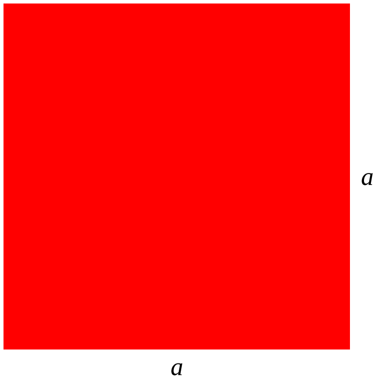
MATEMATIČKA ANALIZA 2

RIEMANNOV INTEGRAL

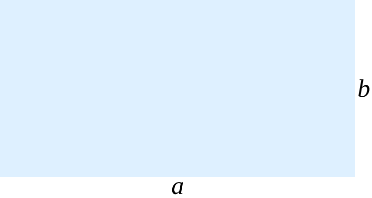
1. Problem površine

Površina nekih jednostavnih likova u ravnini:

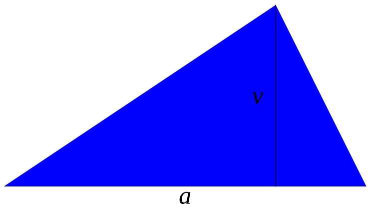


$P = ?$

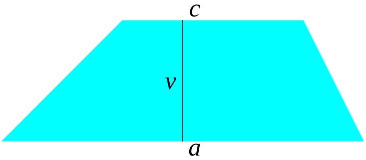
$P = ?$



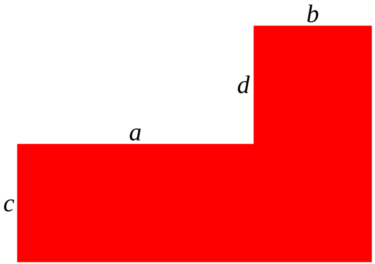
$P = ?$



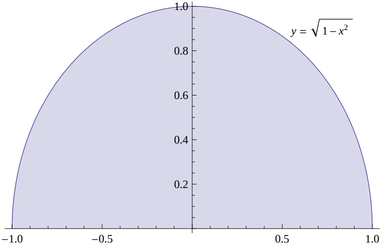
$P = ?$



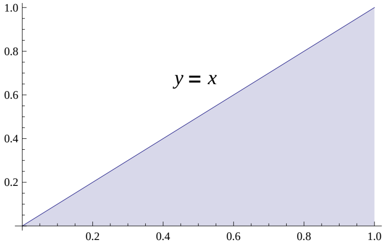
$P = ?$



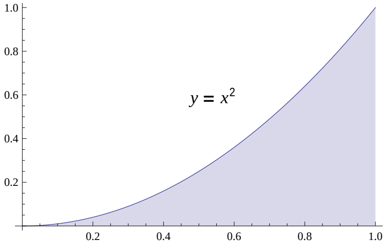
$P = ?$



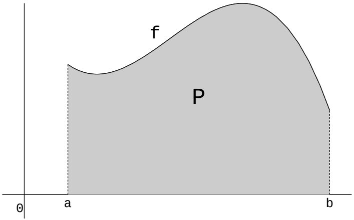
$P = ?$



$P = ?$



2. Riemannov integral ograničene funkcije na segmentu

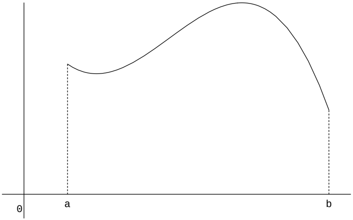


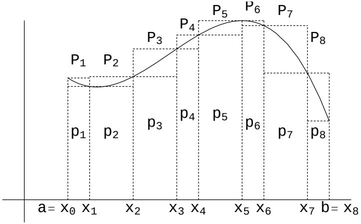
Podijelimo segment $[a, b]$ na n $(\in \mathbb{N})$ dijelova točkama

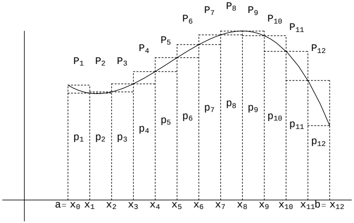
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Subdivizija intervala $[a, b]$

Subdivizija intervala $[a, b]$







Računamo površine pravokutnika!

Neka je $[a, b]$, $a < b$, segment u $\mathbb{R}$
i neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a, b]$.

$\Longrightarrow$ postoje $\quad m = \inf\limits_{[a,b]} f \quad$ i $\quad M = \sup\limits_{[a,b]} f,$

tj.

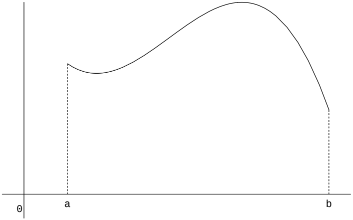
$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a, b].$$

Ako je $\quad [a', b'] \subseteq [a, b] \quad$ onda je

$$m \leq m' \leq f(x) \leq M' \leq M \qquad \forall x \in [a', b'],$$

gdje je

$$m' = \inf_{[a',b']} f \text{ i } M' = \sup_{[a',b']} f.$$


0
a
b

Darbouxove sume

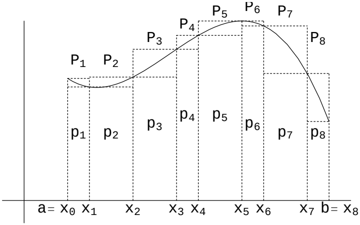
Subdivizija:

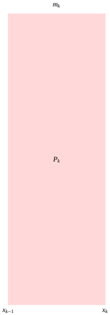
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Neka je

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \quad \text{i} \quad M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f, \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Darbouxove sume





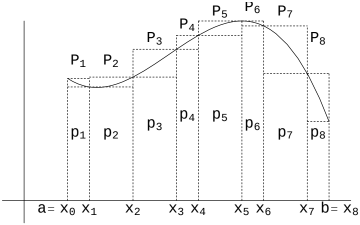
Površina upisanog pravokutnika P_k:

$$m_k(x_k - x_{k-1})$$

Donja Darbouxova suma:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

Darbouxove sume



Površina opisanog pravokutnika P_k:

$$M_k(x_k - x_{k-1})$$

Gornja Darbouxova suma:

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

Za proizvoljne točke $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $(k = 1, \ldots, n)$, definirajmo sume:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

σ - integralna suma

Vrijedi

$$m(b-a) \leq s \leq \sigma \leq S \leq M(b-a).$$

A - skup svih donjih Darbouxovih suma s
B - skup svih gornjih Darbouxovih suma S funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Sve te sume dobiju se variranjem broja $n \in \mathbb{N}$ i svim različitim izborima subdivizije.

Zbog

$$m(b-a) \leq s \leq \sigma \leq S \leq M(b-a).$$

skupovi A i B su ograničeni odozdo s $m(b-a)$ i odozgo s $M(b-a)$.

Aksiom potpunosti $\Longrightarrow$ postoje

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \sup A, \qquad \mathcal{I}^*(f; a, b) = \inf B.$$

Definicija

Broj $\mathcal{I}_*$ zovemo **donji Riemannov integral** funkcije f na segmentu $[a, b]$, a broj $\mathcal{I}^*$ zovemo **gornji Riemannov integral** funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Donji i gornji Riemannov integral postoje za svaku funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ koja je ograničena na segmentu $[a, b]$.

Teorem

Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a,b]$, neka su $\mathcal{I}_*$ i $\mathcal{I}^*$ donji i gornji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$. Tada je

$$\mathcal{I}_*(f;a,b) \leq \mathcal{I}^*(f;a,b).$$

Dokaz: Dokaz provodimo u tri dijela.

1. Dodavanjem jedne točke subdiviziji:

- donja Darbouxova suma se poveća ili ostane jednaka,
- gornja Darbouxova suma se smanji ili ostane jednaka.

Zadana subdivizija Σ

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

- s i S pripadne Darbouxove sume

Nova subdivizija Σ' - subdiviziji Σ dodamo točku x',

$$x_{k-1} < x' < x_k.$$

s' i S' - pripadne Darbouxove sume.

