Numeričko deriviranje

U praksi, često derivacije funkcije nisu dostupne, već

- treba aproksimirati derivaciju diferencijabilne funkcije f na nekom skupu točaka, korištenjem samo vrijednosti funkcije f u zadanim točkama.

Ideja. Aproksimacija derivacije $=$ derivacija aproksimacije.

Koristimo interpolacijski polinom.
Funkciju f možemo napisati kao

$$f(x) = p_n(x) + e_n(x),$$

gdje je $p_n(x)$ interpolacijski polinom

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Derivacija funkcije = derivacija interp. polinoma

Deriviranjem p_n dobivamo aproksimaciju za $f'(x)$

$$\begin{aligned} p_n'(x) &= f[x_0,x_1] + f[x_0,x_1,x_2]\,(x-x_1) + \\ &\quad + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n]\,(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Greška = derivacija greške interp. polinoma

$$f(x) = p_n(x) + e_n(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = p_n'(x) + e_n'(x).$$

Pokazali smo da uz pretpostavku da je f klase $C^{n+1}[a, b]$, greška interpolacijskog polinoma oblika

$$e_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} \, f^{(n+1)}(\xi).$$

$$\begin{aligned} e_n'(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{d}{dx} \Big(\omega(x) \, f^{(n+1)}(\xi) \Big) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\omega'(x) \, f^{(n+1)}(\xi) + \omega(x) \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi(x)) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi(x)) = f^{(n+2)}(\xi(x))\, \xi'(x)$$

- f treba imati ima još jednu neprekidnu derivaciju, tj. f je klase $C^{n+2}[a, b]$.
- što je s ξ'?
- problem možemo malo zaobići ako derivaciju gledamo samo u čvorovima, npr. $x = x_0$.
  Tada je $\omega(x_0) = 0$.
- zbog $\omega'(x_0) = (x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_n)$, pogreška aproksimacije je

$$e_n'(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_n).$$

- Riješili smo problem za pogrešku prve derivacije.
  Ali kako ocijeniti pogrešku za drugu, treću, ... derivaciju?

Drugi pristup za ocjenu pogreške derivacije.

$$e_n(x) = \omega(x)\, f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \frac{f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, x+h] - f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]}{h} \\
= \quad & \lim_{h\to 0} f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, , x, x+h] \\
= \quad & f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, , x, x]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e_n'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\omega(x)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\right) = \\
&= \omega'(x)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] + \omega(x)\frac{d}{dx} f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \\
&= \omega'(x)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] + \omega(x)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x]
\end{aligned}
$$

Jer je $\omega(x_0) = 0$,

$$
\begin{aligned}
e_n'(x_0) &= \omega'(x_0)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0] = \\
&= (x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_n)\, \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

- Nije potrebno da je $f \in C^{n+2}[a, b]$
- Za drugu i višu derivaciju to se neće moći izbjeći.

Treći pristup za ocjenu pogreške derivacije.

$$\| e_n^{(j)} \|_\infty \leq \| \omega^{(j)} \|_\infty \frac{\| f^{(n+1)} \|_\infty}{j!\,(n+1-j)!}$$

$\| \, \|_\infty$ - supremum norma

G.W. Howell, 'Derivative Error Bounds for Lagrange Interpolation: An Extension of Cauchy´s Bound for the Error of Lagrange Interpolation', Journal of Approximation Theory 67, 164-173 (1991)

Dakle, $p_n'(x_0)$ je aproksimacija derivacije funkcije f u točki x_0 i vrijedi

$$f'(x_0) = p_n'(x_0) + e_n'(x_0).$$

Ako označimo s

$$H = \max_k |x_0 - x_k|,$$

onda je

$$|e_n'(x_0)| = \left| (x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_n) \, \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \leq C\,H^n$$

odnosno, za $H \to 0$, greška $e_n'(x_0)$ je reda veličine

$$e_n'(x_0) = O(H^n)$$

To nam pokazuje da aproksimacijska formula za derivaciju može biti proizvoljno visokog reda n, ali takve formule s velikim n imaju ograničenu praktičnu vrijednost.

