# MATEMATIČKA ANALIZA II

# REDOVI

# 6.1. Definicija reda

Promatrajmo niz $\left(\frac{1}{n^2}\right)$: $1, \frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} \frac{1}{4^2}, \ldots$

Postupno zbrajajmo elemente niza:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1+\frac{1}{2^2} &= \frac{5}{4} \\
1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2} &= \frac{49}{36} \\
1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2} &= \frac{205}{144} \\
1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2} &= \frac{5269}{3600} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dobili smo novi niz: $\quad 1, \frac{5}{4}, \frac{49}{36}, \frac{205}{144}, \frac{5269}{3600}, \ldots$

## Definicija (6.1.)

Neka je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva. Nizu $(a_n)_n$ pridružujemo niz $(s_n)_n$ definiran s:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Red je uređeni par $((a_n)_n, (s_n)_n)$ nizova $(a_n)_n$ i $(s_n)_n$. Element $a_n$ zovemo **opći član** reda, a $s_n$ je $n$-ta **parcijalna suma** reda. Oznake za red su

$$\sum a_n \text{ ili } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ ili } \sum_{\mathbb{N}} a_n \text{ ili } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ili } a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

## Primjer

Pretvaranje racionalnih brojeva u decimalne.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{9} &= \frac{1}{10}\frac{10}{9} \\
&= \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}\right)+\frac{1}{9}\frac{1}{10^2} \\
&= \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)+\frac{1}{9}\frac{1}{10^n}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9}\frac{1}{10^n}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{9}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)$$

Pišemo: $\frac{1}{9}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$

Govorimo da je $\frac{1}{9}$ suma reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$.

## Primjer

Geometrijski red. Za $x \neq -1$ imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \frac{1-x+x}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} \\
&= 1 + \frac{x-x^2+x^2}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \cdots \\
&= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) + \frac{x^n}{1-x}.
\end{aligned}$$

Za $|x| < 1$ je $\quad \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \Rightarrow$

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

## Primjer

Pokušajmo naći funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je rješenje diferencijalne jednadžbe

$$f'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

s početnim uvjetom $f(0) = 1$.

Tražimo funkciju u obliku polinoma neodređenog stupnja

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

Derivacija je oblika

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

Uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad &= \\ a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \quad & \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Izjednačimo koeficijente:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & a_0 \\ 2a_2 & = & a_1 \\ 3a_3 & = & a_2 \\ 4a_4 & = & a_3 \\ & \vdots & \\ (n+1)a_{n+1} & = & a_n \\ & \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_0 \\ a_2 & = & \frac{1}{2!}a_0 \\ a_3 & = & \frac{1}{3!}a_0 \\ a_3 & = & \frac{1}{4!}a_0 \\ & \vdots & \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{(n+1)!}a_0 \\ & \vdots & \end{array}$$

Uvjet $f(0) = 1$ daje $a_0 = 1 \quad \Rightarrow$

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{1!}, a_2 = \frac{1}{2!}, a_3 = \frac{1}{3!}, \dots, a_n = \frac{1}{n!}, \dots,$$

Ne postoji polinom koji bi zadovoljavao traženu diferencijalnu jednadžbu sa zadanim početnim uvjetom.
Razumno očekivati da za $\forall\, x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Funkcija $e^x$ je rješenje diferencijalne jednadžbe.
Možemo očekivati da $\forall\, x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad .$$

## 6.2. Definicija konvergencije reda

Niz $(\frac{1}{n^2})$: $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots$

Parcijalne sume:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+\frac{1}{2^2} &= \frac{5}{4} \\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2} &= \frac{49}{36} \\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2} &= \frac{205}{144} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Da li niz: $1, \frac{5}{4}, \frac{49}{36}, \frac{205}{144}, \frac{5269}{3600}, \ldots$ konvergira?

Tj., da li red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira?

# Konvergencija reda

## Definicija (6.2.)

Za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

realnih ili kompleksnih brojeva kažemo da je **konvergentan** (sumabilan, zbrojiv), ako je niz parcijalnih suma reda $(s_n)_n$ konvergentan. Ako je red konvergentan onda broj

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

zovemo **sumom reda** i označavamo sa

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Red je **divergentan** ako je niz $(s_n)_n$ divergentan.

Za niz kompleksnih brojeva $(a_n)_n = (\alpha_n + i\beta_n)_n$ možemo promatrati tri reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n,$$

s parcijalnim sumama

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n, \ \ \sigma_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \ \ \tau_n = \beta_1 + \cdots + \beta_n.$$

Budući da je $s_n = \sigma_n + i\tau_n$ to niz $(s_n)_n$ konvergira ako i samo ako konvergiraju nizovi $(\sigma_n)_n$ i $(\tau_n)_n$. Tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n + i \lim_{n\to\infty} \tau_n,$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n + i\beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

Pitanje konvergencije reda, a pogotovo sume reda, može biti vrlo komplicirano. Za početak dajemo primjer u kojem je na oba pitanja moguće lako odgovoriti

## Primjer

Pokažimo da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira i nađimo njegovu sumu.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = 1, \quad \text{tj.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

### Teorem (6.1.)

*(Nužan uvjet konvergencije reda)*

*Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, onda niz* $(a_n)_n$ *konvergira k nuli, tj. vrijedi*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira }\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right).$$

***Dokaz:*** Ako red konvergira k broju $s$, onda vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Q.E.D.

Obratna implikacija u teoremu) nije općenito istinita, što je vidljivo iz sljedećeg primjera

## Primjer

Harmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergira k $+\infty$.

