3. LIMES FUNKCIJE I NEPREKIDNOST FUNKCIJE

Limes funkcije

Za $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \dfrac{1}{n}$ znamo što je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$ $(= 0)$.

Kako definirati sličan limes za $f : \mathbb{R}\ \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$?

Što je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$?

Što se događa s vrijednošću funkcije

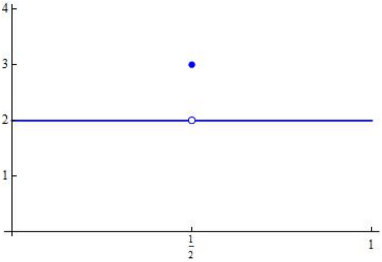
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

kada se argument x približava nuli?

Primjer

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{za } x \neq \frac{1}{2}, \\ 3, & \text{za } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

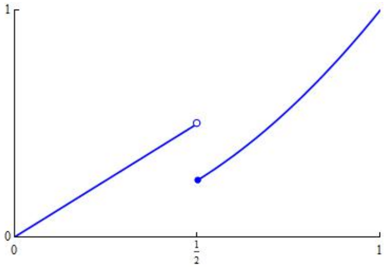


Kada se x približava k $\frac{1}{2}$, $f(x)$ se približava k 2 (iako je $f(\frac{1}{2}) = 3$).

Primjer

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{za } x < \frac{1}{2}, \\ x^2, & \text{za } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Kada se x približava k $\frac{1}{2}$ s lijeva, $f(x)$ se približava k $\frac{1}{2}$.

Kada se x približava k $\frac{1}{2}$ s desna, $f(x)$ se približava k $\frac{1}{4}$.

Definicija

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $c \in I$. Za funkciju $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ kažemo da ima **limes** u točki c jednak L ako za svaki niz $(c_n)_n$ u $I \setminus \{c\}$ vrijedi:

$$\left(\lim_{n\to\infty} c_n = c\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(c_n) = L\right).$$

Tada pišemo $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Napomena.

- Nije nužno da je domena funkcije f otvoreni interval (npr. može biti i segment).
- Funkcija može biti definirana (i obično je) i u točki c. Članovi niza $(c_n)_n$ trebaju biti različiti od c.
- Za limes u točki c nije bitna vrijednost funkcije u toj točki

Primjer

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = 4.$$

Rješenje. Neka je $(c_n)_n$ proizvoljan niz realnih brojeva sa svojstvom

$$\lim_{n\to\infty} c_n = -2 \ \text{ i } \ c_n \neq -2,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jer je $\quad \dfrac{c_n^2-4}{c_n+2} = c_n - 2,$

vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n^2-4}{c_n+2} = \lim_{n\to\infty} (c_n - 2) = -2 - 2 = -4.$$

■

Teorem (3.1. Cauchyjeva definicija limesa)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $c \in I$ i $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$. Limes funkcije f u točki c postoji i $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)$$

$$((0 < |x - c| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)).$$

Dokaz: $\Leftarrow$

Neka vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)$$

$$((0 < |x - c| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)).$$

Uzmimo bilo koji niz $(c_n)_n$ u $I \setminus \{c\}$ takav da je $c = \lim_n c_n$, tj.

$$(\forall \delta > 0)(\exists n_\delta \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})((n > n_\delta) \Rightarrow (|c_n - c| < \delta)).$$

Pokažimo da je tada $\lim_n f(c_n) = L$.
Za svaki $\varepsilon >$ postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Za taj δ postoji n_δ tako je ispunjeno

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n > n_\delta \quad \Longrightarrow \quad |c_n - c| < \delta.$$

Uzmimo sada $n_\varepsilon = n_\delta$ i za $\forall n \in \mathbb{N}$ imamo

$$n > n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |c_n - c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(c_n) - L| < \varepsilon,$$

a to znači da le $f(c_n)$ konvergentan i

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

$\Rightarrow$

Obratno, neka je $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, i neka ne vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in I)$$

$$((0 < |x - c| < \delta) \quad \Longrightarrow \quad (|f(x) - L| < \varepsilon)).$$

tj. vrijedi

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \delta > 0)\ (\exists x_\delta \in I)$$

$$((0 < |x_\delta - c| < \delta) \quad \wedge \quad (|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon > 0)).$$

Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ uzmimo

$$\delta_n = \frac{1}{n}$$

i za svaki δ_n postoji $x_{\frac{1}{n}}$ takav da je

$$(0 < |x_\delta - c| < \delta) \quad \wedge \quad (|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon > 0).$$

Ovime smo definirali niz $c_n = x_{\frac{1}{n}}$ u $I \setminus \{c\}$ za koji vrijedi

$$|c_n - c| < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad |f(c_n) - L| \geq \varepsilon > 0,$$

dakle,

$$\lim_n c_n = c,$$

a niz $(f(c_n))_n$ ne konvergira k L što je kontradikcija s definicijom limesa funkcije.
Dakle, ako je $\lim_{x \to c} f(x) = L$, onda vrijedi Cauchyjeva definicija limesa.
Q.E.D.

Napomena

Cauchyjeva definicija limesa funkcije ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju koja glasi:
Za svaku okolinu $\langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$ broja L postoji okolina $\langle c-\delta, c+\delta\rangle$ broja c koja se, s izuzetkom točke c, preslikava u okolinu $\langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$, tj.

$$f(\langle c-\delta, c+\delta\rangle \setminus \{c\}) \subseteq \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle.$$

Limes funkcije je u skladu sa operacijama zbrajanja i množenja s funkcijama.

To je posljedica činjenice da je limes niza u skladu s tim operacijama i definicije limesa funkcije.

Teorem (3.2.)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $c \in I$ i $f, g : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ za koje postoje $\lim_{x\to c} f(x)$ i $\lim_{x\to c} g(x)$. Tada vrijedi:

1. *Funkcija $f \pm g$ ima limes u c i*

$$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] \;=\; \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x).$$

2. *Za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ funkcija λf ima limes u c i*

$$\lim_{x\to c} \lambda f(x) \;=\; \lambda \lim_{x\to c} f(x).$$

3. *Funkcija $f \cdot g$ ima limes u c i*

$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \lim_{x\to c} g(x).$$

4. Ako je $g(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{c\}$ i $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$, funkcija $\dfrac{f}{g}$ ima limes u c i
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}.$$
5. Funkcija $|f|$ ima limes u c i
$$\lim_{x \to c} |f(x)| = |\lim_{x \to c} f(x)|.$$

Dokaz: Sve tvrdnje slijede iz odgovarajućih tvrdnji za limese nizova za nizove $(f(c_n))_n$ i $(g(c_n))_n$.

Npr. za tvrdnju 1.

Neka je $(c_n)_n$ niz u intervalu I sa svojstvom

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \text{ i } c_n \neq c, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(f+g)(c_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(c_n)+g(c_n)) = \\
&= \lim_{n\to\infty} f(c_n) + \lim_{n\to\infty} g(c_n) = \\
&= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorem (3.3. teorem o sendviču)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoren interval,* $c \in I$ *i* $f, g : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ *za koje postoje* $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x \to c} g(x)$*.*

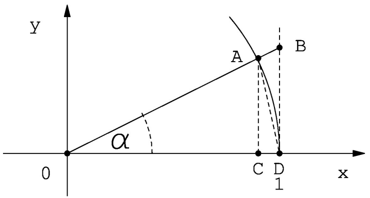
1. *Ako je* $f(x) \leq g(x), \forall x \in I \setminus \{c\}$*, onda je*
$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$
2. *ako je* $h : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ *takva da vrijedi*
$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall x \in I \setminus \{c\}$$
i $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = L$*, onda funkcija* h *ima limes u* c *i* $\lim\limits_{x \to c} h(x) = L$*.*

Dokaz: Tvrdnje slijede iz odgovarajućih tvrdnji u teoremu 2.5 (teorem o sendviču za nizove) za nizove $(f(c_n))_n$,$(g(c_n))_n$ i $(h(c_n))_n$. **Q.E.D.**

Primjer

Pokazati da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



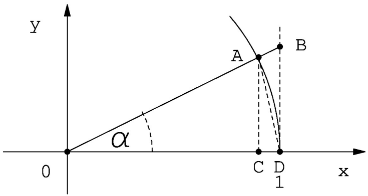
$$x = |\overset{\frown}{\mathrm{AD}}| > 0, \qquad \sin x = |\overline{AC}|$$

