APROKSIMACIJA I INTERPOLACIJA

27. svibnja 2023.

Sadržaj predavanja

- Aproksimacija i interpolacija:
    - Uvod u problem aproksimacije.
    - Problem interpolacije polinomima.
    - Egzistencija i jedinstvenost.
    - Izbor baze — potencije i Vandermondeova determinanta.
    - Lagrangeova baza.
    - Računanje Lagrangeovog oblika IP.
    - Ocjena pogreške za dovoljno glatke funkcije.
    - Newtonova baza.
    - Računanje Newtonovog oblika IP.

Sadržaj predavanja

- Aproksimacija i interpolacija (nastavak):
  - Newtonov oblik IP za ekvidistantne čvorove, konačne razlike.
  - Koliko je dobar interpolacijski polinom?
  - Primjer Runge.
  - Optimalni izbor čvorova i Čebiševljeva mreža.
  - Hermiteova interpolacija.
  - Uvod u polinomnu spline interpolaciju.
  - Linearni spline i ocjena greške.

Primjer

Neka je f funkcija koju želimo izračunati u nekim točkama, ali

- funkcija je presložena za računanje
- nemamo analitički izraz za funkciju
- ili ...

Poznate su neke informacije o funkciji f.

Na osnovu tih informacija, želimo funkciju f

- zamijeniti nekom drugom funkcijom φ koju možemo (brže) izvrednjavati;
- tako da su funkcije f i φ bliske u nekom smislu.

Oblici problema aproksimacije

Kako izračunati

- $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{t^2/2}dt$?
- $f(x) = \exp x$ na računalu?
- kako reprezentirati krivulju na računalu?
- izvesti algoritam za računanje $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ gdje je f proizvoljna funkcija (numeričko integriranje)
- ...

Interpolacija polinomima

Neka je funkcija f zadana na

- diskretnom skupu različitih točaka x_k, za $k = 0, \dots, n$, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- funkcijske vrijednosti u tim točkama skraćeno označavamo s $f_k = f(x_k)$.

Komentar. Kad bismo dozvolili $x_i = x_j$ za $i \neq j$,

- ili f nije funkcija (ako je $f_i \neq f_j$)
- ili imamo redundantan podatak (ako je $f_i = f_j$).

Ovo nije apsolutno točno. O tome malo kasnije. Ako je $[a, b]$ segment,

u praksi su točke obično numerirane tako da je

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b.$$

Interpolacijski problem

Za zadane točke (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$, $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, odredite polinom $\varphi \in \mathcal{P}_n$, stupnja najviše n

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ovaj polinom nazivamo interpolacijski polinom.

Slično, ako je zadana funkcija f, tražimo

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Kažemo da polimom p_n interpolira funkciju f u točkama $(x_k)_k$.

- Uz koje uvjete postoji interpolacijski polinom?
- Je li jedinstven?

Odgovor daje sljedeći teorem.

Egzistencija i jedinstvenost

Teorem

Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Za zadane točke* (x_k, f_k)*,* $k = 0, \ldots, n$*, gdje je* $x_i \neq x_j$ *za* $i \neq j$*, postoji jedinstveni interpolacijski polinom* $\varphi \in \mathcal{P}_n$*, stupnja najviše* n

$$\varphi(x) := p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

za koji vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Dokaz: Neka je

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

polinom stupnja najviše n.

Uvjete interpolacije napišimo u obliku linearnog sustava s nepoznanicama $a_0, \ldots, a_n$,

$$\begin{aligned}
p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f_0 \\
p_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = f_1 \\
\cdots & \quad \cdots \quad \cdots \\
p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f_n.
\end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je matrica ovog sustava regularna, pa sustav ima jedinstveno rješenje.

Determinanta sustava je tzv. Vandermondeova determinanta

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

$$D_n = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

(Ovo pokažite sami.)

Budući da je $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$, onda je

$$D_n \neq 0,$$

tj. matrica linearnog sustava je regularna, pa

- postoji jedinstveno rješenje $a_0, \ldots, a_n$ za koeficijente polinoma p_n,

odnosno jedinstveni interpolacijski polinom. □

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[-1, 1]$,

$$x_i^{(n)} = -1 + \frac{2}{n} \cdot i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$1.000 \cdot 10^0$
2	$3.226 \cdot 10^0$
3	$8.012 \cdot 10^0$
4	$2.353 \cdot 10^1$
5	$6.383 \cdot 10^1$
6	$1.898 \cdot 10^2$
7	$5.354 \cdot 10^2$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
8	$1.605 \cdot 10^3$
10	$1.395 \cdot 10^4$
12	$1.234 \cdot 10^5$
14	$1.105 \cdot 10^6$
16	$9.983 \cdot 10^6$
18	$9.085 \cdot 10^7$
20	$8.314 \cdot 10^8$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
25	$2.131 \cdot 10^{11}$
30	$5.642 \cdot 10^{13}$
35	$1.496 \cdot 10^{16}$
40	$4.044 \cdot 10^{18}$
45	$1.093 \cdot 10^{21}$
50	$2.989 \cdot 10^{23}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
60	$2.253 \cdot 10^{28}$
70	$1.722 \cdot 10^{33}$
80	$1.329 \cdot 10^{38}$
90	$1.033 \cdot 10^{43}$
100	$8.083 \cdot 10^{47}$

Matrica je loše uvjetovana.