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1} > s_n \quad \to \quad \text{niz } (s_n)_n \text{ je strogo rastući.}$$

Podniz $(s_{2^n})_n$ odozgo neograničen:

Indukcijom dokazujemo da $\forall\, n \in \mathbb{N}$ vrijedi $s_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2}n$.

Za $n = 1$ je $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$ što daje bazu indukcije.

Za $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
s_{2^{n+1}} &= s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} \\
&> s_{2^n} + \frac{1}{2^n+2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} \\
&= s_{2^n} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= s_{2^n} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}(n+1).
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_{2^n} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$$

Red divergira, a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dakle, konvergencija niza općih članova k nuli nije dovoljan uvjet za konvergenciju reda.

### Primjer

Alternirajući harmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \tag{1}$$

konvergira.

Nužan uvjet konvergencije je ispunjen, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0$.

Nadalje, vrijedi

$$s_{2m} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right)$$

$\Rightarrow$ podniz $(s_{2m})_m$ strogo rastući.

Niz $(s_{2m})_m$ je odozgo ograničen:

$$s_{2m} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2m-2} - \frac{1}{2m-1}\right) - \frac{1}{2m} < 1.$$

rastući + ograničen $\quad\Rightarrow\quad$ konvergentan

Neka je $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m} = s \leq 1.$

Zbog

$$s_{2m+1} = s_{2m} + \frac{1}{2m+1}$$

imamo

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = s$$

dakle i

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

što pokazuje da je alternirajući harmonijski red konvergentan.

Konvergencija redova je u skladu s operacijama zbrajanja redova i množenja redova sa skalarima.

### Teorem (6.2.)

*Neka su* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentni redovi sa sumama A i B. Za svaki par* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *je red* $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ *konvergentan i vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

***Dokaz:*** Označimo:

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + \cdots + a_n \\ B_n &= b_1 + \cdots + b_n \\ C_n &= (\lambda a_1 + \mu b_1) + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n) \end{aligned}$$

$$C_n = (\lambda A_n + \mu B_n) \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} C_n = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n + \mu \lim_{n\to\infty} B_n$$

Q.E.D.

# Geometrijski red

**Teorem (6.3.)**

*Za* $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, *geometrijski red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$$

*konvergira i ima sumu* $\dfrac{1}{1-q}$. *Za* $|q| \geq 1$ *red divergira.*

***Dokaz:***

$$1 - q^n = (1 - q)(1 + q + \cdots + q^{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q}\, q^n.$$

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

$$|q| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ |q^n| \geq 1$$

$\Rightarrow$ niz općih članova reda ne teži k nuli

$\Rightarrow$ red divergira. Q.E.D.

## 6.3. Uspoređivanje redova, apsolutna konvergencija

### Definicija (6.3.)

Za red $\sum a_n$ kažemo da je red s pozitivnim članovima ako je $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.

### Teorem (6.4.)

1. *Red $\sum a_n$ s pozitivnim članovima konvergira ako i samo ako je njegov niz parcijalnih suma $(s_n)_n$ ograničen. Tada je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_n; n \in \mathbb{N}\}$.*
2. *Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s pozitivnim članovima konvergira, onda njegova suma ne ovisi o poretku članova, tj. vrijedi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, gdje je $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcija (permutacija).*

***Dokaz:***

**1.** $(s_n)_n$ - niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad \Rightarrow \quad$ niz $(s_n)_n$ je rastući.

rastući niz je konvergentan $\quad \Leftrightarrow \quad$ ako je ograničen

**2.** . $(s'_n)_n$ - niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$, $\quad a'_n = a_{\sigma(n)}$.

Za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ postoje $p, q \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\sigma(1) < p, \sigma(2) < p, \ldots, \sigma(n) < p \quad \text{i}$$

$$\tau(1) < q, \tau(2) < q, \ldots, \tau(n) < q$$

gdje je $\tau = \sigma^{-1}$.

$\Rightarrow$

$$s'_n = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)} \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_p = s_p$$

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_{\sigma(\tau(1))} + a_{\sigma(\tau(2))} + \ldots + a_{\sigma(\tau(n))} \\ &\leq a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(q)} = s'_q \end{aligned}$$

To daje

$$\sup\{s'_n; n \in \mathbb{N}\} = \sup\{s_m; m \in \mathbb{N}\},$$

odnosno $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{m\to\infty} s'_m = \sum_{m=1}^{\infty} a'_m.$ Q.E.D.