S':

$$M_k(x_k - x_{k-1}) \quad \longrightarrow \quad M_k'(x' - x_{k-1}) + M_k''(x_k - x')$$

gdje je

$$M_k' = \sup_{[x_{k-1}, x']} f \quad \text{i} \quad M_k'' = \sup_{[x', x_k]} f.$$

Budući da $[x_{k-1}, x'] \subset [x_{k-1}, x_k] \quad \text{i} \quad [x', x_k] \subset [x_{k-1}, x_k]$
vrijedi

$$M_k' \leq M_k \quad \text{i} \quad M_k'' \leq M_k$$

i

$$M_k'(x' - x_{k-1}) + M_k''(x_k - x') \leq M_k(x' - x_{k-1}) + M_k(x_k - x') = M_k(x_k - x_{k-1})$$

pa je

$$S' \leq S.$$

Analogno, za

$$m'_k = \inf_{[x_{k-1},x']} f \quad \text{i} \quad m''_k = \inf_{[x',x_k]} f$$

vrijedi

$$m'_k \geq m_k \quad \text{i} \quad m''_k \geq m_k$$

i

$$m'_k(x'-x_{k-1})+m''_k(x_k-x') \geq m_k(x'-x_{k-1})+m_k(x_k-x') = m_k(x_k-x_{k-1})$$

tj.

$$s' \geq s.$$

Isti zaključak vrijedi ako subdiviziji dodamo konačan broj točaka.

Kao da te točke dodajemo jednu po jednu - svaki put vrijedi zaključak iz prethodnog razmatranja.

2. Svaka donja Darbouxova suma je manja ili jednaka svakoj gornjoj Darbouxovoj sumi (bez obzira na subdivizije na kojima su nastale)

s_1 proizvoljna donja Darbouxova suma i S_2 proizvoljna gornja Darbouxova suma.

Σ_1 i Σ_2 pripadajuće subdivizije za s_1 i S_2.

Σ_3 - nova subdivizija od unije točaka iz subdivizija Σ_1 i Σ_2
s_3 i S_3 - pripadne Darbouxove sume.

Σ_3 je nastala iz Σ_1 dodavanjem (konačno) točaka iz Σ_2
Σ_3 je nastala iz Σ_2 dodavanjem (konačno) točaka iz Σ_1.

$\Longrightarrow$

$$s_1 \leq s_3 \quad \text{i} \quad S_3 \leq S_2.$$

$$s_3 \le S_3 \quad \Rightarrow \quad s_1 \le s_3 \le S_3 \le S_2.$$

Dokazali:

$$(\forall s \in A) \quad (\forall S \in B) \quad s \le S$$

Odatle zaključujemo

$$(\forall s \in A) \quad s \le \inf B \quad \text{i} \quad \sup A \le \inf B$$

tj.

$$\mathcal{I}_* \le \mathcal{I}^*.$$

$\square$

Definicija

Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničenu na segmentu $[a, b]$ kažemo da je **integrabilna u Riemannovom smislu** ili R-integrabilna na segmentu $[a, b]$ ako je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \mathcal{I}^*(f; a, b).$$

Tada se broj $\mathcal{I} = \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ naziva **integral** ili R-integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označava jednom od slijedećih oznaka

$$\mathcal{I} = \int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f. \tag{1}$$

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ integrabilna funkcija na $[a, b]$ i neka je

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; 0 \leq y \leq f(x),\ \forall\, x \in [a, b]\}$$

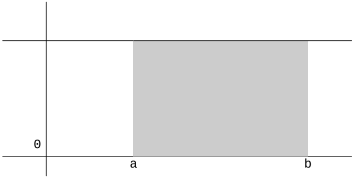
pseudotrapez. Sada površinu $\mu(P)$ pseudotrapeza definiramo s

$$\mu(P) = \int_a^b f(x)dx.$$

Integrali nekih jednostavnih funkcija.

Primjer

Neka je $C \in \mathbb{R}_+$ i $f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$. Za $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$, izračunajmo $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Cdx$.



Za svaku subdiviziju je:

$$m_k = M_k = C, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Odatle je

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = C\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = C(b-a),$$

i

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = C\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = C(b-a),$$

tj. $A = B$.
Dakle,

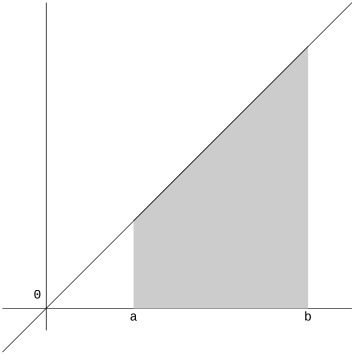
$$\mathcal{I}_* = \sup A = \inf B = \mathcal{I}^* = C(b-a)$$

pa je

$$\int_a^b C dx = C(b-a).$$

Primjer

Neka je $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, i $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$.



- $n \in \mathbb{N}$ - proizvoljan

- ekvidistantna subdivizija segmenta $[a, b]$:

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \qquad h = \frac{b-a}{n}.$$

f raste na $\mathbb{R}$ $\quad \Rightarrow$

$$m_k = f(x_{k-1}) = a + (k-1)h,$$
$$M_k = f(x_k) = a + kh\,.$$

Odatle je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)h)h = nah + h^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1) =$$

$$= nha + h^2 \frac{(n-1)n}{2} = na\frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} \ \Rightarrow$$
$$s_n = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Analogno se dobije

$$S_n = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

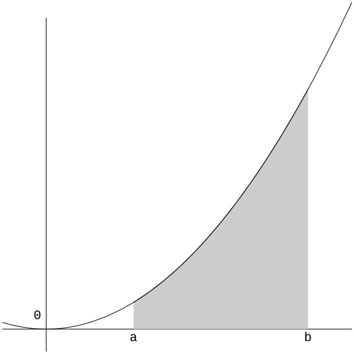
Neka je sada

$$\begin{aligned} A' &= \{s_n; n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}; n \in \mathbb{N} \right\}, \\ B' &= \{S_n; n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}; n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Odatle imamo $\sup A' = \inf B' = \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

Primjer

Neka je $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, i $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$.



- $n \in \mathbb{N}$ - proizvoljan

- ekvidistantna subdivizija segmenta $[a, b]$:

$$x_k = a + kh, \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \qquad h = \frac{b-a}{n}.$$

f raste na $\mathbb{R} \quad \Rightarrow$

$$m_k = f(x_{k-1}) = (a + (k-1)h)^2,$$
$$M_k = f(x_k) = (a + kh)^2 .$$

Računamo

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)h)^2 h = na^2 h + 2ah^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1) + h^3 \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 =$$

$$= na^2 h + 2ah^2 \frac{(n-1)n}{2} + h^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{3} \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) + a(b-a)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + a^2(b-a)$$

i analogno

$$S_n = \frac{(b-a)^3}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) + a(b-a)^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + a^2(b-a).$$

Odatle,

$$\sup A' = \inf B' = \frac{(b-a)^3}{3} + a(b-a)^2 + a^2(b-a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Svaka funkcija koja je ograničena na segmentu nije i Riemann integrabilna na tom segmentu.