Izbor baze i matrica sustava

Ako u prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ izaberemo bazu $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, onda interpolacijski polinom p_n možemo prikazati u obliku

$$p_n = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x).$$

Linearni sustav za nepoznate koeficijente $a_0, \ldots, a_n$ ima oblik

$$\begin{aligned}
p_n(x_0) &= a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \quad \cdots + a_n\varphi_n(x_0) = f_0 \\
p_n(x_1) &= a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \quad \cdots + a_n\varphi_n(x_1) = f_1 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots \\
p_n(x_n) &= a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \quad \cdots + a_n\varphi_n(x_n) = f_n.
\end{aligned}$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Definirajmo polinome:

$$\begin{aligned}\ell_k(x) &= \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})\,(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})\,(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} := \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, \quad k=0,\ldots,n.\end{aligned}$$

Očito, ovi polinomi zadovoljavaju

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

i polinomi ℓ_k su stupnja n,

Lagrangeove baza $\{\ell_k, k=0,\ldots,n\}$ prostora polinoma $\mathcal{P}_n$

Interpolacijski polinom p_n možemo zapisati u obliku

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x).$$

Očito vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k,$$

Iz oblika ℓ_k vidi se da je za računanje polinoma u Lagrangeovoj formi potrebno $\mathcal{O}(n^2)$ operacija.

Polinom

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

zovemo polinom čvorova.

Polinome $\ell_k(x)$ Lagrangeove baze možemo napisati preko $\omega(x)$,

$$\ell_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega_k(x_k)}.$$

Nadalje, lako se vidi da je

$$\omega_k(x_k) = \omega'(x_k),$$

pa je

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}.$$

Forma

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}$$

se može koristiti za računanje vrijednosti polinoma u točki $x \neq x_k$.

Linearni broj operacija $O(n)$ za svaku točku x.

Ipak, svrha Lagrangeovog interpolacijske forme

- nije računanje vrijednosti u točki,
- već se uglavnom koristi za teoretske svrhe

Egzistencija i jedinstvenost interpolacijskog polinoma. Još jednom.

Pomoću Lagrangeove forme smo zapravo dokazali egzistenciju interpolacijskog polinoma.

Jedinstvenost slijedi iz teorema o nul-polinomu.

Neka su f i g dva polinoma stupnja najviše n koji zadovoljavaju interpolacijske uvjete

$$f(x_k) = f_k \quad \text{i} \quad g(x_k) = f_k \quad \text{za } k = 0, \ldots n$$

Tada je polinom $h = f - g$ najviše stupnja n i zadovoljava

$$h(x_k) = 0 \quad \text{za } k = 0, \ldots n.$$

h ima $n + 1$ nul-točku $\quad \Longrightarrow \quad$ h je nul-polinom.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

- nije pogodan za povećanje stupnja interpolacijskog polinoma.

Postoji Newtonova forma interpolacijskog polinoma

- koja se izvodi tako da se interpolacijskom polinomu dodaju nove točke interpolacije, tj. povećava se stupanj interpolacijskog polinoma.

Interpolacijski polinom stupnja 0

Nađimo konstantu koja interpolira funkciju f u točki x_0. Očito

$$p_0(x) = f_0.$$

Interpolacijski polinom stupnja 1

Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_1.

Polinom p_1 napišimo kao zbroj polinoma p_0 i korekcije r_1,

$$p_1(x) = p_0(x) + r_1(x).$$

Uočimo

- r_1 mora biti stupnja 1;
- iz uvjeta interpolacije u x_0 imamo

$$f_0 = p_1(x_0) = p_0(x_0) + r_1(x_0) = f_0 + r_1(x_0),$$

  tj. mora biti $r_1(x_0) = 0$, odnosno r_1 mora imati oblik

$$r_1(x) = a_1(x - x_0),$$

- iz uvjeta interpolacije u x_1 imamo

$$f_1 = p_1(x_1) = p_0(x_1) + r_1(x_1) = f_0 + r_1(x_1),$$

tj. mora biti $r_1(x_1) = f_1 - f_0$, pa je

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Interpolacijski polinom stupnja 2

Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_2.
Polinom p_2 napišimo kao zbroj polinoma p_1 i korekcije r_2,

$$p_2(x) = p_1(x) + r_2(x).$$

Uočimo

- r_2 mora biti stupnja 2;
- iz uvjeta interpolacije u x_0 i x_1 imamo

  $$f_k = p_2(x_k) = p_1(x_k) + r_2(x_k) = f_k + r_2(x_k), \quad k = 0, 1$$

  tj. mora biti $r_1(x_k) = 0$, odnosno r_2 mora imati oblik

  $$r_2(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1),$$

- koeficijent a_2 računamo iz uvjeta interpolacije u x_2.

Nastavimo li postupak, konstriurali smo interpolacijski polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k),$$

tj. konstruirali smo “donju trokutastu” Newtonovu bazu

$$1, \;\; (x - x_0), \;\; (x - x_0)(x - x_1), \;\; \ldots, \;\; \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)$$

u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n.