## Lema (6.1.)

*(uspoređivanje redova) Neka su* $\sum a_n$, $\sum b_n$ *redovi s pozitivnim članovima i neka postoji* $K > 0$ *tako da je*

$$a_n \leq K\, b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

*Ako konvergira red* $\sum b_n$*, onda konvergira i red* $\sum a_n$ *i vrijedi* $\sum a_n \leq K \sum b_n$.
*Ako red* $\sum a_n$ *divergira, onda divergira i red* $\sum b_n$.

***Dokaz:*** Parcijalne sume:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{i} \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$s_n \leq t_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ zbog $a_n \leq K\, b_n$

$(s_n)_n$ i $(t_n)_n$ su rastući

$(s_n)_n$ i $(t_n)_n$ konvergentni $\quad \Leftrightarrow \quad$ ograničeni

$(t_n)_n$ konvergentan $\quad \Rightarrow \quad (t_n)_n$ ograničen $\quad \Rightarrow \quad (s_n)_n$ ograničen $\Rightarrow \quad (s_n)_n$ konvergentan

$(s_n)_n$ divergentan $\quad \Rightarrow \quad (s_n)_n$ neograničen $\quad \Rightarrow \quad (t_n)_n$ neograničen $\Rightarrow \quad (t_n)_n$ divergentan. Q.E.D.

### Primjer

Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentan.

$$(n+1)^2 > n(n+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

## Primjer

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p \geq 2$.

$$n^p \geq n^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

## Primjer

Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ divergira za $p \leq 1$.

$$n^p \leq n \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

a red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

## Teorem

*Neka je* $(a_n)_n$ *niz u* $\mathbb{C}$.

1. *Ako konvergira red*
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{3}$$
*onda konvergira i red* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i vrijedi* $\displaystyle|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
2. *Ako konvergira red (3) i ako je* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekcija, onda konvergira i red* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *i vrijedi* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

***Dokaz:*** **I.** Pretpostavimo da je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{R}$. Definiramo

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{ako je } a_n < 0 \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{ako je } a_n < 0 \end{cases}.$$

$(a_n^+)_n$ i $(a_n^-)_n$ nizovi s pozitivnim članovima i

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^- \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira i

$$a_n^+ \leq |a_n|, \quad a_n^- \leq |a_n|$$

$\Rightarrow$ (Lema 6.1.) redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergiraju.

$A^+$ i $A^-$ njihove sume $\Rightarrow$

$$A^+ - A^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$\Rightarrow$ Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_n\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_n| \ \forall n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} a_n\right| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} |a_n|$$

$$A^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a^+_{\sigma(n)} \quad \text{i} \quad A^- = \sum_{n=1}^{\infty} a^-_{\sigma(n)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A^+ - A^- = \sum_{n=1}^{\infty}(a^+_{\sigma(n)} - a^-_{\sigma(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

**II.** Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{C}$:

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}.$$

$|\alpha_n| \leq |a_n|,\ |\beta_n| \leq |a_n|,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ redovi $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ su konvergentni

$\Rightarrow$ redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ su konvergentni

$\Rightarrow$ red $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n + i\beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.

$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ kao za niz u $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(n)} + i\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\sigma(n)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{\sigma(n)} + i\beta_{\sigma(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}\end{aligned}$$

Q.E.D.

## Definicija (6.4.)

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je **apsolutno konvergentan** ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentan. Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **uvjetno konvergentan** ako konvergira, ali red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira.

## Teorem (6.6.)

*Neka su $\sum a_n$, $\sum b_n$ redovi u $\mathbb{C}$ i neka postoji $K > 0$ tako da je*

$$|a_n| \leq K\,|b_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Ako red $\sum b_n$ apsolutno konvergira, onda apsolutno konvergira i red $\sum a_n$.*
*Ako red $\sum a_n$ ne konvergira apsolutno , onda niti red $\sum b_n$ ne konvergira apsolutno.*

# Neki dovoljni uvjeti za konvergenciju reda

Promotrimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, a_n$$

red u $\mathbb{R}$ gdje je $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (alternirajući red)

**Teorem (6.7. - Leibnitzov kriterij)**

*Ako niz $(a_n)_n$ realnih pozitivnih brojeva strogo pada i $\lim_n a_n = 0$, tada red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, a_n$$

*konvergira k broju $A$ za koji vrijedi $0 < A < a_1$.*

***Dokaz:***
$(s_n)_n$ - niz parcijalnih suma reda

Vrijedi

$$s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

Podniz $(s_{2m})_m$ je strogo rastući.

$$s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1$$

Podniz $(s_{2m})_m$ ograničen odozgo.

strogo rastući + ograničen odozgo $\Rightarrow$ Podniz $(s_{2m})_m$ je konvergentan.

Neka je $A = \lim_m s_{2m}$.