Promatrajmo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ za koju je

- $f(x) = 1$ ako je $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ i
- $f(x) = 0$ ako je $x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Za svaki $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$ vrijedi

$$\inf_{[\alpha,\beta]} f = 0$$

i

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f = 1,$$

što daje $I_* = 0$ i $I^* = 1$, tj. $I_* \neq I^*$

5.3. Osnovna svojstva Riemannovog integrala

Teorem (5.2.)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ograničena funkcija na* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*. Funkcija* f *je integrabilna na* $[a, b]$ *ako i samo ako* $\forall \varepsilon > 0$ *postoji subdivizija segmenta* $[a, b]$ *takva da za pripadne Darbouxove sume vrijedi* $S - s < \varepsilon$*.*

Teorem (5.3. Osnovna svojstva)

Neka su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabilne funkcije na* $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

- *Za bilo koje* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *funkcija* $\alpha f + \beta g$ *je integrabilna na* $[a, b]$ *i vrijedi*
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$
- *Ako je* $f \leq g$ *na* $[a, b]$ *onda je* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- *Također vrijedi*
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b - a) \sup_{[a,b]} f.$$

Dokaz:

$$\inf_K f + \inf_K g \leq f(x) + g(x) \leq \sup_K f + \sup_K g$$

za svako $x \in K \subseteq [a, b]$

$$\Rightarrow \quad \inf_K f + \inf_K g \leq \inf_K (f+g) \leq \sup_K (f+g) \leq \sup_K f + \sup_K g$$

Za proizvoljnu subdiviziju vrijedi:

$$s_f + s_g \leq s_{f+g} \leq S_{f+g} \leq S_f + S_g$$

Posebno

$$s_f + s_g \leq s_{f+g} \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq S_{f+g} \leq S_f + S_g$$

$$\Rightarrow I^*(f+g) - I_*(f+g) \leq S_f - s_f + S_g - s_g$$

Desna strana je proizvoljno mala.

$$I^*(f+g) - I_*(f+g) \leq S_f - s_f + S_g - s_g$$

- $\varepsilon > 0$ proizvoljan
- Postoji subdivizija Σ_1 takva da je $S_f - s_f < \varepsilon/2$
- Postoji subdivizija Σ_2 takva da je $S_g - s_g < \varepsilon/2$
- $\Sigma = \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$.
  Na subdiviziji Σ je
  $S_f - s_f < \varepsilon/2$ i $S_g - s_g < \varepsilon/2$
- $I^*(f+g) - I_*(f+g) \leq S_f - s_f + S_g - s_g < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
- $(0 \leq)\ I^*(f+g) - I_*(f+g) < \varepsilon$ za proizvoljan $\varepsilon > 0$
- $\Rightarrow \quad I^*(f+g) - I_*(f+g) = 0$ tj. $\quad I^*(f+g) = I_*(f+g)$
- $f+g$ je integrabilna

Na subdiviziji Σ vrijedi:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g &\leq S_{f+g} - s_f - s_g \\ &\leq S_f + S_g - s_f - s_g \\ &= S_f - s_f + S_g - s_g < \varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g &\geq s_{f+g} - S_f - S_g \\ &\geq s_f + s_g - S_f - S_g \\ &= s_f - S_f + s_g - S_g > -\varepsilon\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$-\varepsilon < \int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g < \varepsilon$$

tj.

$$\left| \int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g \right| < \varepsilon$$

za proizvoljan ε

Odatle slijedi

$$\left|\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g\right| = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^b \alpha f$$

$\varepsilon > 0$ proizvoljan

Neka je $\alpha > 0$
Dokaza za $\alpha < 0$ analogan.

Postoji subdivizija Σ takva da je $S_f - s_f < \varepsilon/\alpha$

Zbog

$$\inf_K \alpha f = \alpha \inf_K f \quad \text{i} \quad \sup_K \alpha f = \alpha \sup_K f$$

vrijedi

$$s_{\alpha f} = \alpha s_f \quad \text{i} \quad S_{\alpha f} = \alpha S_f$$

pa je

$$S_{\alpha f} - s_{\alpha f} = \alpha(S_f - s_f) < \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad \alpha f$ je integrabilna.

$$-\varepsilon < \alpha(s_f - S_f) = s_{\alpha f} - \alpha S_f \leq \int_a^b \alpha f - \alpha \int_a^b f \leq S_{\alpha f} - \alpha s_f = \alpha(S_f - s_f) < \varepsilon$$

tj.

$$\left| \int_a^b \alpha f - \alpha \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

za proizvoljan ε

$\Rightarrow$

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$$

Za $\alpha < 0$:

$$\int_a^b \alpha f = \int_a^b -(-\alpha) f = -\int_a^b (-\alpha) f = -(-\alpha) \int_a^b f$$

Za $\alpha = 0$ tvrdnja je očita.

Za $f \geq 0$ su sve Darbouxove sume nenegativne $\Rightarrow \int_a^b f \geq 0$
Za $f \leq g$ je $g - f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$.

Integrabilnost funkcije $|f|$

Definirajmo:

$$f_+ = \max\{f, 0\} \quad \text{i} \quad f_- = \max\{-f, 0\}$$

Vrijedi

$$f = f_+ - f_- \quad \text{i} \quad |f| = f_+ + f_-$$

Integrabilnost f_+:

Vrijedi:

$$\sup_K f_+ - \inf_K f_+ \leq \sup_K f - \inf_K f$$

Dokaz.

- Ako je $f \geq 0$ ($f = f_+$):

$$\sup_K f_+ = \sup_K f \quad \text{i} \quad \inf_K f_+ = \inf_K f$$

pa je $\sup_K f_+ - \inf_K f_+ = \sup_K f - \inf_K f$.

- Ako je $f \leq 0 \Rightarrow f_+ = 0$:

$$\sup_K f_+ - \inf_K f_+ = 0 \leq \sup_K f - \inf_K f$$

- Ako je $\sup_K f \geq 0$ i $\inf_K f \leq 0$:

$$\sup_K f_+ = \sup_K f \quad \text{i} \quad \inf_K f \leq 0 = \inf_K f_+$$

$$\sup_K f_+ - \inf_K f_+ = \sup_K f \leq \sup_K f - \inf_K f$$

$$\sup_K f_+ - \inf_K f_+ \leq \sup_K f - \inf_K f$$

$\Rightarrow$

$$S_{f_+} - s_{f_+} \leq S_f - s_f$$

$\Rightarrow \quad f_+$ integrabilna

$f_- = f_+ - f \Rightarrow f_-$ integrabilna

$|f| - = f_+ - f_- \Rightarrow |f|$ integrabilna

Q.E.D.

Teorem (5.4.)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija na $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i $c \in \langle a, b\rangle$. Ako je funkcija f integrabilna na segmentima $[a, c]$ i $[c, b]$, onda je f integrabilna na $[a, b]$ i

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

5.4. Integrabilnost monotonih i neprekidnih funkcija

Teorem (5.5.)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona funkcija na $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Tada je ona R-integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz:

- Pretpostavimo da je f rastuća na $[a, b]$.
- Ako je $f(a) = f(b)$ onda je f konstantna funkcija na $[a, b]$ pa je integrabilna (primjer).
- Pretpostavimo da je $f(b) - f(a) > 0$.
- Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.
- Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n \cdot \varepsilon > (f(b) - f(a))(b - a)$$

.

- Uzmimo ekvidistantnu subdiviziju

$$x_k = a + kh, \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \quad h = (b - a)/n.$$

- Za svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ vrijedi

$$\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_{k-1}) \quad \text{i} \quad \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k).$$

- Darbouxove sume su oblika

$$s = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})h \quad \text{i} \quad S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)h.$$

- Vrijedi

$$\begin{aligned} S - s &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))h \\ &= h\,(f(b) - f(a)) = (f(b) - f(a))\,(b - a)/n < \varepsilon. \end{aligned}$$

Po teoremu 1. f je R-integrabilna. Q.E.D

Definicija (5.3.)

Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je monotona po dijelovima na segmentu $[a, b]$ ako postoji subdivizija $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{k-1} < c_k < \ldots < c_{n-1} < c_n = b$ takva da je $f|_{[c_{k-1}, c_k]}$ monotona funkcija za sve $k = 1, \ldots, n$.

Korolar (5.1.)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ po dijelovima monotona funkcija na $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Tada je ona R-integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz: Tvrdnja slijedi iz teorema 5.5. i svojstva aditivnosti integrala po području integracije, tj.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dx.$$

Q.E.D.

Posljedica teorema 5.5.

Integrabilne su:

- 1
- x
- x^2 (Korolar 5.1., po dijelovima monotona)
- x^k (Korolar 5.1., po dijelovima monotona)
- Polinomi $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ (jer je linearna kombinacija integrabilnih funkcija, Teorem 5.3.)
- $e^x \rightarrow \quad \mathrm{sh} x, \mathrm{ch} x$
- $\ln x$, $\mathrm{arsh} x, \mathrm{arch} x$
- $\mathrm{th} x$, $\mathrm{cth} x$, $\mathrm{arth} x$, $\mathrm{arcth} x$
- $\sin x$, $\cos x$
- $\arcsin x$, $\arccos x$
- $\mathrm{tg} x$, $\mathrm{ctg} x$, $\mathrm{arcctg} x$, $\mathrm{arctg} x$

Integrabilnost neprekidnih funkcija

Definicija (5.4.)

Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je **jednoliko (uniformno)** neprekidna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in I\ (|x' - x''| < \delta) \Rightarrow (|f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

Napomena.

Neprekidna funkcija na I:

$$\forall x'\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x'' \in I\ (|x' - x''| < \delta) \Rightarrow (|f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

Uniformno neprekidna funkcija na I:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x'\ \forall x'' \in I\ (|x' - x''| < \delta) \Rightarrow (|f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

Neprekidna funkcija: $\delta = \delta(x', \varepsilon)$

Uniformno neprekidna funkcija: $\delta = \delta(\varepsilon)$

Teorem (5.6.)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*. Tada je ona jednoliko neprekidna na* $[a, b]$*.*

Teorem (5.7.)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*. Tada je ona R-integrabilna na* $[a, b]$*. Također, postoji točka* $c \in [a, b]$ *takva da je*

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Dokaz: Dovoljno je pokazati da $\forall \varepsilon > 0$ postoji subdivizija segmenta $[a, b]$ takva da za pripadne Darbouxove sume vrijedi $S - s < \varepsilon$.

- Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljani.
- f jednoliko neprekidna $\Rightarrow$ postoji $\delta > 0$ tako da
$$\forall x', x'' \in I, \ \ (|x' - x''| < \delta) \Rightarrow (|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}).$$
- Uzmimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $h = \dfrac{b-a}{n} < \delta$
- Ekvidistantna subdivizija: $x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n$.
- f neprekidna na segmentu $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow$ dostiže minimum i maksimum:
- postoje $x_k', x_k'' \in [x_{k-1}, x_k]$ takvi da je
$$m_k = f(x_k') = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \qquad \text{i} \qquad M_k = f(x_k'') = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$
- $(|x_k' - x_k''| \leq h < \delta) \quad \Rightarrow \quad M_k - m_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$
- $\Rightarrow S - s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)h < \frac{\varepsilon}{b-a} nh = \varepsilon$
- f je integrabilna na $[a, b]$.

- Neka su $m = \min\limits_{[a,b]} f$ i $M = \max\limits_{[a,b]} f$.
- Tada je $m \leq f(x) \leq M$.
- Monotonost integrala $\Rightarrow$

$$m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x)dx \leq M(b-a)$$

tj.

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(x)dx \leq M.$$

- Bolzano-Weierstrasseov teorem $\Rightarrow$ postoji $c \in [a, b]$ tako da je

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(x)dx$$

Q.E.D.

Korolar

Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na otvorenom intervalu* $I = \langle a, b \rangle$. *Ako za* **svaki** *segment* $[u, v] \subset \langle a, b \rangle$ *vrijedi*

$$\int_u^v f(x)dx = 0,$$

onda je $f(x) = 0$ *za svako* $x \in I$.

Dokaz:

- Pretpostavimo da postoji $c \in I$ takav da je $f(c) > 0$.
- Onda je $f > 0$ u nekoj okolini točke c, tj.
postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi

$$\forall x \in I, \ (|x - c| < \delta) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq \frac{1}{2} f(c) > 0.$$

- Neka je $h = \min\{\delta, c - a, b - c\}$.
- Tada je $[c - h, c + h] \subset I$
- f neprekidna $\quad \Rightarrow \quad$ postoji $t \in [c - h, c + h]$ tako da

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x) dx = 2f(t)h > 0.$$

- To je suprotno pretpostavci.

Slučaj $f(c) < 0$ analogno. Q.E.D.

Propozicija (5.1.)

Ako $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ iščezava svugdje osim možda u točki $c \in [a, b]$, onda je h integrabilna na $[a, b]$ i $\int_a^b h(x)dx = 0$.

Dokaz:

- $M = h(c) > 0$.
- Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo ekvidistantnu particiju $x_k = a + kh$, $h = 1/n$.
- S i s - gornja i donja Darbouxova suma
- $m_k = inf_{[x_{k-1}, x_k]} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 0$
- $c \in [x_{k-1}, x_k] \quad \Rightarrow \quad M_k = M$
- **1.** $c \in (x_{k-1}, x_k) \quad \Rightarrow \quad M_j = 0$ za $j \neq k \quad \Rightarrow \quad S = Mh$
- **2.** $c = x_{k-1} \quad \Rightarrow \quad M_{k-1} = M, \quad M_j = 0$ za $j \neq k-1, k$
  $\Rightarrow \quad S = 2Mh$

- **3.** $c = x_k \quad \Rightarrow \quad M_{k+1} = M, \quad M_j = 0$ za $j \neq k, k+1$
  $\Rightarrow \quad S = 2Mh$
- $\Rightarrow \quad S \leq 2Mh$
- $S - s \leq 2Mh = 2M/n$
- Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljani.
- Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $2M/n < \varepsilon$
- Tada je $S - s < \varepsilon$.
- h je integrabilna.

Korolar (5.3.)

Neka ograničena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ima na segmentu* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *najviše konačno točaka prekida prve vrste. Tada je ona R-integrabilna na* $[a, b]$.

Prekid prve vrste u c: Postoje lijevi i desni limes u c:

$$\lim_{x \to c-} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \to c+} f(x)$$

i različiti su

$$\lim_{x \to c-} f(x) \neq \lim_{x \to c+} f(x)$$

Dokaz:

1. f ima prekid u rubu intervala ($c = a$): $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq f(a)$.

Definiramo $\quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \neq a \\ \lim_{x \to a+} f(x) - f(a) & \text{za } x = a \end{cases}$

g iščezava svuda osim u $a \quad \Rightarrow \quad g$ je integrabilna.

Jer $F(x) = f(x) + g(x)$ zadovoljava

$$F(a) = f(a) + g(a) = f(a) + \lim_{x \to a+} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a+} f(x),$$

$$\lim_{x \to a+} F(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$$

jer za $x > a$ je

$$F(x) = f(x) + g(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

F je neprekidna $\quad \Rightarrow \quad F$ je integrabilna.

$f = F - g$ je integrabilna

2. f ima jedan prekid unutar intervala ($a < c < b$):

f je integrabilna na $[a, c]$ i $[c, b]$ pa je integrabilna na $[a, b]$

3. f ima konačno mnogo prekida na intervalu $[a, b]$

Konačno mnogo puta primijenimo tvrdnju 2. Q.E.D.

Komentar

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

   Obrazloženje: $\int_a^a f(x)dx = f(a)(a-a) = 0.$

   Ili: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

   Obrazloženje: $0 = \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx.$

5.5. Primitivna funkcija

Definicija (5.5.)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f : I \to \mathbb{R}$. **Primitivna funkcija** ili antiderivacija funkcije f na skupu I je svaka funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $F'(x) = f(x), \forall\, x \in I$.

Primjeri primitivne funkcije

- $f(x) = x \quad F(x) = \frac{x^2}{2}$, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$
- $f(x) = \cos x \quad F(x) = \sin x$
- $f(x) = e^x \quad F(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x \quad F(x) = ?$
- $f(x) = e^{-x^2} \quad F(x) = ?$

Teorem (5.8.)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f : I \to \mathbb{R}$ zadana funkcija. Ako su F i G bilo koje dvije primitivne funkcije od f na intervalu I, onda postoji konstanta $C \in \mathbb{R}$ takva da vrijedi $G(x) = F(x) + C, \forall x \in I$.

Dokaz:

- Neka je $F' = f$ i $G' = f$.
- $\Rightarrow \quad (G - F)' = G' - F' = f - f = 0$,
- $H = G - F \quad \Rightarrow \quad H'(x) = 0, \forall\, x \in I$
- Proizvoljni $x_1, x_1 \in I$, $x_1 \neq x_2$
- Lagrangeov teorem srednje vrijednosti $\quad \Rightarrow$
  $H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1)$, gdje je točka c između x_1 i x_2.
- $H'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad H(x_2) = H(x_1)$.
- $\Rightarrow \quad H$ konstantna funkcija na I, tj. $H(x) = C, \forall x \in I$.
- $G(x) = F(x) + C, \forall x \in I$. Q.E.D.