Sada samo treba odrediti koeficijente a_k.

Već smo pokazali da je

$$a_0 = f_0, \quad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Budući da dižemo stupanj interpolacijskog polinoma, onda a_k ovisi samo o funkciji f i točkama $x_0, \ldots, x_k$.

Oznaka:

$$a_k = f[x_0, \ldots, x_k],$$

a veličinu $f[x_0, \ldots, x_k]$ zovemo k-ta podijeljena razlika.

Katkad se koristi "operatorska" oznaka $[x_0, \ldots, x_k]f$.

Podijeljene razlike

Lema

Za međusobno različite točke $x_0, \ldots, x_n$, podijeljena razlika $f[x_0, \ldots, x_n]$ ne ovisi o permutaciji točaka σ, tj.

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

Dokaz: Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

- s a_k ako je poredak točaka $x_0, \ldots, x_n$,
- s b_k ako je poredak točaka $x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_{\sigma(0)}) + \cdots + b_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

Budući da se radi o istom polinomu

- koeficijenti uz odgovarajuće potencije moraju biti jednaki;
- uspoređivanjem koeficijenata uz x^n vidimo da je $a_n = b_n$. $\square$

Ostaje još samo pitanje kako efikasno računati $f[x_0, \ldots, x_n]$.

Lema

Za podijeljene razlike vrijedi sljedeća rekurzija

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

s tim da je $f[x_k] = f_k$.

Dokaz: Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

- s a_k ako je poredak točaka $x_0, \ldots, x_n$,
- s b_k ako je poredak točaka $x_n, \ldots, x_0$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_n) + \cdots + b_n \prod_{k=1}^{n}(x - x_k). \end{aligned}$$

U prethodnoj lemi je dokazano da je $a_n = b_n$. Usporedimo sad koeficijente uz x^{n-1}.

Koeficijent uz x^{n-1} dobivamo kao zbroj dva koeficijenta:

- koeficijent uz pretposljednji član u p_n, što je a_{n-1} u jednom slučaju, a b_{n-1} u drugom,
- u posljednjem članu — u produktu faktora $\prod_{k=\cdots}^{\cdots}(x - x_k)$, uzmemo iz jedne zagrade $-x_k$, a iz svih ostalih x,

odnosno

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - b_n \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Uvažimo da je $a_n = b_n$

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - a_n \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

pa dobivamo

$$b_{n-1} - a_{n-1} = a_n(x_n - x_0),$$

ili

$$a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{x_n - x_0}.$$

Budući da je

$$\begin{aligned} a_n &= f[x_0, \ldots, x_n], \\ a_{n-1} &= f[x_0, \ldots, x_{n-1}], \\ b_{n-1} &= f[x_n, \ldots, x_1] = f[x_1, \ldots, x_n], \end{aligned}$$

odmah izlazi tražena rekurzija.

Start rekurzije je $f[x_k] = f_k$, što se vidi iz konstantnog interpolacijskog polinoma.

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] & \cdots & f[x_0, \ldots, x_n] \\
\hline
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & f[x_0, \ldots, x_n] \\
 & & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & & \cdots & \\
x_{n-1} & f[x_{n-1}] & & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Konačni izgled Newtonovog interpolacijskog polinoma

$$
\begin{aligned}
p_n(x) \quad = \quad & f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\
& + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\
& + \cdots + \; f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Od tablice podijeljenih razlika treba nam samo “gornji rub”.
To se može izračunati u jednom jednodimenzionalnom polju. Nakon završetka algoritma za računanje podijeljenih razlika

- “gornji rub” $f[x_0, \ldots, x_i]$ se nalazi redom u polju `f`.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma u nekoj točki x ima oblik Hornerove sheme.

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Newtonova forma interpolacijskog polinoma može se pojednostavniti

- ako su čvorovi ekvidistantni.

Newtonov interpolacijski polinom:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Pojednostavljenje računanja u

- podijeljenim razlikama $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$,
- faktoru $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$.

Ekvidistantni čvorovi — konačne razlike

Ekvidistantni čvorovi:

$$x_j = x_0 + j \cdot h, \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Konačna razlika unaprijed:

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j.$$

Operator Δ zovemo operator konačnih razlika unaprijed.

Konačnu razliku reda k, za $k \in \mathbb{N}$, definiramo rekurzivno kao

$$\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j,$$

uz dogovor (definiciju) $\Delta^0 f_j = f_j$.

Podijeljene i konačne razlike

Veza podijeljenih i konačnih razlika.

Lema

Lema. Ako su točke x_j ekvidistantne, za bilo koji $k \geq 0$ vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!\, h^k}\, \Delta^k f_j.$$

Dokaz: Indukcijom po redu k. $\square$

Pojednostavnimo još faktor $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$.

Definirajmo

$$s = \frac{x - x_0}{h},$$

odnosno

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

Tada je

$$x - x_j = x_0 + s \cdot h - (x_0 + j \cdot h) = (s - j)h,$$

pa je

$$\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = \prod_{j=0}^{k-1} \big((s - j)h\big) = h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s - j).$$

Po definiciji binomnih koeficijenata, s tim da smije biti i $s \in \mathbb{R}$, imamo

$$\binom{s}{0} := 1, \qquad \binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}, \quad k > 0.$$

Odavde odmah slijedi da je

$$h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s-j) = h^k k! \binom{s}{k}$$

Sada možemo napisati Newtonov oblik interpolacijskog polinoma s ekvidistantnim čvorovima.