$s_{2m+1} = s_{2m} - a_{2m+1} \quad \Rightarrow \quad = \lim_m s_{2m+1} = A \quad \Rightarrow \quad \lim_n s_n = A$

$\Rightarrow \quad s_{2m} < A < s_{2m-1}, \forall m \in \mathbb{N}.$ Q.E.D.

## Teorem (6.8. - D'Alambertov kriterij)

*Neka je* $(a_n)_n$ *niz u* $\mathbb{C}$ *i* $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. *Ako postoje* $m \in \mathbb{N}$ *i* $q \in \langle 0, 1 \rangle \subset \mathbb{R}$ *takvi da vrijedi* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$, $\forall n \geq m$, *onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *apsolutno konvergira.*
2. *Ako postoji* $m \in \mathbb{N}$ *takav da vrijedi* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1, \forall n \geq m$, *onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

***Dokaz:***

1. Za $n = m + k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$|a_{m+k}| \leq q|a_{m+k-1}| \leq \cdots \leq q^k |a_m|$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{m+k}| \leq |a_m| \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$$

$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{m+k}|$ konvergira

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

2. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1, \forall n \geq m \quad \Rightarrow \quad |a_n| \geq |a_m| > 0, \forall n \geq m$

$\Rightarrow \quad (a_n)_n$ ne teži k nuli
(nije ispunjen nužan uvjet konvergencije reda.) Q.E.D.

### Teorem (6.9. - Cauchyjev kriterij)

*Neka je* $(a_n)_n$ *niz u* $\mathbb{C}$.

1. *Ako postoje* $m \in \mathbb{N}$ *i* $q \in \langle 0, 1\rangle \subset \mathbb{R}$ *takvi da vrijedi* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, $\forall n \geq m$, *onda red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *apsolutno konvergira.*
2. *Ako vrijedi* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ *za beskonačno mnogo indeksa* $n \in \mathbb{N}$, *onda red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

***Dokaz:***

1. $n \geq m \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq q^n$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q}$$

$\Rightarrow \quad$ red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

2. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ za beskonačno mnogo indeksa $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad |a_n| \geq 1$ za beskonačno mnogo indeksa $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad$ za podniz $(a_{p_n})_n$ niza $(a_n)_n$ vrijedi $|a_{p_n}| \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \quad$ Podniz $(a_{p_n})_n$ ne konvergira k nuli

$\Rightarrow \quad$ Niz $(a_n)_n$ ne konvergira k nuli.

$\Rightarrow \quad$ Nije ispunjen nužan uvjet konvergencije reda. Q.E.D.

## Korolar (6.1.)

*Neka je* $(a_n)_n$ *niz u* $\mathbb{C}$ *i* $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. *Ako neki od nizova* $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$, $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_n$ *konvergira k* $r \in \mathbb{R}_+$, *onda za* $0 \leq r < 1$ *red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *apsolutno konvergira, a za* $1 < r$ *red divergira.*

***Dokaz:***

Neka je $0 \leq r < 1$

$\Rightarrow$ postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $r + \varepsilon < 1$.

$\Rightarrow$ za taj $\varepsilon$ postoji $m \in \mathbb{N}$ sa svojstvom $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(n \geq m) \Rightarrow \left( r - \varepsilon < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r + \varepsilon = q \right) \quad \text{ili}$$
$$(n \geq m) \Rightarrow \left( r - \varepsilon < \left| \sqrt[n]{|a_n|} \right| < r + \varepsilon = q \right)$$

Teorem 6.8. ili teorem 6.9. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergentan

Neka je $1 < r$

$\Rightarrow$ Postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $r - \varepsilon > 1$.

Teorem 6.8. ili teorem 6.9. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan. Q.E.D.

## Primjer

Redovi na za koje niti D'Alambertov niti Cauchyjev kriterij ne daju odluke o konvergenciji ili divergenciji:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ konvergira i } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} \to 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergira i } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergira i } \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n \to 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergira i } \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) \to 1.$$

## Napomena

Ako D'Alambertov kriterij daje odluku, onda ju daje i Cauchyjev kriterij.

$$|a_{m+k}| \leq q^k |a_m|, \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[m+k]{|a_{m+k}|} \leq \sqrt[m+k]{|a_m|}\; q^{\frac{k}{m+k}} \xrightarrow{k\to\infty} q.$$

Obratna tvrdnja nije istinita, što pokazuje slijedeći primjer.

## Primjer

Niz $(a_n)_n$ je definiran s $a_{2n} = \dfrac{1}{4^n}$, $a_{2n+1} = \dfrac{2}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 2 \quad \text{i} \quad \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{4^{n-1}}{4^n 2} = \frac{1}{8},$$

$\Rightarrow$ niz $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ ne konvergira. Po teoremu 6.8. nije moguća odluka.