Najčešće se koristi ekvidistantni izbor točaka: $x_{i+1} - x_i = h$.

Pogreška:

$$
\begin{aligned}
|e_n'(x_s)| &= \frac{1}{(n+1)!} \left|(x_s - x_1) \cdots (x_s - x_n)\, f^{(n+1)}(\xi)\right| = \\
&= \frac{|s(s-1)\ldots(s-(s-1))(s-(s+1))(s-n)|}{(n+1)!} \left|f^{(n+1)}(\xi)\right| h^n = \\
&= C(s) \left|f^{(n+1)}(\xi)\right| h^n.
\end{aligned}
$$

Za $s = 0$ ili $s = n$:

$$
C(0) = C(n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.
$$

$C(s)$ je najmanji kada je s točno u sredini između 1 i n.

Numeričko deriviranje — linearni polinom

Pokažimo kako se ta formula ponaša za niske n.

$n = 1$.

Aproksimacija derivacije je

$$p_1'(x_0) = f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h},$$

pri čemu smo napravili grešku

$$e_1'(x_0) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x_0 - x_1) = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{2}\, h,$$

uz pretpostavku da je $f \in C^2[x_0, x_1]$. Greška je reda veličine $O(h)$ za $h \to 0$.

Numeričko deriviranje — simetrična razlika

$n = 2$.

Za $n = 2$, točke x_1, x_2 možemo uzeti na više raznih načina.

1. Simetrični izbor točaka

Izaberemo x_1 i x_2 simetrično oko x_0

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 - h.$$

Sugestivnija oznaka je

$$x_{-1} := x_2,$$

jer se točke pišu u prirodnom redosljedu: x_{-1}, x_0, x_1. U tom slučaju je

$$p_2'(x_0) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_{-1}]\,(x_0 - x_1).$$

Izračunajmo potrebne podijeljene razlike.

$$
\begin{array}{c|cccc}
t_k & f[t_k] & f[t_k, t_{k+1}] & f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}] \\
\hline
x_{-1} & f_{-1} & & \\
 & & \dfrac{f_0 - f_{-1}}{h} & \\
x_0 & f_0 & & \dfrac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2} \\
 & & \dfrac{f_1 - f_0}{h} & \\
x_1 & f_1 & &
\end{array}
$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$
p_2'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} - h\,\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.
$$

Prethodnu formulu zovemo simetrična (centralna) razlika, jer su točke x_1 i x_{-1} simetrične obzirom na x_0.

Takva aproksimacija derivacije ima bolju ocjenu greške nego obične podijeljene razlike, tj. vrijedi

$$e_2'(x_0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\,(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_{-1}) = -h^2\,\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}.$$

2. Slučaj x_1 i x_2 s iste strane x_0

Rasporedimo, na primjer, x_1 i x_2 desno od x_0,

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 + 2h.$$

Numeričko deriviranje — drugi izbor točaka

Iako su i u ovom slučaju točke ekvidistantne, deriviramo u najljevijoj, a ne u srednjoj točki.

Aproksimacija derivacije u x_0 je

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,(x_0 - x_1) &= \frac{f_1 - f_0}{h} - h\,\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} \\ &= \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h}, \end{aligned}$$

dok je greška jednaka

$$e_2'(x_0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\,(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2) = h^2\,\frac{f^{(3)}(\xi)}{3},$$

tj. greška je istog reda veličine $O(h^2)$, međutim konstanta je dvostruko veća nego u prethodnom (simetričnom) slučaju.

Numeričko deriviranje — aproksimacija druge derivacije

Za aproksimaciju $f''(x_0)$ koristimo

$$p_2''(x_0) = 2 \cdot f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

Formula srednje točke za drugu derivaciju.

Pogreška:

$$f_2''(x_0) = \frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

Pogreška se može izvesti iz izraza za $e_2''(x_0)$.

Za određivanje pogreške se može koristiti i Taylorov razvoj oko x_0.