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Interpolacijski polinom:

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\
&\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \\
&= \Delta^0 f_0 + \binom{s}{1} \Delta^1 f_0 + \cdots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0,
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$s = \frac{x - x_0}{h}.$$

Ekvidistantni čvorovi — tablica konačnih razlika

Tablica svih potrebnih konačnih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f_k & \Delta f_k & \Delta^2 f_k & \cdots & \Delta^n f_k \\
\hline
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \Delta^n f_0 \\
 & & \Delta f_{n-2} & & & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-2} & & \\
 & & \Delta f_{n-1} & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

Kao i kod podijeljenih razlika.

Hermiteova polinomna interpolacija

Osim interpolacije funkcijskih vrijednosti funkcije f u čvorovima x_k,

- možemo tražiti da interpolacijski polinom h interpolira i derivaciju f' u čvorovima x_k.

Dakle, zahtijevamo da je

$$h(x_k) = f(x_k), \quad h'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Takva vrsta interpolacije zove se Hermiteova interpolacija.

Ipak, treba odgovoriti na nekoliko važnih pitanja:

- postoji li takav interpolacijski polinom;
- ako postoji je li jedinstven;
- ako postoji, kojeg je stupnja.

Promotrimo problem na drugi način.

Interpolacijski problem s 2 točke:

$$
\begin{aligned}
p_1(x_0) &= f(x_0) \\
p_1(x_1) &= f(x_1)
\end{aligned}
$$

Pravac kroz dvije točke!

Što se događa u graničnom slučaju kada $x_1 \to x_0$?

Interpolacijski pravac (sekanta) prelazi u tangentu u točki x_0.

Međutim, interpolacijski uvjeti u graničnom slučaju glase:

$$
\begin{aligned}
p_1(x_0) &= f(x_0) \\
p_1(x_0) &= f(x_0)
\end{aligned}
$$

Samo jedan uvjet!?

Napišimo interpolacijske uvjete pomoću podijeljenih razlika:

$$\begin{aligned} p_1[x_0] &= f[x_0] \\ p_1[x_0, x_1] &= f[x_0, x_1] \end{aligned}$$

Što se događa u graničnom slučaju kada $x_1 \to x_0$?

Podijeljena razlika prelazi u:

$$\lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

Interpolacijski uvjeti u graničnom slučaju glase:

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= f(x_0) \\ p_1'(x_0) &= f'([x_0) \end{aligned}$$

Hermiteova interpolacija!

Proširimo definiciju podijeljenih razlika s

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f^{(n)}(x_0) \quad \text{za } x_0 = x_1 = \ldots = x_n.$$

Interpolacijske uvjete sada pišemo u obliku:

$$p_n[x_0, \ldots, x_k] = f[x_0, \ldots, x_k] \quad \text{za } k = 0, \ldots, n.$$

Egzistencija i jedinstvenost?

Jedinstvenost - kao i u Lagrangeovoj interpolaciji preko teorema o nul polinomu, jedino su neke nultočke polinoma $p - q$ višestruke.

Egzistencija - koristimo zapis u Newtonovoj formi

Baza za Hermiteovu interpolaciju

Tražimo bazu sličnu Lagrangeovoj bazi, tj. polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ za koje vrijedi

$$h_{k,0}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases} \qquad h'_{k,0}(x_i) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_i) = 0, \qquad h'_{k,1}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Ako nađemo $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, onda je

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x) \right).$$

Polinomi $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ su dani s

$$\begin{aligned} h_{k,0}(x) &= [1 - 2(x - x_k)\ell_k'(x_k)]\,\ell_k^2(x) \\ h_{k,1}(x) &= (x - x_k)\,\ell_k^2(x), \end{aligned}$$

gdje je ℓ_k odgovarajući polinom Lagrangeove baze.

Provjera da vrijednosti $h_{k,0}(x_i)$, $h'_{k,0}(x_i)$, $h_{k,1}(x_i)$ i $h'_{k,1}(x_i)$ zadovoljavaju traženo vrši se direktno, uvrštavanjem.

Budući da je ℓ_k polinom stupnja n, onda

- su $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ stupnja $2n + 1$,
- pa je h_{2n+1} stupnja najviše $2n + 1$.

Preskakanje derivacija u interpolaciji

Ako dozvolimo “preskakanje” nekih derivacija u nekim točkama,

- problem interpolacije ne mora uvijek imati rješenje.

Primjer. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost interpolacijskog polinoma $p \in \mathcal{P}_2$, za kojeg vrijedi

$$p(x_0) = f_0, \quad p'(x_1) = f_1', \quad p(x_2) = f_2,$$

gdje su (x_0, f_0), (x_1, f_1') i (x_2, f_2) zadane točke, uz pretpostavku da je $x_0 \neq x_2$.