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{2} \text{ i } \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{2}{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}, \quad \text{tj. } \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

## Primjer

Za svako $z \in \mathbb{C}$ red $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ apsolutno konvergira.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 = r < 1.$$

Po korolaru 6.1. red apsolutno konvergira za svako $z \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ definira funkciju $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad E(0) = 1, \quad E(1) = e.$$

### Primjer

Za svaki $z \in \mathbb{C}$ apsolutno konvergiraju redovi

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Ti su redovi apsolutno majorizirani s redom $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

### Teorem (6.10. - Integralni Cauchyjev kriterij)

*Neka je* $f : [1, +\infty\rangle \to [0, \infty\rangle$ *neprekidna i padajuća funkcija na* $[1, +\infty\rangle$.

1. *Red* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konvergira ako i samo ako integral* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *konvergira.*
2. *Ako red konvergira onda vrijedi*
$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

***Dokaz:*** $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ - parcijalna suma reda

$f$ je padajuća,

$$\Rightarrow \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ i } \forall t \in [k, k+1]$$

$$\Rightarrow \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi

$$\int_1^{n+1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n \leq$$

$$\leq f(1) + \int_1^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(t)dt = f(1) + \int_1^n f(t)dt.$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^{n+1} f(t)dt \leq s_n \leq f(1) + \int_1^n f(t)dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, konvergira

$$\Rightarrow \quad s_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(t)dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(s_n)$ rastući i ograničen $\quad \Rightarrow \quad$ $(s_n)$ konvergentan

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira

$$\Rightarrow \quad \int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

niz $\left(\int_1^{n+1} f(t)dt\right)_n$ rastući i ograničen $\quad \Rightarrow \quad$ konvergentan

$$\Rightarrow \quad \text{postoji } \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Q.E.D.

### Primjer

Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ je neprekidna i padajuća na $[1, +\infty\rangle$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $p > 1$ i divergira za $p \leq 1$.

Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$ i divergira za $p \leq 1$.

## Primjer

Ispitajte konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ za $p > 1$.

Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^p x}$, $x \in [2, +\infty\rangle$ je neprekidna i padajuća.

Vrijedi

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t \ln^p t} = \left| \begin{array}{c} y = \ln t \\ dy = dt/t \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dy}{y^p} =$$

$$= -\frac{1}{p-1}\, y^{1-p} \Big|_{\ln 2}^{\ln x} = -\frac{1}{p-1} \frac{1}{\ln^{p-1} x} + \frac{1}{p-1} \frac{1}{\ln^{p-1} 2},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{1}{p-1} \frac{1}{\ln^{p-1} 2} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}.$$

$$\Rightarrow \quad \text{Red } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \text{ konvergira za } p > 1.$$

# Redovi potencija

Neka je $(f_n)_n$ niz funkcija $f_n : I \to \mathbb{R}($ ili $\mathbb{C})$, $I \subseteq \mathbb{R}($ili $\mathbb{C})$.

Red $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ zovemo **redom funkcija**.

Za $f_n(x) = a_n(x-c)^n$, $x \in I$, red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

se naziva **red potencija** oko točke $c$.

Neka je

$$K = \{z \in \mathbb{C};\ \text{red} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \text{ konvergira u točki } z\}.$$

Definiramo

$$r = \sup\{|z-c|; z \in K\}$$

i nazivamo ga **radijus konvergencije** reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

Nadalje, zbog jednostavnosti: $c = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

zovemo **derivacijom reda** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ član po član.

Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

zovemo **antiderivacijom (neodređenim integralom) reda** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ član po član.

**Teorem (6.12. - o radijusu konvergencije)**

1. *Redovi*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad i \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$
*imaju jednak radijus konvergencije.*
2. *Ako je $r$ radijus konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $r > 0$, onda svi redovi apsolutno konvergiraju za $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$, i divergiraju za $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > r$.*
3. *Ako je $\rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$, onda je $r = \dfrac{1}{\rho}$.*

***Dokaz:*** Bez dokaza. Q.E.D.

Objašnjenje. Jednostavniji slučaj:

$$\rho = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}, \quad r = \frac{1}{\rho}$$

Za $|x| < r$ red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ apsolutno konvergira (Cauchyjev kriterij):

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}|x| < \rho r = 1..$$

Za $|x| > r$ red divergira.

$\Rightarrow$ $r$ je radijus konvergencije.

Red $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$:

$$\lim_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \lim_n \sqrt[n+1]{n+1} \lim_n (\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|})^{\frac{n+1}{n}} = \rho.$$

Red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$: $$\lim_n \sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \lim_n \frac{\left(\sqrt[n-1]{|a_{n-1}|}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt[n]{n}} = \rho.$$

Ako je $r > 0$ radijus konvergencije redova

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{i} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

onda su s

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \\
f_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \\
f_2(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}, \\
M_2(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n||z|^{n-2}
\end{aligned}$$

definirane funkcije na $K(0, r) \subseteq \mathbb{C}$

### Lema (6.2.)

*Neka je $r > 0$ radijus konvergencije reda (**??**). Za svaki $0 < r_1 < r$ i svaki par $u, z \in \mathbb{C}$, $u \neq z$ i $|u| \leq r_1$, $|z| \leq r_1$, vrijedi nejednakost*

$$\left| \frac{f(z) - f(u)}{z - u} - f_1(u) \right| \leq \frac{1}{2} M_2(r_1) |z - u|. \tag{4}$$