Uočite da treba vrijediti $f \in C^4$.

I točnost je $O(h^2)$. Ista kao kod aproksimacije za $f'(x_0)$

Očekujemo pogrešku za jedan red manju, $O(h)$.

To je zato jer istu formulu dobijemo ako funkciju interpoliramo kubičnim polinomom!

$$
\begin{aligned}
p_3(x_0) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2]\,(x-x_0)(x-x_1) + \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3]\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
p_3''(x) &= 2f[x_0,x_1,x_2] + \\
&\quad + 2\cdot f[x_0,x_1,x_2,x_3]\,[(x-x_0)+(x-x_1)+(x-x_2)]
\end{aligned}
$$

Ako izaberemo

$$x_1 = x_0 - h \quad \text{i} \quad x_2 = x_0 + h$$

tada je

$$[(x_0-x_0)+(x_0-x_1)+(x_0-x_2)] = 0$$

i

$$p_3''(x_0) = 2f[x_0,x_1,x_2].$$

Isti izraz kao za $p_2''(x_0)$!

Kolika je točnost ako $f \notin C^4$?

Za $f \in C^3$ (Taylorov teorem srednje vrijednosti):

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1) \\ f(x_0-h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2) \end{aligned}$$

$$\frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f_2''(x_0) + \frac{h}{6} \left(f^{(3)}(\xi_1) - f^{(3)}(\xi_2) \right).$$

Pogreška: $O(h)$. Kao što bi očekivali.

Uvjet Rolleovog teorema: C^1? ili derivabilnost?

Ako je f 4 puta derivabilna:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x_0) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(3)}(\xi_1) \\ f(x_0-h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x_0) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(3)}(\xi_2) \end{aligned}$$

$$\frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f_2''(x_0) + \frac{h^2}{12} \frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)}{2}.$$

$$\frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f_2''(x_0) + \frac{h^2}{12}\frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)}{2}.$$

Ako je $f \in C^4$ ($f^{(4)}$ neprekidna)

$$\frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)}{2} = f^{(4)}(\xi)$$

(BW teorem) i

$$\frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f_2''(x_0) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

Sličan slučaj je i sa simetričnom razlikom:

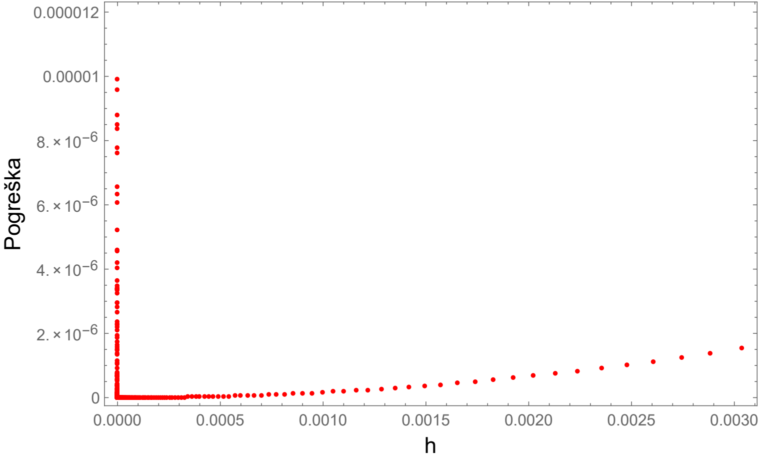
$$f'(x_0) = p_2'(x_0) + e_2'(x_0) = \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - h)}{2h} = f_2''(x_0) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi).$$