Teorem (5.9.)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna na I. Tada postoji primitivna funkcija od f na I.

Dokaz:

- $a \in I$ proizvoljna.
- Za svaki $x \in I$ je f neprekidna na $[a, x]$ ili $[x, a]$
  $\Rightarrow \quad f$ i integrabilna na $[a, x]$ ili $[x, a]$
- Definiramo
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \; \forall \, x \in I. \tag{2}$$
- F dobro definirana.
- F je primitivna funkcija od f ($F'(x) = f(x)$).

- Pokazujemo da je za $c \in I$, $F'(c) = f(c)$.
- $$\begin{aligned} F(x) - F(c) &= \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt \\ &= \int_c^x f(t)dt = f(c + \theta_x(x-c))(x-c). \end{aligned}$$

  za $\theta_x \in [0, 1]$.
- $\dfrac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c + \theta_x(x - c))$
- f neprekidna $\quad \Rightarrow$

  $$\begin{aligned} F'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} f(c + \theta_x(x-c)) \\ &= f(\lim_{x\to c}(c + \theta_x(x-c))) = f(c). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorem (5.10. Leibniz-Newtonova formula)

Ako je f neprekidna funkciju na otvorenom intervalu I i F bilo koja primitivna funkcija funkcije f na I, onda za svaki segment $[a, b] \subset I$ *vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Dokaz: Neka je F primitivna funkcija definirana s

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \ \forall\, x \in I. \tag{4}$$

Zbog $F(a) = 0$, vrijedi formula.

G bilo koja primitivna funkcija od f

$\Rightarrow$ postoji C takav da je $G(x) = F(x) + C$

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Q.E.D.

Oznaka:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Neodređeni integral funkcije f - skup svih primitivnih funkcija od f

Oznaka: $\displaystyle\int f(x)dx = \int f$

Direktna integracija

f	F
x^{α} $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg} x$
$\mathrm{sh} x$	$\mathrm{ch} x$
$\mathrm{ch} x$	$\mathrm{sh} x$

f	F
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{th} x$
$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$-\mathrm{cth} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Sin}^{-1} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Tg}^{-1} x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{sh}^{-1} x$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{th}^{-1} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{ch}^{-1} x$

Primjer

Izračunajte $\int_0^1 x^2 dx$.

Rješenje.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Primjer

Izračunajte $\int_a^b x^2 dx$.

Rješenje.

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Primjer

Izračunajte $\int_a^b x^k dx$.

Rješenje.

$$\int_a^b x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Primjer

Izračunajte $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Rješenje.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

Teorem (5.11)

Ako je F primitivna funkcija od f na I i G primitivna od g na I, onda je $\alpha F + \beta G$ primitivna funkcija od $\alpha f + \beta g$ na I. U oznaci neodređenog integrala to pišemo kao

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Dokaz: $H = \alpha F + \beta G$ je derivabilna

$H' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g.$ Q.E.D.

Metoda supstitucije

Teorem (5.12. Metoda supstitucije)

Neka su I i J otvoreni intervali, φ diferencijabilna funkcija na J i F primitivna funkcija od f na I. Neka je $\varphi(J) \subseteq I$, tj. $f \circ \varphi$ je definirana na J. Tada je $G = F \circ \varphi$ primitivna funkcija od $(f \circ \varphi)\varphi'$ na J. Također, $\forall\, \alpha, \beta \in I$ vrijedi

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Dokaz: Zbog $G = F \circ \varphi$ definirana i diferencijabilna na J.

$G'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Q.E.D.

Primjer

$$I = \int_2^3 2te^{t^2}\,dt.$$

$$\varphi(t) = t^2 \qquad \varphi'(t) = 2t$$

$$I = \int_2^3 e^{\varphi(t)}\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(2)}^{\varphi(3)} e^x dx = \int_{2^2}^{3^2} e^x dx = e^x \Big|_4^9 = e^9 - e^4.$$

Obično se piše: $x = t^2 \qquad dx = x' dt = 2t\,dt$

$$I = \int_{2^2}^{3^2} e^x dx = e^x \Big|_4^9 = e^9 - e^4.$$

Primjer

Računanje primitivne funkcije $\int 2te^{t^2}\,dt$.

$x = t^2 \quad dx = x'dt = 2t\,dt$

$$F = \int e^x\,dx = e^x + C = e^{t^2} + C.$$

Primjer

Naći primitivnu funkciju od $f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 + 3\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + 5}{\sqrt{x}}$.

Rješenje. Vrijedi

$$f(x) = x^{\frac{9}{2}} - 2x^{\frac{7}{2}} + 3 - x^{\frac{1}{6}} + 5x^{-\frac{1}{2}}$$

pa je

$$\int f(x)dx = \frac{2}{11}x^{\frac{11}{2}} - \frac{4}{9}x^{\frac{9}{2}} + 3x - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + 10x^{\frac{1}{2}} + C.$$

Primjer

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx.$$

Rješenje. $y = ax^2 + bx + c, \quad dy = (2ax+b)dx$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Primjer

$$\int \sin^n x \cos x dx$$

Rješenje. $y = \sin x, \quad dy = \cos x dx$

$$\int \sin^n x \cos x dx = \int y^n dy = \frac{1}{n+1} y^{n+1} + C = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + C.$$

Primjer

Naći $\int \sin mx \sin nx dx$, za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. U tu svrhu koristimo trigonometrijsku formulu:
$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$. Za $m \neq n$ i $m \neq -n$ imamo

$$\int \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx =$$

$$= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

Za $m = n$ imamo

$$\int (\sin mx)^2 dx = \int \frac{1-\cos 2mx}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2mx}{4m} + C.$$

Primjer

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Rješenje. Supstitucija $t = \ln x$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

Primjer

$$F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Rješenje. Supstitucija $x = \frac{a}{t}$, $dx = -\frac{adt}{t^2}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{\frac{a}{t}\sqrt{(\frac{a}{t})^2 - a^2}} \cdot \left(-\frac{adt}{t^2}\right) = -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= -\frac{1}{a}\mathrm{Sin}^{-1} t + C = -\frac{1}{a}\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{a}{t}\right) + C. \end{aligned}$$

Ako su u podintegralnoj funkciji korijeni oblika $\sqrt{c^2 - x^2}$ ili $\sqrt{c^2 + x^2}$ ili $\sqrt{x^2 - c^2}$, onda se pomoću supstitucije $x = c \sin t$, odnosno $x = c\,\mathrm{tg} t$, odnosno $x = \frac{c}{\cos^2 t}$ rješavamo korijena. Također je u slučaju $\sqrt{c^2 + x^2}$ moguće je koristiti supstituciju $x = c\,\mathrm{sh} t$, a u slučaju $\sqrt{x^2 - c^2}$ moguće koristiti supstituciju $x = c\,\mathrm{ch} t$

Primjer

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Rješenje. Stavimo $x = \mathrm{tg} t$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \mathrm{tg}^2 t \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2 t)\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Primjer

Izračunajmo površinu kruga radijusa r, tj. $P = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}$.

Rješenje.

$$F(x) = \int \sqrt{r^2 - x^2} = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) = r \sin t \\ dx = r \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\, r \cos t dt$$

$$= r^2 \int \cos^2 t\, dt = \frac{r^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{r^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = G(t).$$

Sada je $\varphi(0) = r \sin 0 = 0$ i $\varphi(\pi/2) = r \sin \pi/2 = r$, zbog strogog rasta funkcije $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, r]$ postoji njen inverz, te vrijedi

$$P = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt = 2r^2 (t + \frac{\sin 2t}{2}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \pi.$$

Treća je metoda parcijalne integracija koja je posljedica pravila za deriviranje produkta funkcija

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Teorem

Za funkcije $u, v : I \to \mathbb{R}$ i za svaki par $a, b \in I$ vrijedi

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx,$$

uz uvjet da integrali u (13) postoje.