## Korolar (6.2.)

*Neka su* $f : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ *i* $f_1 : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ *definirane s*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad i \quad f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

*Tada je* $f_1(x) = f'(x), \forall x \in \langle -r, r\rangle$. *Funkcija* $f$ *ima derivaciju svakog reda na* $\langle -r, r\rangle$, *tj.* $f \in C^\infty(\langle -r, r\rangle)$. *Također za* $a, b \in \langle -r, r\rangle$, $a < b$, *imamo*

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}). \end{aligned}$$

***Dokaz:*** Lema 6.2. $\quad \Rightarrow \quad f_1 = f'$ na $\langle -r, r\rangle$

Rekurzivnim zaključivanjem slijedi da je $f \in C^\infty(\langle -r, r\rangle)$. Q.E.D.

## Primjer

Odredite radijus konvergencije reda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{n}} = 1.$$

$$r = \frac{1}{1} = 1.$$

## Primjer

Odredite radijus konvergencije reda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

$$a_n = \frac{1}{2^n}.$$

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

## Primjer

Odredite radijus konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

gdje je $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{za paran } n \\ \frac{1}{3^n} & \text{za neparan } n \end{cases}$ $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ ne postoji.

$$\lim_m \sqrt[2m]{|a_{2m}|} = \lim_m \sqrt[2m]{\frac{1}{2^{2m}}} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_m \sqrt[2m+1]{|a_{2m+1}|} = \lim_m \sqrt[2m+1]{\frac{1}{3^{2m+1}}} = \frac{1}{3}$$

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

# Taylorovi redovi

Neka je $f : \langle c-r, c+r\rangle \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

gdje je $r > 0$ radijus konvergencije reda.
Tada je $f \in C^\infty(\langle c-r, c+r\rangle)$ i vrijedi

$$\begin{array}{rcl} f(c) & = & a_0 \\ f'(c) & = & a_1 \\ f''(c) & = & 2a_2 \\ & \vdots & \\ f^{(n)}(c) & = & n! a_n \\ & \vdots & \end{array}$$

Formula za koeficijente je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

# Taylorov teorem

## Definicija

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f : I \to \mathbb{R}$ ima $n$-tu derivaciju na $I$. Za $c \in I$ polinom

$$T_n(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k, \; x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

zovemo **Taylorov polinom** $n$-tog reda za funkciju $f$ u točki $c$, a funkciju

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)\,, \; x \in I, \tag{6}$$

zovemo $n$-ti ostatak funkcije $f$ u $c$.

## Primjer

Taylorov polinom za eksponencijalnu funkciju $f(x) = e^x$.

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(0) = 1$$

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x.$$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti ima sljedeće uopćenje.

### Teorem (Taylor)

*Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i neka $f : I \to \mathbb{R}$, ima derivaciju $n+1$-vog reda na $I$. Neka je $c \in I$ i $T_n$ Taylorov polinom za $f$ u točki $c$ definiran s (5). Tada $\forall x \in I$, $\exists c_x$ između $c$ i $x$, tako da je*

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \quad \textit{(Lagrangeov oblik ostatka)}.$$

**Napomena.** Za $n = 0$ ovo je Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

$$T_0(x) = f(c)$$

$$f(x) - f(c) = f(x) - T_0(x) = \frac{f^{(1)}(c_x)}{(1)!}(x-c)^1 = f'(c_x)(x-c)$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c_x)$$

## Definicija

Neka je funkcija $f \in C^\infty(\langle c-r, c+r\rangle)$. Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

zovemo **Taylorov red** funkcije f oko točke $c$. Taylorovi polinomi $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ su parcijalne sume Taylorovog reda.

## Primjer

Taylorov red za eksponencijalnu funkciju $f(x) = e^x$.

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(0) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

## Teorem (6.13.)

*Neka je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoreni interval,* $c \in I$ *i* $f : I \to \mathbb{R}$ *klase* $C^\infty(I)$*.*
*Ako postoje* $n_0 \in \mathbb{N}$*,* $\delta > 0$*,* $M > 0$ *i* $C > 0$*, takvi da je*

$$|f^{(n)}(x)| \leq CM^n n!, \quad \forall x \in I' = \langle c - \delta, c + \delta \rangle \cap I, \quad \forall n \geq n_0,$$

*onda red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

*konvergira k* $f(x)$*,* $\forall x \in I' \cap \langle c - \frac{1}{M}, c + \frac{1}{M} \rangle$*.*

***Dokaz:*** Taylorov teorem srednje vrijednosti:
Za svaki $x \in I$, postoji $c_x$ između $c$ i $x$ tako da vrijedi

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

$$\begin{aligned} |f(x) - T_n(x)| &= \frac{|f^{(n+1)}(c_x)|}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} \leq \\ &\leq C\frac{M^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} = C(M|x-c|)^{n+1}. \end{aligned}$$

Za $x \in I' \cap \langle c - \frac{1}{M}, c + \frac{1}{M} \rangle$ je

$$M|x-c| < 1$$

pa je $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x) - T_n(x)| = 0$,

tj. $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(x)$. Q.E.D.