Rješenje. Mora biti $x_1 \neq (x_0 + x_2)/2$.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Teorem

Pretpostavimo da

- *funkcija f ima $(n+1)$-u derivaciju na segmentu $[a,b]$ za neki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;*
- *$x_k \in [a,b]$, $k = 0, \ldots, n$, su međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;*
- *p_n je interpolacijski polinom za f u tim čvorovima.*

Za bilo koju točku $x \in [a,b]$ postoji točka ξ

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \ldots, x_n, x\} =: x_{\max}$$

takva da za grešku interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Dokaz:

1. slučaj — $x = x_k$ je čvor interpolacije

Tada je $\omega(x_k) = 0$, pa su obje strane posljednje relacije jednake 0, a ξ je proizvoljan.

2. slučaj — x nije čvor interpolacije

Tada je $\omega(x) \neq 0$ i grešku interpolacije prikazujemo u obliku

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \omega(x)s(x),$$

s time da je $s(x)$ korektno definiran čim x nije čvor.

Fiksirajmo x i definiramo funkciju u varijabli t

$$g(t) = e(t) - \omega(t)s(x) = e(t) - \omega(t)\,\frac{e(x)}{\omega(x)}, \quad t \in [a, b].$$

Zaključak:

- funkcija pogreške e ima točno onoliko derivacija (po t) koliko i f, i one su neprekidne kad su to i derivacije od f;
- x nije čvor, pa je $g^{(n+1)}$ korektno definirana na $[a, b]$.

Nađimo koliko nultočaka ima funkcija g.
Ako za t uvrstimo x_k, dobivamo

$$g(x_k) = e(x_k) - \omega(x_k)\,\frac{e(x)}{\omega(x)} = 0, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Jednako tako je i

$$g(x) = e(x) - e(x) = 0.$$

Drugim riječima, g ima barem $n+2$ nultočke na $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Budući da je g derivabilna na $[x_{\min}, x_{\max}]$,

- Rolleov teorem $\implies$ g' ima barem $n+1$ nultočku unutar $\langle x_{\min}, x_{\max}\rangle$.

Induktivnom primjenom Rolleovog teorema zaključujemo da

- $g^{(j)}$ ima bar $n+2-j$ nultočaka na $\langle x_{\min}, x_{\max}\rangle$, za $j = 0, \ldots, n+1$;
- za $j = n+1$ dobivamo da $g^{(n+1)}$ ima bar jednu nultočku $\xi \in \langle x_{\min}, x_{\max}\rangle$.

Nadalje,

- p_n je polinom stupnja najviše n, pa je $p_n^{(n+1)} = 0$,
- ω je polinom stupnja $n+1$,

pa je

$$e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t), \quad \omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!.$$

Uvrštavanjem $e^{(n+1)}(t)$ u $(n+1)$-u derivaciju za g dobivamo

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= e^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t)\,\frac{e(x)}{\omega(x)} \\ &= f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{e(x)}{\omega(x)}. \end{aligned}$$

Konačno, ako uvažimo da je $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, onda je

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,\frac{e(x)}{\omega(x)},$$

odnosno

$$e(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi),$$

što smo trebali dokazati. $\square$

Ako je $f^{(n+1)}$

- ograničena na $[a, b]$,
- ili, jače, ako je $f \in C^{n+1}[a, b]$, tj. f ima neprekidnu $(n+1)$-u derivaciju na $[a, b]$ ...

onda se iz prethodnog teorema dobiva sljedeća ocjena greške interpolacijskog polinoma za funkciju f u točki $x \in [a, b]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad M_{n+1} := \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Ova ocjena slijedi direktno iz teorema, a korisna je ako relativno jednostavno možemo

- izračunati ili odozgo ocijeniti vrijednost M_{n+1}.

Grešku interpolacijskog polinoma možemo pisati korištenjem podijeljenih razlika.

Ideja. Dodajmo još jedan čvor x_{n+1} u Newtonov oblik polinoma, tako da je $x_{n+1} \in \langle a, b \rangle$, s tim da x_{n+1} nije jednak ni jednom od polaznih čvorova $x_0, \ldots, x_n$.

Tada je

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\
&\quad + \cdots + \; f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \\
&\quad + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]\,(x - x_0)\cdots(x - x_n). \\
&= p_n(x) + (x - x_0)\cdots(x - x_n)\,f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}].
\end{aligned}$$

Budući da je

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1}),$$

onda je

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= p_n(x_{n+1}) \\ &\quad + (x_{n+1} - x_0) \cdots (x_{n+1} - x_n)\, f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \\ &= p_n(x_{n+1}) + \omega(x_{n+1})\, f[x_0, \ldots, x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Usporedimo to s ocjenom greške (napisanoj u točki x_{n+1}, a ne x)

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = \frac{\omega(x_{n+1})}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi),$$

za neki $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Iz prethodne formule odmah čitamo da je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ova se formula uobičajeno piše u ovisnosti o varijabli x, (tj. x_{n+1} se zamijeni s x), pa je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Zanimljivo je da ova formula vrijedi i kad čvorovi nisu međusobno različiti (v. Hermiteova interpolacija).

Iz formule

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

direktno izlazi još i ovaj rezultat.