Dokaz: Funkcija $F(x) = u(x)v(x)$ je primitivna funkcija od

$$f(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

pa vrijedi

$$\begin{aligned} u(x)v(x)\Big|_a^b &= \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Primjer

$$\int x\, e^x dx.$$

Rješenje.

$u'(x) = e^x$ i $v(x) = x$,

pa je $\quad u(x) = \int e^x dx = e^x$ i $v'(x) = 1$.

$$\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int e^x dx = x\, e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Malo složeniji primjer!

Primjer

$$F(x) = \int e^x \cos x \, dx.$$

Rješenje. Stavimo

$$u'(x) = \cos x \quad \text{i} \quad v(x) = e^x,$$

pa je

$$u(x) = \int \cos x \, dx = \sin x \quad \text{i} \quad v'(x) = e^x.$$

Odatle je

$$F(x) = \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Sada ponovimo prethodni postupak za $\int e^x \sin x \, dx$

s tim da uzmemo

$$u'(x) = \sin x \quad \text{i} \quad v(x) = e^x,$$

pa je

$$u(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x \quad \text{i} \quad v'(x) = e^x.$$

Tako dobivamo

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + F(x).$$

Uvrštavanjem u prvi integral dobivamo

$$F(x) = e^x \sin x - [-e^x \cos x + F(x)] \quad \Rightarrow$$

$$2F(x) = (\sin x + \cos x)\, e^x \quad \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)\, e^x.$$

Generalizacija prošlog primjera.

Primjer

$$F(x) = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

Rješenje. Stavimo

$$u'(x) = \cos \beta x \quad \text{i} \quad v(x) = e^{\alpha x},$$

pa je

$$u(x) = \int \cos \beta x \, dx = \frac{1}{\beta} \sin \beta x \quad \text{i} \quad v'(x) = \alpha e^{\alpha x}.$$

Odatle je

$$F(x) = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$$

Sada ponovimo prethodni postupak za $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$

s tim da uzmemo

$$u'(x) = \sin \beta x \quad \text{i} \quad v(x) = e^{\alpha x},$$

pa je

$$u(x) = \int \sin \beta x \, dx = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \quad \text{i} \quad v'(x) = \alpha e^{\alpha x}.$$

Tako dobivamo

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx &= -\frac{1}{\beta}\, e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \\ &= -\frac{1}{\beta}\, e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} F(x). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u prvi integral dobivamo

$$F(x) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \left[-\frac{1}{\beta}\, e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} F(x) \right] \quad \Rightarrow$$

$$\left[1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right] F(x) = \left(\frac{1}{\beta} \sin \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta x \right) e^{\alpha x} \quad \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\sin \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \cos \beta x \right) e^{\alpha x}$$

Još složeniji primjer!

Primjer

$$F_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje. Uzmimo

$$u'(x) = 1 \quad \text{i} \quad v(x) = (x^2+1)^{-n},$$

pa imamo

$$u(x) = x \quad \text{i} \quad v'(x) = -2nx(x^2+1)^{-(n+1)}.$$

Odatle je

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx = \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n[F_n(x) - F_{n+1}(x)] \qquad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}F_n(x), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Za $n = 1$ imamo

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \mathrm{Tg}^{-1} x + C,$$

pa sada možemo rekurzivno računati ostale F_n, $n \geq 2$.

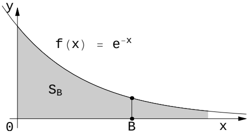
5.8 Nepravi integral

Riemannov integral: segment $[a, b]$

Nepravi integral: $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $\langle a, b\rangle$, $[a, \infty\rangle$, $\langle -\infty, b]$, $\langle -\infty, \infty\rangle$

$f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0.$$



Interval $[0, \infty\rangle$ je neograničen

f integrabilna na svakom segmentu $[0, B]$

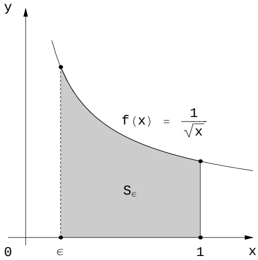
$$\int_0^B e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^B = 1 - e^{-B}$$

$$\lim_{B\to\infty} \int_0^B e^{-x} dx = \lim_{B\to\infty} (1 - e^{-B}) = 1$$

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{B\to\infty} \int_0^B e^{-x} dx, \quad \text{- nepravi integral}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ x > 0$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$ - funkcija je neograničena



$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\,\Big|_{\varepsilon}^{1} = 2(1-\sqrt{\varepsilon}).$$

$$\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$ - nepravi integral

Definicija (5.6.)

Neka je funkcija $f : [a, b\rangle \to \infty$ integrabilna na svakom segmentu $[a, B]$ gdje je $B < b \leq +\infty$. Ako postoji konačan limes

$$\lim_{B \to b-} \int_a^B f(x)dx, \tag{5}$$

onda se taj limes zove **nepravi integral** funkcije f na $[a, b\rangle$ i označava s

$$\int_a^{\to b} f(x)dx. \tag{6}$$

Također se kaže da integral (6) konvergira. Ako limes u (5) ne postoji kažemo da integral (6) divergira.

Analogno definiramo integral na $\langle a, b]$:

$$\int_{a\leftarrow}^{b} f(x)dx = \lim_{A \to a+} \int_{A}^{b} f(x)dx.$$

Ako je f integrabilna na svakom segmentu $[A, B] \subset \langle a, b \rangle$, onda, uz uvjet da svi limesi postoje, definiramo

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)dx = \lim_{A \to a+} \int_{A}^{c} f(x)dx + \lim_{B \to b-} \int_{c}^{B} f(x)dx,$$

gdje je $c \in \langle a, b \rangle$ bilo koja točka. Može se pokazati da prethodna definicija ne ovisi o c.

Napomena Zato što su i limes funkcije i R-integral monotoni i linearni, ta svojstva ima i neodređeni integral.

Primjer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty} \int_0^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty} \left(\mathrm{Tg}^{-1} x \,\Big|_0^B \right)$$
$$= \lim_{B\to+\infty} \mathrm{Tg}^{-1} B = \frac{\pi}{2}$$

Primjer

$$\int_{-1\leftarrow}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to-1+} \int_{\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to-1+} (-\mathrm{Sin}^{-1}\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Primjer

$\int_0^{+\infty} \cos\, x dx$ divergira

jer je

$$\int_0^B \cos x \, dx = \sin B,$$

a

$$\lim_{B \to +\infty} \sin B$$

ne postoji.

Teorem (5.15.)

Neka je $a > 0$*.*

1. *Integral* $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ *konvergira za* $p > 1$ *i divergira za* $p \leq 1$*.*
2. *Integral* $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{a} \frac{dx}{x^p}$ *konvergira za* $0 < p < 1$ *i divergira za* $p \geq 1$*.*
3. *Integral* $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ *divergira za svako* $p \geq 0$*.*

Dokaz: 1. Za $p = 1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B \to +\infty} \left(\ln x \Big|_a^B \right) = \lim_{B \to +\infty} \ln B - \ln a = +\infty,$$

integral divergira k $+\infty$.
Za $p \neq 1$

$$\int_a^B \frac{dx}{x^p} = \left(\frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} \right) \Big|_a^B = \frac{1}{1-p}(B^{1-p} - a^{1-p}).$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & (\alpha > 0) \\ 0 & (\alpha < 0) \end{cases},$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty & (1-p > 0) \\ 0 & (1-p < 0) \end{cases}.$$

2. Za $p = 1$ je

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x} = \ln a - \lim_{\varepsilon \to 0+} \ln \varepsilon = +\infty.$$

Za $p \neq 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}(a^{1-p} - \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{1-p}) = \begin{cases} -\infty & (1-p<0) \\ \frac{1}{1-p}a^{1-p} & (1-p>0) \end{cases}.$$

3. Slijedi iz 1. i 2. Q.E.D.

Teorem (5.16.)