## Teorem (6.14.)

*Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $c \in I$ i $f : I \to \mathbb{R}$ klase $C^\infty(I)$. Ako postoje $\delta > 0$ i $C > 0$ takvi da je*

$$|f^{(n)}(x)| \leq C, \ \ \forall x \in I' = \langle c-\delta, c+\delta\rangle \cap I, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

*onda red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

*konvergira k $f(x)$, $\forall x \in I'$.*

***Dokaz:*** Vrijedi

$$|f(x) - T_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c_x)|}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} \leq C\frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n} 0,$$

zbog konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Q.E.D.

## Primjer

Za funkciju $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ i $c = 0$ je $f^{(n)}(0) = 1$.

Taylorov red oko nule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Za $\delta > 0$ vrijedi

$$(x < \delta) \Rightarrow (e^x < e^\delta)$$

tj. $\forall x \in \langle -\delta, \delta \rangle$ je $|e^x| < e^\delta = C$.

$\Rightarrow$ Za svaki $x \in \mathbb{R}$, postoji $\delta > 0$, takav da je $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$,

$\Rightarrow$ red konvergira k funkciji na čitavom $\mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

### Primjer

Za funkcije $f(x) = \sin x$ i $f(x) = \cos x$ je $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pa vrijedi

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{i} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.

## Primjer

Naći Taylorov red oko $c = 0$ funkcije $f(x) = e^{-x^2}$ i ispitati njegovu konvergenciju.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

Komplicirano

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

## Primjer

Naći Taylorov red oko $c = 0$ funkcije $f(x) = \ln(1 + x)$ i ispitati njegovu konvergenciju.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

za $x \in \langle -1, 1\rangle$ (geometrijski red).

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

za $x \in \langle -1, 1\rangle$.

## Primjer

Naći Taylorov red oko $c = 0$ funkcije $f(x) = \mathrm{Tg}^{-1} x$ i ispitati njegovu konvergenciju.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

za $x \in \langle -1, 1 \rangle$ (geometrijski red).

$$f(x) = \mathrm{Tg}^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

za $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

## Primjer

Naći Taylorov red oko $c = 0$ funkcije $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1} x$ i ispitati njegovu konvergenciju.

Vrijedi $f'(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$, za $x \in \langle -1, 1 \rangle$ (binomni red). No,

$$(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

pa imamo $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$. Odatle je

$$f(x) = \mathrm{Sin}^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{za } x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

## Teorem (6.15. - Abelov teorem)

*Ako red* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergira i ima sumu s, onda je s*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < 1,$$

*definirana funkcija* $f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ *i vrijedi* $s = \lim_{x \to 1-} f(x)$.

## Primjer

Vrijedi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

za $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

## Primjer

Vrijedi $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\mathrm{Tg}^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Tg}^{-1} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}.$$

# 6.7. Fourierovi redovi

**Trigonometrijski polinom**:

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

za $n \in \mathbb{N}$ ili

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ili

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \sin(kx + \varphi_k)$$

$A_k$ nazivamo amplitudom, $k$ je kutna frekvencija, a $\varphi_k$ je fazni pomak

Red oblika

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

zovemo **trigonometrijski red**.

**Konvergencija.**

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|\,|\cos nx| + |b_n|\,|\sin nx|) \;\leq\; \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ konvergira
$\Longrightarrow$ trigonometrijski red apsolutno konvergira.

Promotrimo vektorski prostor $V$ svih neprekidnih funkcija $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.

Definiramo skalarni produkt na $V$: $(f|g) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Za funkcije $\sin nx, \cos nx$, $(n \in \mathbb{N})$, vrijedi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0. \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0. \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0. \qquad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{za } n = m, \\ 0 & \text{za } n \neq m, \end{cases} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{za } n = m, \\ 0 & \text{za } n \neq m, \end{cases} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Skup funkcija

$$\left\{ \frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx; n \in \mathbb{N} \right\}$$

je ortonormirani skup vektora u $V$.

Neka je $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ trigonometrijski red zadan s

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \\
= \; &\int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \right] \cos nx \, dx = \\
= \; &\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx \right) \\
= \; &\pi a_n.
\end{aligned}$$

Dakle, za trigonometrijski red $f$ je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Analogno je

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ i neka su

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Trigonometrijski red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

nazivamo **Fourierov red** funkcije $f$.

Koeficijente $a_n$ i $b_n$ u ovom prikazu nazivamo **Euler-Fourierovi koeficijenti**.