Korolar

Korolar. Ako je $f \in \mathcal{P}_n$ polinom stupnja najviše n, onda je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = 0, \quad \mathit{za} \quad k \geq n+1,$$

za bilo koji izbor točaka $x_0, \ldots, x_k$.

Dokaz: Tada je $f^{(k)}(\xi) = 0$ u svakoj točki ξ. □

Koliko je dobar interpolacijski polinom?

U praksi se obično koriste

- interpolacijski polinomi niskih stupnjeva — do 5.

Zašto?

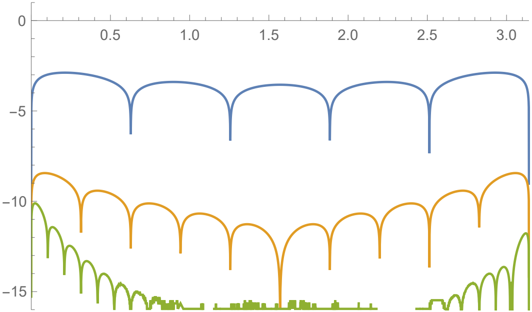
Za neke funkcije i za neke izbore točaka interpolacije, povećavanje stupnja interpolacijskog polinoma

- može dovesti do povećanja grešaka.

Promotrimo nekoliko karakterističnih primjera.

Primjer — sinus funkcija

$\log_{10} |\sin x - p_n(x)|, \qquad n = 5, 10, 30$



Pravilno ponašanje pogreške.

Primjer — logaritamska funkcija

$$f(x) = \log_{10}(x)$$

na ekvidistantnoj mreži za $x \in [0.1, 10]$.

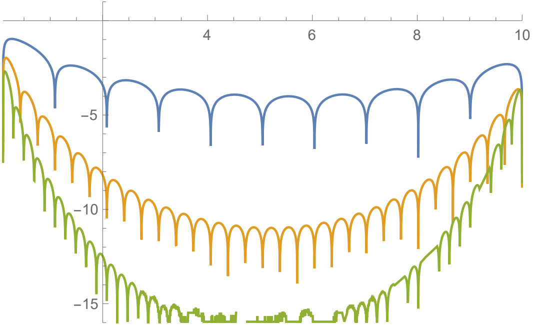
Primijetit ćete da je greška interpolacije

- najveća na prvom intervalu.

Razlog: funkcija $\log_{10}(x)$ ima singularitet u 0, a početna točka interpolacije 0.1 je vrlo blizu tog singulariteta.

Primjer — logaritamska funkcija

$$\log_{10} |\log_{10} x - p_n(x)|, \qquad n = 10, 30, 50$$



Primjer Runge

Njemački matematičar Runge prvi je uočio

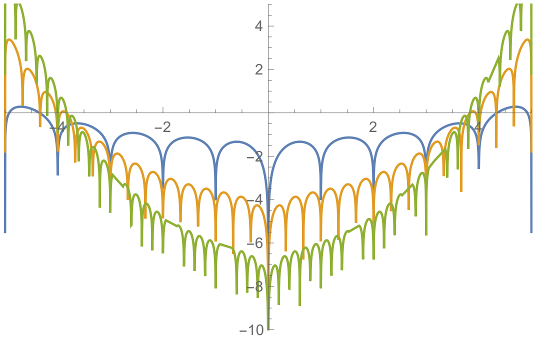
- probleme koji nastupaju kod interpolacije polinomima na ekvidistantnoj mreži.
- Konstruirao je funkciju — poznatu kao funkcija Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{na} \quad [-5, 5],$$

takvu da niz interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži ne konvergira prema toj funkciji.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža

$$\log_{10}\left|\frac{1}{1+x^2} - p_n(x)\right|, \qquad n = 10, 30, 50$$



Analiza

Za primjer Runge može se provesti pažljiva analiza (vidi skriptu) i pokazati da

- čim je $|x| > 3.63$, a interpolira se u ekvidistantnim točkama, niz interpolacijskih polinoma divergira.

Sljedeći primjer pokazuje da postoji još gora situacija — niz interpolacijskih polinoma konvergira samo u 3 točke.

Primjer. (Bernstein, 1912.) Neka je

$$f(x) = |x|$$

i neka je p_n interpolacijski polinom u $n+1$ ekvidistantnih točaka na $[-1, 1]$. Tada $|f(x) - p_n(x)| \to 0$, kad $n \to \infty$, samo u tri točke: $x = -1$, 0, 1.

Sljedeći teorem ukazuje na to da je

- nemoguće naći takav izbor točaka interpolacije polinomima, koji bi bio dobar za svaku funkciju.

Teorem

(Faber, 1914.) Za svaki mogući izbor točaka interpolacije, postoji neprekidna funkcija f, za čiji niz interpolacijskih polinoma p_n, stupnja n, vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \not\to 0.$$

Nema (uniformne) konvergencije!

Greška interpolacije — što se može učiniti?

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$.