Ovo se može interpretirati i kao aproksimacija derivacije linearnog interpolanta u srednjoj točki:

$$p_1'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

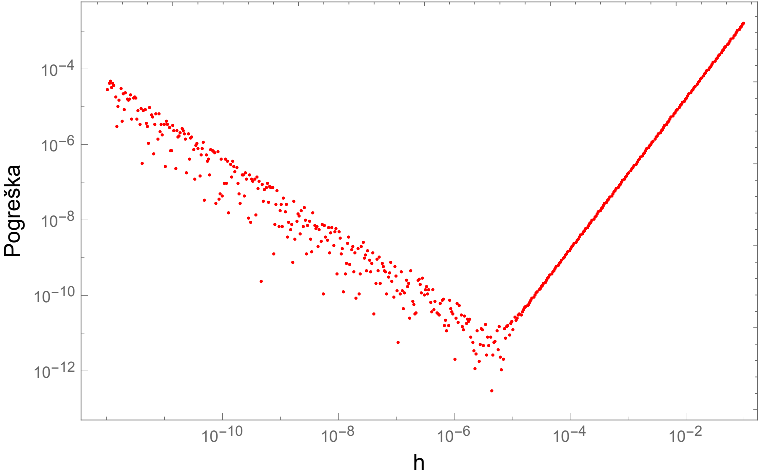
Primjer za simetričnu razliku:

$f(x) = \exp(x)$. Aproksimiramo $f'(0)$.



Za mali h pogreška počinje rasti kada se h smanjuje!

Bolji je log-log prikaz:



Za mali *h* se pojavila pogreška zaokruživanja!

Numeričko deriviranje — numerička stabilnost

Ilustrirajmo to analizom simetrične razlike,

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + e_2'(x_0), \qquad e_2'(x_0) = -h^2 \, \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}.$$

Pretpostavimo da smo, umjesto vrijednosti f_{-1} i f_1, uzeli malo perturbirane vrijednosti

$$\tilde{f}_1 = f_1 + \varepsilon_1, \qquad \tilde{f}_{-1} = f_{-1} + \varepsilon_{-1}, \qquad |\varepsilon_1|, |\varepsilon_{-1}| \leq \varepsilon.$$

Ako odatle izrazimo f_1 i f_{-1} i uvrstimo ih u formulu za derivaciju, dobivamo

$$f'(x_0) = \frac{\tilde{f}_1 - \tilde{f}_{-1}}{2h} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}}{2h} + e_2'(x_0).$$

Prvi član s desne strane je ono što smo mi zaista izračunali kao aproksimaciju derivacije, a ostalo je greška.

Zbog jednostavnosti analize pretpostavimo da je

- h prikaziv u računalu,
- greška pri računanju kvocijenta u podijeljenoj razlici zanemariva.

U tom je slučaju napravljena ukupna greška

$$err_2 = f'(x_0) - \frac{\tilde{f}_1 - \tilde{f}_{-1}}{2h} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}}{2h} + e_2'(x_0).$$

Ogradimo err_2 po apsolutnoj vrijednosti. Greška u prvom članu je najveća ako su ε_1 i ε_{-1} suprotnih predznaka, maksimalne apsolutne vrijednosti ε.

Za drugi član koristimo ocjenu za $e_2'(x_0)$, pa zajedno dobivamo

$$|err_2| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M_3}{6} h^2, \qquad M_3 = \max_{x \in [x_{-1}, x_1]} |f^{(3)}(x)|.$$

Lako se vidi da je ocjena na desnoj strani najbolja moguća, tj. da se može dostići. Označimo tu ocjenu s $e(h)$

$$e(h) := \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M_3}{6} h^2.$$

Teorem

Neka je $f \in C^3$ i neka su a i h dani brojevi. Tada je pogreška za aproksimaciju $f'(a)$ simetričnom razlikom

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

s uključenom pogreškom zaokruživanja i odsjecanja ograničena s

$$\left| f'(a) - \frac{\tilde{f}(a+h) - \tilde{f}(a-h)}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon^*}{h} M_0,$$

