_{j-1,2}(x)B_{j,2}(x)dx \\
&= \frac{t_{j+1}-t_j}{6}, \quad j = 2, \ldots, n \\
\langle B_{1,2}, B_{1,2}\rangle &= \int_a^b B_{1,2}(x)B_{1,2}(x)dx = \int_{t_2}^{t_3} B_{1,2}(x)B_{1,2}(x)dx \\
&= \frac{t_3-t_2}{3}
\end{aligned}
$$

Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

$$
\begin{aligned}
\langle B_{j,2}, B_{j,2}\rangle &= \int_a^b B_{j,2}(x)B_{j,2}(x)dx = \int_{t_j}^{t_{j+2}} B_{j,2}(x)B_{j,2}(x)dx \\
&= \frac{t_{j+2}-t_j}{3}, \quad j = 1, \dots, n-1 \\
\langle B_{n,2}, B_{n,2}\rangle &= \int_a^b B_{n,2}(x)B_{n,2}(x)dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} B_{n,2}(x)B_{n,2}(x)dx \\
&= \frac{t_{n+1}-t_n}{3}
\end{aligned}
$$

Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

- Matrica A je dakle tridijagonalna, strogo dijagonalno domnatntna, pozitivno definitna, oblika

$$A = \begin{bmatrix} \frac{t_3-t_2}{3} & \frac{t_3-t_2}{6} & & & \\ \frac{t_3-t_2}{6} & \frac{t_4-t_2}{3} & \frac{t_4-t_3}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{t_n-t_{n-1}}{6} & \frac{t_{n+1}-t_{n-1}}{3} & \frac{t_{n+1}-t_n}{6} \\ & & & \frac{t_{n+1}-t_n}{6} & \frac{t_{n+1}-t_n}{3} \end{bmatrix},$$

Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

a vektor b je oblika

$$b = \begin{bmatrix} \int_{t_2}^{t_3} f(x)B_{1,2}(x)dx \\ \int_{t_2}^{t_4} f(x)B_{2,2}(x)dx \\ \vdots \\ \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(x)B_{n-1,2}(x)dx \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x)B_{n,2}(x)dx \end{bmatrix}.$$

Linearna splajn aproksimacija pomoću NMNK

- Sustav $Ax = b$ se sada jednostavno može riješiti
  - pomoću faktorizacije Choleskog
  - specijalnom LDL^T metodom za tridijagonalne matrice
  - SOR metodom
  - metodom konjugiranih gradijenata

Numeričko deriviranje

U praksi, često derivacije funkcije nisu dostupne, već

- treba aproksimirati derivaciju diferencijabilne funkcije f na nekom skupu točaka, korištenjem samo vrijednosti funkcije f u zadanim točkama.

Ideja. Aproksimacija derivacije $=$ derivacija aproksimacije.

Koristimo interpolacijski polinom. Uz pretpostavku da je f klase $C^{n+1}[a,b]$, funkciju f možemo napisati

$$f(x) = p_n(x) + e_n(x),$$

gdje je $p_n(x)$ interpolacijski polinom

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

Derivacija funkcije = derivacija interp. polinoma

a $e_n(x)$ greška interpolacijskog polinoma

$$e_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi).$$

Deriviranjem p_n, a zatim uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo aproksimaciju za $f'(x_0)$

$$\begin{aligned} p_n'(x_0) &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,(x_0 - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_{n-1}), \end{aligned}$$

Ako f ima još jednu neprekidnu derivaciju, tj. ako je f klase $C^{n+2}[a, b]$, onda je pogreška aproksimacije

$$e_n'(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_n).$$

Greška = derivacija greške interp. polinoma

Dakle, $p_n'(x_0)$ je aproksimacija derivacije funkcije f u točki x_0 i vrijedi

$$f'(x_0) = p_n'(x_0) + e_n'(x_0).$$

Ako označimo s

$$H = \max_k |x_0 - x_k|,$$

onda je, za $H \to 0$, greška $e_n'(x_0)$ reda veličine

$$e_n'(x_0) = O(H^n).$$

To nam pokazuje da aproksimacijska formula za derivaciju može biti proizvoljno visokog reda n, ali takve formule s velikim n imaju ograničenu praktičnu vrijednost.