U bilo kojoj točki $x \in [a, b]$ za grešku interpolacijskog polinoma p_n vrijedi

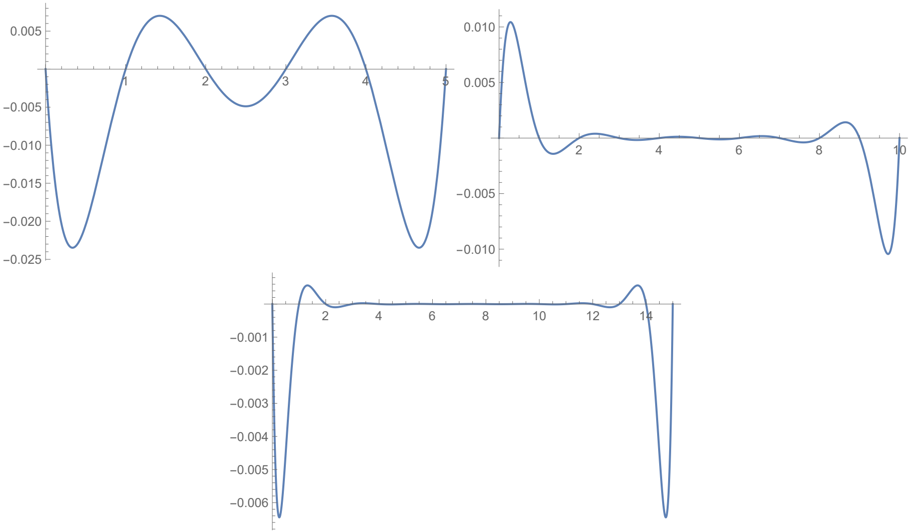
$$f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

za neku točku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max}) \subseteq (a, b)$, uz

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}.$$

Ako je funkcija f unaprijed zadana, onda faktor s derivacijom funkcije f ne možemo "kontrolirati".

$\omega(x), \qquad n = 5, 10, 15$



Minimaks aproksimacija

Idealno bi bilo minimizirati po apsolutnoj vrijednosti maksimalnu grešku aproksimacije, tj. $\|f - p_n\|_\infty \to \min$, na željenom intervalu $[a, b]$.

- Polinom p_n^* za koji je maksimalna greška minimalna se može konstruirati.
- Kad promatramo grešku polinoma p_n^*, može se pokazati da susjedni maksimumi grešaka imaju suprotne znakove, ali su po apsolutnoj vrijednosti jednaki.
- Postupak traženja takve aproksimacije je iterativan (Remesov algoritam), tj. takvu aproksimaciju nije jednostavno naći.
- Takva aproksimacija zove se minimaks aproksimacija funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Umjesto minimaks aproksimacije p_n^* funkcije f na $[a, b]$, zadovoljimo se "skromnijim" ciljem:

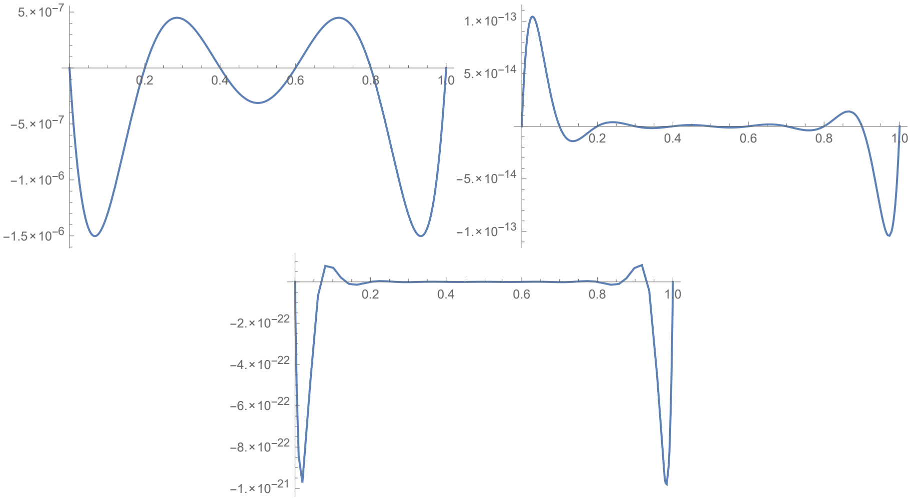
- ako možemo birati čvorove interpolacije $x_0, \ldots, x_n$,
- minimizirajmo maksimalnu pogrešku polinoma čvorova

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

$$\max_{x \in [a,b]} |\omega(x)| \longrightarrow \min$$

optimalnim izborom čvorova.

Polinom čvorova za $n = 5, 10, 15$, ekvidistantna mreža



$\omega(x)$ na $[0, 1]$, za $n = 5, 10, 15$, ekvidistantna mreža

Čebiševljevi polinomi — definicija i rekurzija

Čebiševljevi polinomi prve vrste, oznaka je T_n, za $n \geq 0$, definirani su relacijom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Polinomi T_n zadovoljavaju tročlanu rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

(dokaz = zbroj cosinusa preko produkta), uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Iz ove rekurzivne relacije odmah slijedi da je T_n polinom stupnja n.

Čebiševljevi polinomi — nultočke i ekstremi

Nultočke i ekstreme polinoma T_{n+1} nije teško izračunati.