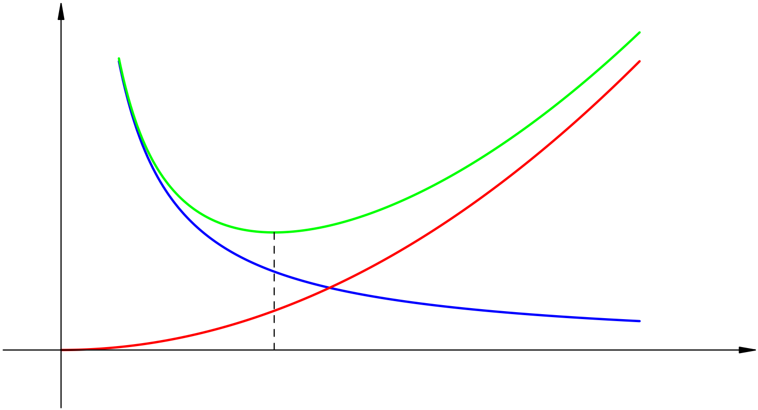
gdje je

$$M_3 = \max_{x \in [a-h, a+h]} \left| f'''(x) \right| \quad i \quad M_0 = \max_{x \in [a-h, a+h]} \left| f(x) \right|.$$

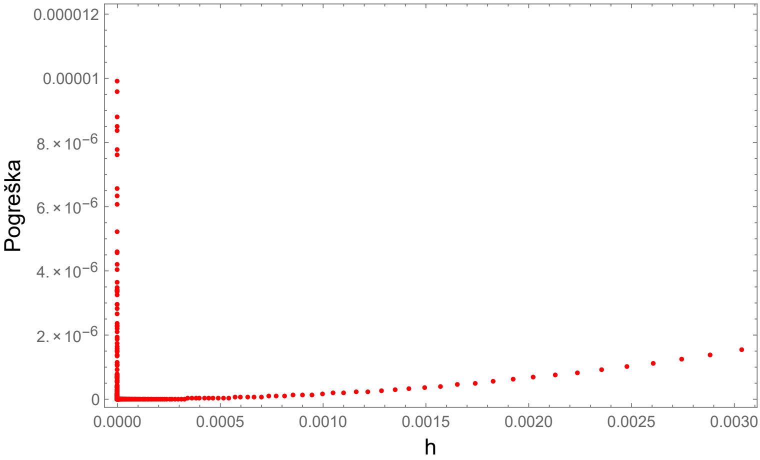
S ε^* je označena točnost računanja.

Legenda:

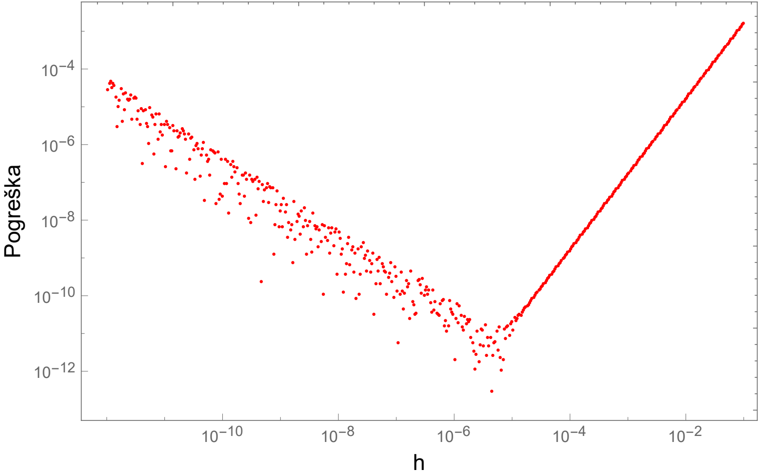
- plava boja — prvi član ε/h oblika hiperbole, koji dolazi od greške u podacima,
- crvena boja — drugi član oblika parabole, koji predstavlja maksimalnu grešku odbacivanja kod aproksimacije derivacije podijeljenom razlikom,
- zelena boja — označava zbroj grešaka $e(h)$.