Numeričko deriviranje — linearni polinom

Pokažimo kako se ta formula ponaša za niske n.

$n = 1$.

Aproksimacija derivacije je

$$p_1'(x_0) = f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h},$$

pri čemu smo napravili grešku

$$e_1'(x_0) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x_0 - x_1) = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{2}\,h,$$

uz pretpostavku da je $f \in C^3[x_0, x_1]$. Greška je reda veličine $O(h)$ za $h \to 0$.

Numeričko deriviranje — simetrična razlika

$n = 2$.

Za $n = 2$, točke x_1, x_2 možemo uzeti na više raznih načina.

1. Simetričan izbor točaka

Izaberemo x_1 i x_2 simetrično oko x_0

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 - h.$$

Sugestivnija oznaka je

$$x_{-1} := x_2,$$

jer se točke pišu u prirodnom redosljedu: x_{-1}, x_0, x_1. U tom slučaju je

$$p_2'(x_0) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_{-1}]\,(x_0 - x_1).$$

Izračunajmo potrebne podijeljene razlike.

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$
x_{-1}	f_{-1}		
		$\dfrac{f_0 - f_{-1}}{h}$	
x_0	f_0		$\dfrac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2}$
		$\dfrac{f_1 - f_0}{h}$	
x_1	f_1		

Uvrštavanjem dobivamo

$$p_2'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} - h\,\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

Prethodnu formulu zovemo simetrična (centralna) razlika, jer su točke x_1 i x_{-1} simetrične obzirom na x_0.

Takva aproksimacija derivacije ima bolju ocjenu greške nego obične podijeljene razlike, tj. vrijedi

$$e_2'(x_0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\,(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_{-1}) = -h^2\,\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}.$$

2. Slučaj x_1 i x_2 s iste strane x_0
Rasporedimo, na primjer, x_1 i x_2 desno od x_0,

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 + 2h.$$

Numeričko deriviranje — drugi izbor točaka

Iako su i u ovom slučaju točke ekvidistantne, deriviramo u najljevijoj, a ne u srednjoj točki.

Pripadna tablica podijeljenih razlika je

$$
\begin{array}{c|ccc}
t_k & f[t_k] & f[t_k, t_{k+1}] & f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}] \\
\hline
x_0 & f_0 & & \\
 & & \dfrac{f_1 - f_0}{h} & \\
x_1 & f_1 & & \dfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} \\
 & & \dfrac{f_2 - f_1}{h} & \\
x_2 & f_2 & &
\end{array}
$$

Konačno, aproksimacija derivacije u x_0 je

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,(x_0 - x_1) \\ &= \tfrac{f_1 - f_0}{h} - h\,\tfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} \\ &= \tfrac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h}, \end{aligned}$$

dok je greška jednaka

$$e_2'(x_0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\,(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2) = h^2\,\frac{f^{(3)}(\xi)}{3},$$

tj. greška je istog reda veličine $O(h^2)$, međutim konstanta je dvostruko veća nego u prethodnom (simetričnom) slučaju.

Numeričko deriviranje — zaključci

Formula za derivaciju

- postaje sve točnija što su bliže točke iz kojih se derivacija aproksimira, tj. što je h manji.

To vrijedi samo teoretski.

U praksi, mnogi podaci su mjereni, pa nose neku pogrešku, u najmanju ruku zbog grešaka zaokruživanja.

Osnovu numeričkog deriviranja čine podijeljene razlike,

- ako su točke bliske, dolazi do kraćenja. Do kraćenja mora doći, zbog neprekidnosti funkcije f.

Problem je to izrazitiji, što su točke bliže, tj. što je h manji.

Dakle, imamo dva oprečna zahtjeva na veličinu h. Manji h daje bolju ocjenu greške, ali veću grešku zaokruživanja.