Neka je $a > 0$ i neka su funkcije $f, \varphi : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

(i) $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ *za svaki* $x \geq x_0 > a$,

(ii) *za svako* $B > a$ *postoje integrali* $\displaystyle\int_a^B f(x)dx$ *i* $\displaystyle\int_a^B \varphi(x)dx$.

Ako je integral

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \tag{7}$$

konvergentan, onda je konvergentan i integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{8}$$

i vrijedi

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx. \tag{9}$$

Ako je integral (8) divergentan, onda je i integral (7) divergentan.

Dokaz:

- $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ i $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$ rastu
- $F(x) \leq \Phi(x)$, za svaki $x > a$.
- Za rastuću funkciju $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x)$ postoji $\Leftrightarrow$ funkcija ograničena odozgo.
- Odatle slijedi tvrdnja teorema. Q.E.D.

Korolar (5.4.)

Neka su funkcije $f, \varphi : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *pozitivne i neka postoji*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c \quad (0 \leq c \leq +\infty). \tag{10}$$

Ako konvergira integral (11) i ako je $c < +\infty$ *onda konvergira i integral (12).*
Ako divergira integral (12) i ako je $c > 0$ *onda divergira i integral (11).*
Ako je $0 < c < +\infty$ *onda oba integrala istovremeno konvergiraju ili divergiraju.*

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \tag{11}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{12}$$

Dokaz: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = c$

Ako je $c < +\infty \quad \Rightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; \Delta > 0$ takav da

$(x > \Delta) \Rightarrow (|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - c| < \varepsilon)$

$\Rightarrow \quad (\frac{f(x)}{\varphi(x)} < c + \varepsilon)$

$\Rightarrow \quad (f(x) < (c + \varepsilon)\varphi(x)),$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq (c + \varepsilon) \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ konvergentan $\quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergentan

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ divergentan $\quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ divergentan

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c$$

Analogno,za $c > 0$ i $0 < \varepsilon < c$ postoji $\Delta > 0$ tako da

$$(x > \Delta) \Rightarrow (|\tfrac{f(x)}{\varphi(x)} - c| < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (\tfrac{f(x)}{\varphi(x)} > c - \varepsilon)$$

$$\Rightarrow ((c - \varepsilon)\varphi(x) < f(x)),$$

$$(c - \varepsilon) \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergentan $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ konvergentan

$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ divergentan $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ divergentan

U slučaju $0 = c <$, zbog $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{c}$,
(8) i (7) istovremeno konvergiraju ili divergiraju. Q.E.D.

Ako konvergira integral

$$\int_a^{\to b} |f(x)|dx,$$

onda kažemo da integral $\int_a^{\to b} f(x)dx$ **apsolutno** konvergira.

Ako integral $\int_a^{\to b} f(x)dx$ konvergira ali ne konvergira apsolutno, onda kažemo da **uvjetno** konvergira

Propozicija (5.2.)

Neka je $f : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *funkcija. Ako je konvergentan nepravi integral* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$*, tada je konvergentan i nepravi integral* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$*, tj. ako je integral apsolutno konvergentan, onda je i konvergentan.*

Dokaz: Definiramo

$$f_+(x) = \max\{0, f(x)\} \quad f_-(x) = \max\{0, -f(x)\}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad \text{i} \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

Zbog $0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|$ i $0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$

konvergencija $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ povlači

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f_+(x)dx$ i $\displaystyle\int_a^{+\infty} f_-(x)dx$ su konvergentni.

Sada je $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f_+(x)dx - \int_a^{+\infty} f_-(x)dx.$ Q.E.D.

Obratna tvrdnja od tvrdnje u prethodnoj propoziciji nije općenito istinita (da je konvergentan interval ujedno i apsolutno konvergentan).

Primjer

Nepravi integrali

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx, \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx, \quad (a>0, p>1),$$

su konvergentni.

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \text{ za } x \geq 1. \quad \Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$\frac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{1+x^2}dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\frac{|\cos x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^p}dx \leq \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$$

Primjer

(Gama funkcija) Za $\alpha \geq 1$ definiramo nepravi integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx. \tag{13}$$

Konvergencija:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$$

Integral $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{2}} dx$ je konvergentan

$\Longrightarrow$ Integral $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$ je konvergentan

Funkciju $\Gamma : [1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zovemo **gama funkcija**.

Za gama funkciju vrijedi rekurzija:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad (\alpha \geq 1).$$

Parcijalna integracija:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-x} x^{\alpha} dx &= -e^{-x} x^{\alpha} \Big|_0^t + \alpha \int_0^t e^{-x} x^{\alpha-1} dx \\ &= -e^{-t} t^{\alpha} + 0 + \alpha \int_0^t e^{-x} x^{\alpha-1} dx. \end{aligned}$$

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} t^{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} d = \alpha \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx. = \alpha\Gamma(\alpha).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

za $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n(n-1)\cdots 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

Numerička integracija

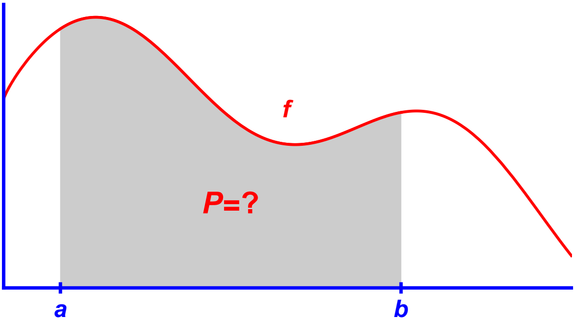
Za velik broj funkcija ne znamo primitivnu funkciju ili je primitivnu funkciju teško izračunati pa ne možemo koristiti Newton-Leibnizovu formulu:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx,$$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{x}dx.$$

Podintervalne funkcije su neprekidne pa znamo da primitivna funkcija postoji.

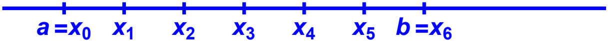
Kako izračunati površinu ispod krivulje?



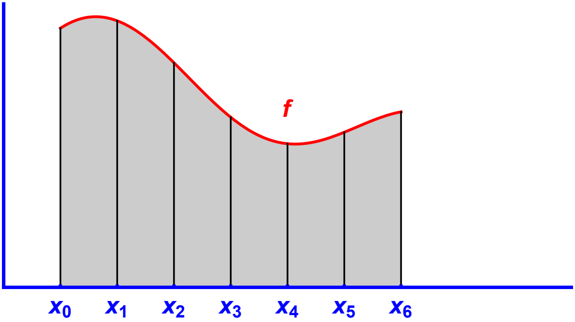
Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Segment $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova (ekvidistantna particija):

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_k = a + k\,h, \quad k = 0, \ldots, n.$$

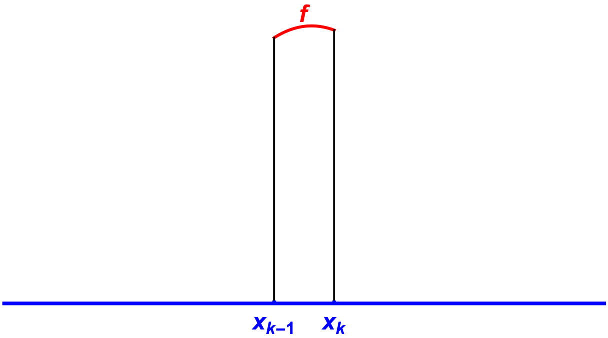


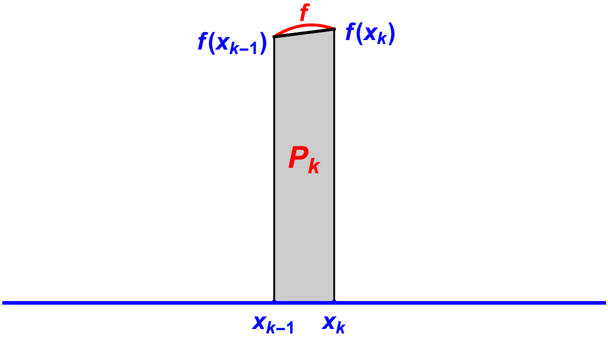
Površinu smo podijelili na n dijelova:



Promatrajmo k-ti dio.