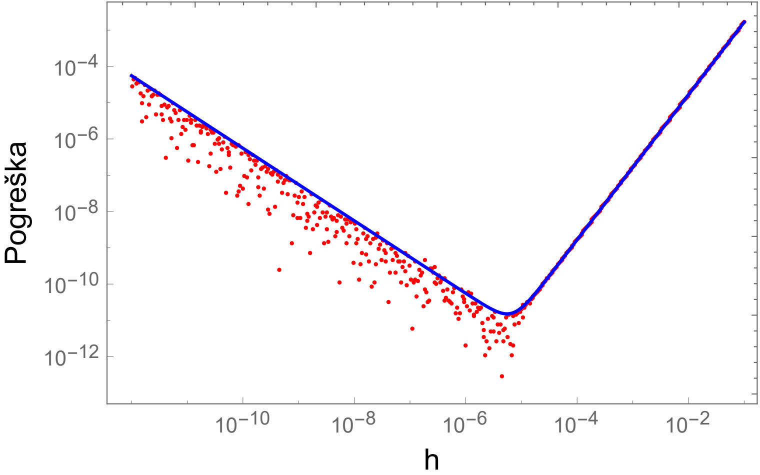
Simetrična razlika za $f(x) = \exp(x)$. Aproksimiramo $f'(0)$.



Simetrična razlika za $f(x) = \exp(x)$. Aproksimiramo $f'(0)$.
Log-log prikaz:



Simetrična razlika za $f(x) = \exp(x)$. Aproksimiramo $f'(0)$.
Prikazujemo i terorijsku ocjenu pogreške (plava krivulja).
Log-log prikaz:



Odmah vidimo da $e(h)$ ima minimum po h. Taj minimum se lako računa, jer iz

$$e'(h) = -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{M_3}{3} h = 0$$

izlazi da se lokalni, a onda (zbog $e''(h) > 0$ za $h > 0$) i globalni minimum postiže za

$$h_0 = \left(\frac{3\varepsilon}{M_3} \right)^{1/3}.$$

Najmanja vrijednost funkcije je

$$e(h_0) = \frac{3}{2} \left(\frac{M_3}{3} \right)^{1/3} \varepsilon^{2/3}.$$

Ukupna greška koju ne očekujemo

To pokazuje da je čak i u najboljem slučaju,

- kad je ukupna greška najmanja, ona je reda veličine $O(\varepsilon^{2/3})$, a ne $O(\varepsilon)$, kao što bismo željeli.

To predstavlja značajni gubitak točnosti.

Posebno, daljnje smanjivanje koraka h samo povećava grešku!

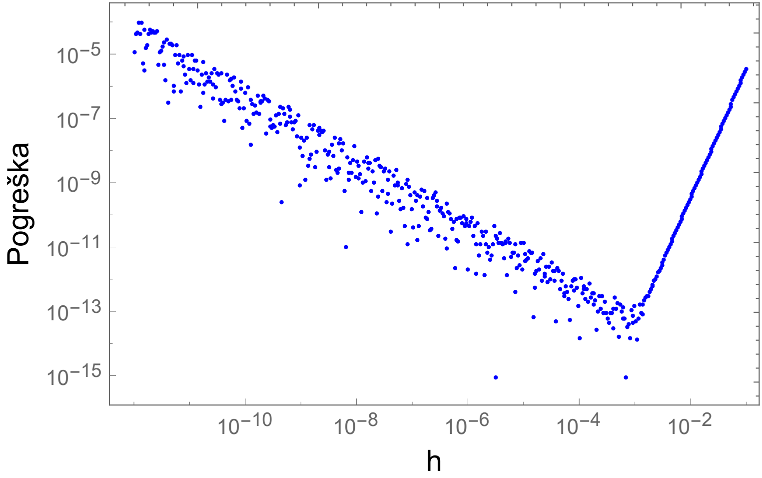
Isti problem se javlja, i to u još ozbiljnijem obliku, u formulama višeg reda za aproksimaciju derivacija.

Kako se ponaša aproksimacija višeg reda?