**Pitanje.** Da li za danu funkciju $f$ vrijedi $f(x) = S(x)$?

### Teorem (Dirichlet)

*Neka je $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi*

(*i*) *Funkcija $f$ ima najviše konačno prekida i to prve vrste na $[-\pi, \pi]$.*

(*ii*) *Funkcija $f$ je po dijelovima monotona na $[-\pi, \pi]$.*

*Tada Fourierov red funkcije $f$ konvergira $\forall x \in \mathbb{R}$.*

*Neka je $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suma Fourierovog reda. Ako je $f$ neprekidna u $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, onda je $S(x) = f(x)$.*
*Ako $f$ ima prekid u $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, onda je*

$$S(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

*Također je*

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(\pi-) + f(-\pi+)}{2}.$$

***Dokaz:*** Dokazujemo samo konvergenciju reda i to uz jači uvjet da je $f \in C^{(2)}([-\pi, \pi])$.

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \\ &= \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = \\ &= \frac{f'(x) \cos nx}{n^2\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx = \\ &= -\frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx dx. \end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti $f''$ postoji $M > 0$ tako da je $|f''(x)| \leq M$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

$$\Longrightarrow \quad |a_n| \leq \frac{2M}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analogno se dobije $|b_n| \leq \dfrac{2M}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$\Longrightarrow$ Fourierov red je apsolutno majoriziran s redom

$$4M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

koji je konvergentan. Q.E.D.

## Primjer

Neka je

$$f(x) = |x|.$$

Odredite Fourierov red funkcije $f$.

Računamo koeficijente Fourierovog reda.

Zbog parnosti funkcije $f$ je

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0,$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \\
&= \frac{2}{n\pi} x\sin nx\,\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\,\Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi n^2}[1-(-1)^n],
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
a_{2n} &= 0, \\
a_{2n-1} &= \frac{-4}{(2n-1)^2\pi}, \qquad n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

Dakle,

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2},$$

i $S(x) = f(x)$ za $x \in [-\pi, \pi]$:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

**Napomena.** Za $x = 0$ je

$$|0| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)0}{(2n+1)^2},$$

tj.

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

tj. odnosno

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Označimo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Red podijelimo na dva reda s parnim i neparnim ǐndeksima:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S \end{aligned}$$

Dakle

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S \quad \Longrightarrow \quad S = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

## Primjer

Neka je

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0\rangle \\ 1 & x \in [0, \pi\rangle \end{cases}$$

i neka je po periodičnosti proširena na $\mathbb{R}$, tj.

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odredite Fourierov red funkcije $f$.

Računamo koeficijente Fourierovog reda.

Zbog neparnosti funkcije $f$ je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \\ &= \frac{-2}{\pi n}\cos nx\,\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n], \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} b_{2n} &= 0, \\ b_{2n-1} &= \frac{4}{(2n-1)\pi}, \qquad n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$S(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},$$

s tim da je $S(x) = f(x)$ za $x \neq n\pi$ i $S(n\pi) = \frac{f(-k\pi+)-f(k\pi-)}{2} = 0$.

# Zaključak o redovima

- Konvergencija reda
- Red potencija, radijus konvergencije
- Taylorov red.
- Trigonometrijski red. Fourierov red.
- Suma reda.

  Nema generalnog pristupa.

  Taylorov red + Abelov terorem $\rightarrow \sum_{n}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2$

  Taylorov red + Abelov terorem $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

Fourierov red + Dirichletov terorem $\rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Euler je ovo prvi dokazao na malo drugačiji način.

Opisao je metodu za računanje sume redova oblika $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$

Neparne potencije su još uvijek neriješen problem.

Npr., ne zna se koliko je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

# Još malo o eksponencijalnoj funkciji

Pokazali smo da je

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Radijus konvergencije je $\infty$.

Ovaj red potencija dobro definira funkciju $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Vrijedi

$$E(z_1+z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = E(z_1)E(Z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

i

$$E(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija $E$ je proširenje eksponencijalne funkcije na skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Zato je označavamo s

$$E(z) = e^z \,.$$

Koliko je $e^{1+i}$?

Znamo

$$e^{1+i} = e^1 \, e^i \,.$$

Trebamo vidjeti samo što je $e^i$.

Neka je $y \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{y^n}{n!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(i^2\right)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i \left(i^2\right)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\
&= \cos y + i \sin y.
\end{aligned}
$$

za $z \in \mathbb{C}$, $z = x + i\,y$ je

$$\mathrm{e}^z = e^{x+i\,y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{i\,y} = \mathrm{e}^x\,(\cos y + i \sin y)\,.$$

$$e^{x+i\,y} = \mathrm{e}^x\,(\cos y + i \sin y)$$

$$e^{1+i} = \mathrm{e}^1\,(\cos 1 + i \sin 1) = \mathrm{e}\,(\cos 1 + i \sin 1)$$

$$e^{i\,\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1.$$

$$e^{i\,\pi} = -1.$$

# Veza trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n - (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(i\,x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\,x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} i\left(i^2\right)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{sh}(i\,x) = i \sin x$$

Analogno,

$$\operatorname{ch}(i\,x) = \cos x$$