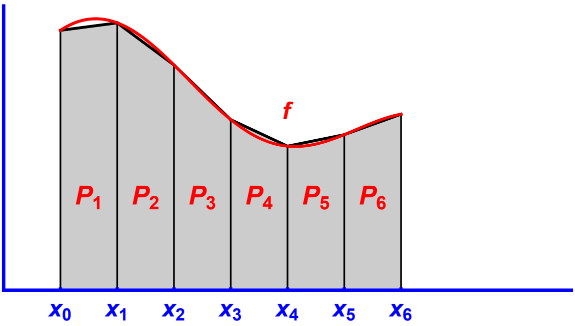
Promatramo k-ti dio:





Umjesto površine ispod grafa funkcije f računamo površinu trapeza:

$$P_k = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}h$$



Aproksimacija za $\int_a^b f(x)dx$ je zbroj svih površina trapeza:

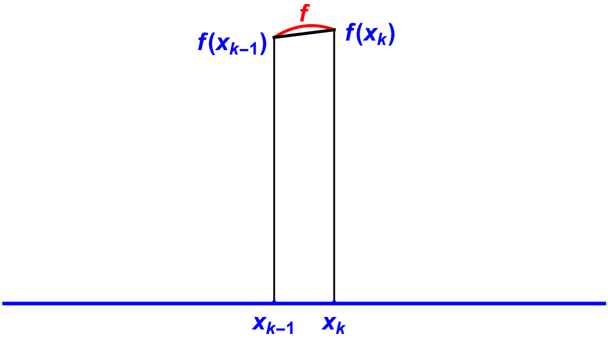
$$T_n = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n.$$

$$
\begin{aligned}
T_n &= P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = \\
&= \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}h \; + \; \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h \; + \; \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}h + \\
&\quad + \ldots + \frac{f(x_{n-2})+f(x_{n-1})}{2}h \; + \; \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}h = \\
&= \frac{h}{2}\Big[f(x_0)+f(x_1) \; + \; f(x_1)+f(x_2) \; + \; f(x_2)+f(x_3) + \\
&\quad + \ldots + f(x_{n-2})+f(x_{n-1}) \; + \; f(x_{n-1})+f(x_n)\Big] = \\
&= \frac{h}{2}\Big[f(x_0)+2\,f(x_1)+2\,f(x_2)+\ldots+2\,f(x_{n-1})+f(x_n)\Big] = \\
&= \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)\right]
\end{aligned}
$$

Trapezna formula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right], \qquad h = \frac{b-a}{n}.$$

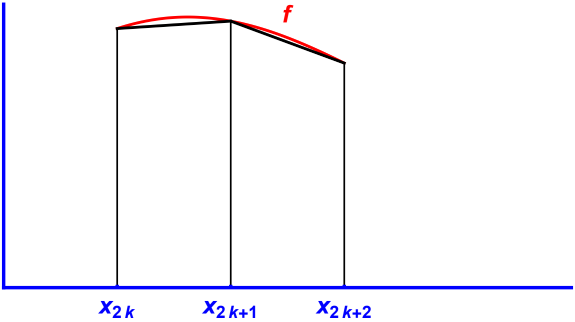
Trapeznu formulu smo dobili tako da smo funkciju f aproksimirali pravcem:



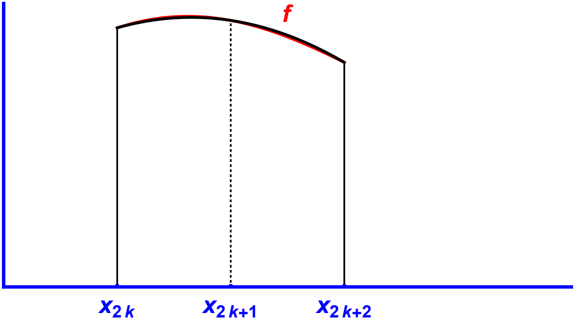
Bolju aproksimaciju dobijemo ako funkciju f umjesto pravcem aproksimiramo parabolom.

Za parabolu nam trebaju tri točke $\longrightarrow$ dva segmenta.

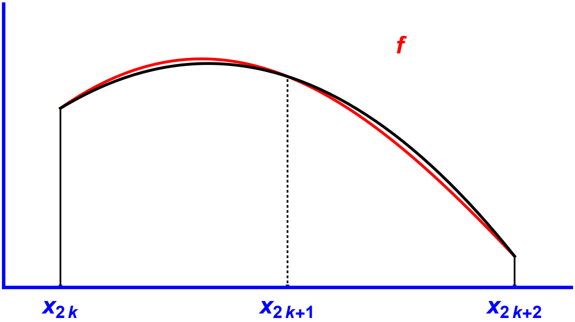
Umjesto



Dobijemo



ili malo uvećano:



- aproksimacija polinomom 1. stupnja $\rightarrow$ trapezna formula (trapezno pravilo)
- aproksimacija polinomom 2. stupnja $\rightarrow$ Simpsonova formula
- aproksimacija polinomom m-tog stupnja, $m \in \mathbb{N} \rightarrow$ Newton-Cotesove formule

Da li niz T_n, dobiven trapeznom formulom, konvergira (prema vrijednosti integrala)

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b f(x)dx \quad ?$$

Uočimo da je

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \quad \leq \quad \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \quad \leq \quad \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Zato je

$$s_n \ \leq \ T_n \ \leq \ S_n,$$

gdje su s_n i S_n donja i gornja Darbouxova suma za pripadnu ekvidistantnu subdiviziju.

Može se pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = I_* \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = I^*.$$

Ako je funkcija f integrabilna ($I_* = I^* = I$) tada je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = I.$$

Prema teoremu o sendviču, i niz T_n je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} T_n = I = \int_a^b f(x)dx.$$

Primjer

Trapeznom formulom aproksimirajte integral

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

koristeći podjelu intervala $[0, 1]$ na 5 djelova.

Rješenje. Interval $[0, 1]$ dijelimo na 5 djelova ($n = 5$):

$$0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2.$$

$$x_k = a + k\,h = 0.2\,k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1.$$

Trapezna formula:

$$
\begin{aligned}
T_5 &= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{5-1} f(x_k) + f(b)\right] = \\
&= \frac{0.2}{2}\left[\mathrm{e}^{-0^2} + 2\,\mathrm{e}^{-0.2^2} + 2\,\mathrm{e}^{-0.4^2} + 2\,\mathrm{e}^{-0.6^2} + 2\,\mathrm{e}^{-0.8^2} + \mathrm{e}^{-1^2}\right] = \\
&= 0.1\left[\mathrm{e}^{0} + 2\,\mathrm{e}^{-0.04} + 2\,\mathrm{e}^{-0.16} + 2\,\mathrm{e}^{-0.36} + 2\,\mathrm{e}^{-0.64} + \mathrm{e}^{-1}\right] = \\
&= \mathbf{0.744368339763667}
\end{aligned}
$$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}\,1 = 0.746824132812427$$

Primjeri za veće vrijednosti *n*-a:

n	T_n
5	0.744368339763667
6	0.745119412436179
7	0.745571991830094
8	0.745865614845695
9	0.746066867912669
10	0.746210796131749
20	0.746670836939873
100	0.746818001467970
1000	0.746824071499185
10,000	0.746824132199295
100,000	0.746824132806296
1,000,000	0.746824132812366
10,000,000	0.746824132812426

Simpsonova formula

n	I_n
6	0.746830391489345
8	0.746826120527467
10	0.746824948254443
20	0.746824183875915
100	0.746824132894176
1000	0.746824132812435
2000	0.746824132812428

Simpsonova 3/8-ska formula

n	I_n
6	0.746838057512131
9	0.746826916992168
12	0.746825016655073
21	0.746824227286997
102	0.746824132982351
1002	0.746824132812445
1701	0.746824132812429

Booleova formula

n	I_n
8	0.74682416990989 8
12	0.746824135371851
16	0.746824133229615
20	0.746824132917346
100	0.746824132812433
120	0.746824132812429