Npr. formula s 5 točaka (aproksimacija polinomom stupnja 4):

$$f'(a) = \frac{f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)}{12h} + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi).$$

$f(x) = \exp(x)$. Aproksimiramo $f'(0)$ s formulom reda 4.
Log-log prikaz:



Teorem

Neka je $f \in C^5$ i neka su a i h dani brojevi. Tada je pogreška za aproksimaciju $f'(a)$

$$f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)}{12h}$$

s uključenom pogreškom zaokruživanja i odsjecanja ograničena s

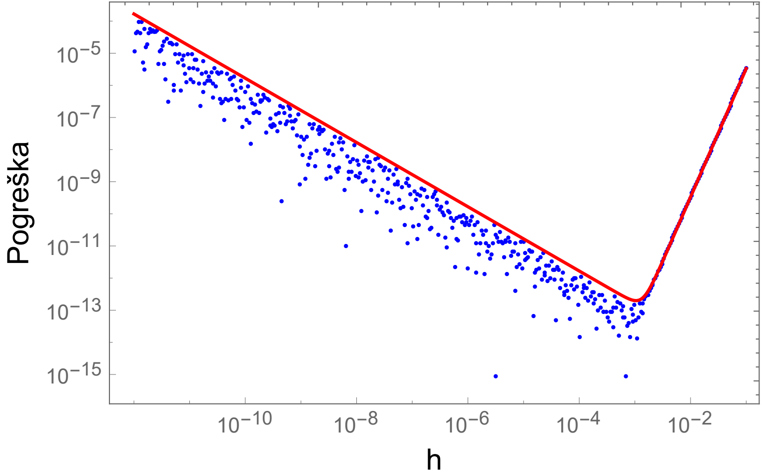
$$\left| f'(a) - \frac{\tilde{f}(a-2h) - 8\tilde{f}(a-h) + 8\tilde{f}(a+h) - \tilde{f}(a+2h)}{12h} \right| \leq$$

$$\leq \frac{h^4}{30} M_5 + \frac{3\varepsilon^*}{h} M_0,$$

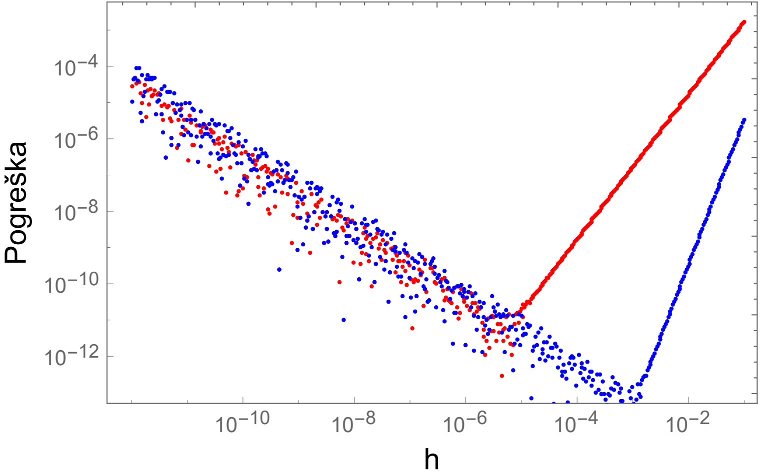
gdje je

$$M_5 = \max_{x \in [a-h, a+h]} \left| f^{(5)}(x) \right| \quad i \quad M_0 = \max_{x \in [a-h, a+h]} |f(x)| .$$

$f(x) = \exp(x)$. Aproksimiramo $f'(0)$ s formulom reda 4.
Prikazujemo i terorijsku ocjenu pogreške (crvena krivulja).
Log-log prikaz:



$f(x) = \exp(x)$. Aproksimiramo $f'(0)$ s formulom reda 2 i formulom reda 4.
Log-log prikaz:



Izbor optimalnog h

Za simetričnu razliku smo vidjeli da pogreška zadovoljava

$$|e(h)| \leq \frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon^*}{h} M_0,$$

gdje je

$$M_3 = \max_{x \in [a-h, a+h]} \left| f'''(x) \right| \quad \text{i} \quad M_0 = \max_{x \in [a-h, a+h]} |f(x)| \, .$$

Pogreška $e(h)$ dostiže minimum za

$$h_0 = \left(\frac{3\,\varepsilon^* M_0}{M_3} \right)^{1/3}.$$

Najmanja vrijednost funkcije je

$$e(h_0) = \frac{3}{2} \left(\frac{M_3}{3\,M_0} \right)^{1/3} \varepsilon^{*2/3}.$$

Za određivanje

$$h_0 = \left(\frac{3\,\varepsilon^* M_0}{M_3} \right)^{1/3}$$

trebali bismo poznavati, uz vrijednost funkcije, i vrijednost 3. derivacije.