Njegove nultočke su (silazno indeksirane — kraća formula)

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

dok su ekstremi (opet, silazno indeksirani)

$$x'_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

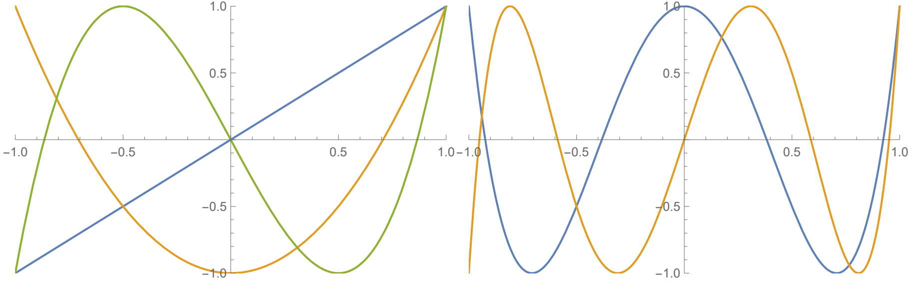
Vrijednost Čebiševljevog polinoma u ekstremu je

$$T_{n+1}(x'_k) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

Primijetite da tih ekstrema ima točno $n+2$ i da pripadne vrijednosti alterniraju po znaku.

Čebiševljevi polinomi — graf

Graf prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma T_n na $[-1, 1]$.



Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Čebiševljevi polinomi T_n imaju važno svojstvo minimizacije "uniformnog otklona polinoma od nule".

Teorem

Za zadani prirodni broj n, promatrajmo minimizacijski problem

$$\tau_n := \inf_{\deg(P) \leq n-1} \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + P(x)| \right\},$$

gdje je P polinom. Minimum τ_n *se dostiže samo za*

$$x^n + P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Pripadna pogreška je $\tau_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Dokaz: Iz tročlane rekurzije, nije teško induktivno dokazati da je vodeći koeficijent u T_n jednak 2^{n-1}, tj. da je

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \text{članovi nižeg stupnja}, \quad n \geq 1.$$

Zbog toga vrijedi da je

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + \text{članovi nižeg stupnja}.$$

Točke

$$x_k' = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad j = 0, \ldots, n,$$

su lokalni ekstremi od T_n.

Očito je

$$-1 = x_n' < x_{n-1}' < \cdots < x_1' < x_0' = 1.$$

U tim točkama je

$$T_n(x_k') = \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Polinom $\dfrac{1}{2^{n-1}}\, T_n$ ima vodeći koeficijent jednak 1 i vrijedi

$$\max_{-1 \le x \le 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zbog toga je

$$\tau_n \le \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pokažimo da je τ_n baš jednak desnoj strani.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\tau_n < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pokazat ćemo da to vodi na kontradikciju.

Definicija τ_n i prethodna pretpostavka pokazuju da postoji polinom M takav da je

$$M(x) = x^n + P(x), \quad \deg(P) \leq n-1,$$

gdje je

$$\tau_n \leq \max_{-1\leq x\leq 1} |M(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Definiramo

$$R(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x) - M(x).$$

No, vodeći koeficijenti polinoma s desne strane se skrate, pa je

$$\deg(R) \leq n - 1.$$

Ispitajmo vrijednosti funkcije R u lokalnim ekstremima funkcije T_n.

Iz gornje ograde za τ_n redom, izlazi

$$\begin{aligned} R(x_0') &= R(1) = \tfrac{1}{2^{n-1}} - M(1) > 0 \\ R(x_1') &= -\tfrac{1}{2^{n-1}} - M(x_1) < 0, \quad \ldots \end{aligned}$$

tj. za polinom R vrijedi

$$\operatorname{sign}(R(x_k')) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Budući da ima bar $n+1$ različiti predznak, to mora postojati bar n nultočaka, što je moguće samo ako je $R = 0$.

Odatle odmah izlazi da je

$$M(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Sad bi još trebalo pokazati da je to jedini polinom s takvim svojstvom.

Taj dio dokaza vrlo je sličan ovom što je već dokazano. $\square$

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Vratimo se sad polaznom problemu optimalnog izbora čvorova interpolacije.

Želimo izabrati točke interpolacije $x_j \in [-1, 1]$ tako da minimiziraju

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Polinom u prethodnoj relaciji je stupnja $n + 1$ i ima vodeći koeficijent 1.

Po Teoremu o minimalnom otklonu, minimum ćemo dobiti ako stavimo

$$(x - x_0) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^n} \, T_{n+1}(x),$$

a minimalna će vrijednost biti $1/2^n$.

Odatle odmah čitamo da su čvorovi $x_0, \ldots, x_n$ nultočke polinoma T_{n+1}.

U silaznom poretku, te nultočke su

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Uzlazni poredak dobivamo zamijenom indeksa $k \mapsto n - k$.

Afinom transformacijom intervala $[-1, 1]$ u interval $[a, b]$,

$$x \in [-1, 1] \quad \mapsto \quad \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x \in [a, b],$$

izlazi i opća formula za Čebiševljeve točke (uzlazno) u $[a, b]$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Primjer Runge — ekvidistantna i Čebiševljeva mreža

$$\log_{10}\left|\frac{1}{1+x^2} - p_n(x)\right|, \qquad n = 10, 30, 50$$