I naći maksimum na intervalu $[a-h, a+h]$!

Ovo se može izbjeći jer je h malen i

$$M_3 = \max_{x \in [a-h, a+h]} \left| f'''(x) \right| \approx \left| f'''(a) \right| \quad \text{i} \quad M_0 = \max_{x \in [a-h, a+h]} |f(x)| \approx |f(a)| \,.$$

Aproksimiramo f' a kako ćemo odrediti f'''?

Za neki h vrijedi

$$\begin{aligned} f'(a) &= p_2'(a;h) + e_2(h) \quad \text{i} \\ f'(a) &= p_2'(a;h/2) + e_2(h/2). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem desnih strana slijedi da je

$$p_2'(a;h) - p_2'(a;h/2) = e_2(h/2) - e_2(h) = \frac{h^2}{24} f'''(a) - \frac{h^2}{6} f'''(a) = -\frac{h^2}{8} f'''(a).$$

Dakle,

$$M_3 \approx \frac{8}{h^2} \left| p_2'(a;h) - p_2'(a;h/2) \right| .$$

Sada možemo izračunati

$$h_0 = \left(\frac{3\,\varepsilon^* M_0}{M_3} \right)^{1/3}.$$

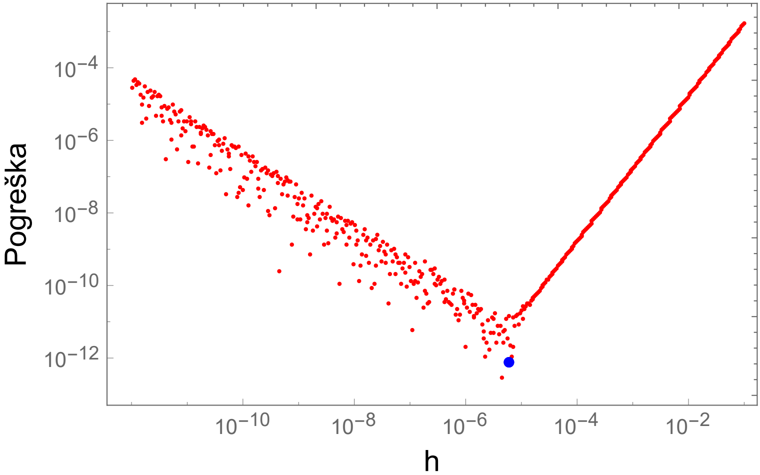
Za $f(x) = \exp(x)$ i $a = 0$ je $h_0 = 5.94 \cdot 10^{-6}$.

Rezultirajuća pogreška je $7.42 \cdot 10^{-13}$.

Gornja granica za pogrešku je $e(h_0) = 1.77 \cdot 10^{-11}$.

Grafički prikaz:

Optimalni izbor h_0 (plava točka).



Numeričko deriviranje — zaključci

Formula za derivaciju

- postaje sve točnija što su bliže točke iz kojih se derivacija aproksimira, tj. što je h manji.

To vrijedi samo teoretski.

Ako su podaci mjereni i sadrže neku pogrešku $\longrightarrow$ izglađivanje (MNK) a ne interpolacija

Osnovu numeričkog deriviranja čine podijeljene razlike,

- ako su točke bliske, dolazi do kraćenja. Do kraćenja mora doći, zbog neprekidnosti funkcije f.

Problem je to izrazitiji, što su točke bliže, tj. što je h manji.

Dakle, imamo dva oprečna zahtjeva na veličinu h. Manji h daje bolju ocjenu greške, ali veću grešku zaokruživanja.