Duljina luka $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$je veća od duljine tetive toga luka ($\overline{AD}$):

$$|\overset{\frown}{\mathrm{AD}}| > |\overline{AD}|.$$

Tetiva $\overline{AD}$ je hipotenuza pravokutnog trokuta $\triangle ACD$.
Duljina katete $\overline{AC}$ j je manja od duljine hipotenuze $\overline{AD}$ j

$$\sin x = |\overline{AC}| < |\overline{AD}| < |\overset{\frown}{\mathrm{AD}}| = x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin x}{x} < 1 \ \text{ za } \ x > 0,$$



$$x = |\overset{\frown}{AD}| > 0, \qquad \text{tg } x = |\overline{BD}|$$

Površina trokuta $\triangle 0DB$ > površina isječka $0DA$:

$$\frac{1}{2} 1 \cdot |\overline{BD}| > \pi \frac{|\overset{\frown}{AD}|}{2\pi} \implies \text{tg } x > x$$

$$\implies \cos x < \frac{\sin x}{x}$$

za $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Dakle,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Za

$$0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

Zbog parnosti funkcija s obije strane nejednakosti isto vrijedi za sve $x \neq 0$.

Jer je

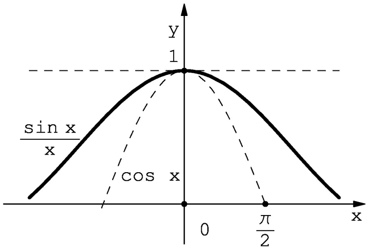
$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

iz teorema 3.3 (teorem o sendviču) slijedi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$\blacksquare$

Graf funkcije $\dfrac{\sin x}{x}$



Limes u $\overline{\mathbb{R}}$

Definicija

1. Za funkciju $f : \langle a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ kažemo da ima limes u točki $+\infty$ jednak $L \in \mathbb{R}$ ako za svaki niz $(c_n)_n$ u $\langle a, +\infty\rangle$ vrijedi:

$$(\lim_{n\to\infty} c_n = \infty) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} f(c_n) = L).$$

Tada pišemo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty) = L$.

2. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $c \in I$. Za funkciju $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ kažemo da ima limes u točki c jednak $+\infty$ ako za svaki niz $(c_n)_n$ u $I \setminus \{c\}$ vrijedi:

$$(\lim_{n\to\infty} c_n = c) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \infty).$$

Tada pišemo $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$.

Napomena.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty) = L$ ako vrijedi:

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\Delta > 0)\ (\forall x \in \langle a, +\infty\rangle)$$

$$((x > \Delta) \implies (|f(x) - L| < \varepsilon).$$

2. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ ako vrijedi:

$$(\forall E > 0)\ (\exists\delta > 0)\ (\forall x \in I)$$

$$((0 < |x - c| < \delta) \implies (f(x) > E)).$$

item[3.] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(\infty) = \infty$ ako vrijedi:

$$(\forall E > 0)\ (\exists\Delta > 0)\ (\forall x \in \langle a, \infty\rangle)$$

$$((x > \Delta) \implies (f(x) > E)).$$

Zadatak

Definirajte sami i odredite primjere

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Jednostrani limes u $\mathbb{R}$

Limes slijeva funkcije u točki c - promatramo samo nizove koji konvergiraju k c s lijeve strane, ili samo rastuće nizove u $I \setminus \{c\}$.

Na isti način bismo definirali i limes zdesna funkcije u točki c.

Definicija

1. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $c \in I$. Za funkciju $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ kažemo da ima limes slijeva u točki c jednak L ako za svaki niz $(c_n)_n$ u I sa svojstvom $c_n < c \ \forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(\lim_{n\to\infty} c_n = c) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} f(c_n) = L).$$

   Tada pišemo $\lim\limits_{x\nearrow c} f(x) = \lim\limits_{x\to c-} f(x) = f(c-) = L$.

2. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $c \in I$. Za funkciju $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ kažemo da ima limes sdesna u točki c jednak L ako za svaki niz $(c_n)_n$ u I sa svojstvom $c_n > c \ \forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(\lim_{n\to\infty} c_n = c) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} f(c_n) = L).$$

   Tada pišemo $\lim\limits_{x\searrow c} f(x) = \lim\limits_{x\to c+} f(x) = f(c+) = L$.

Napomena. Cauchyjeva definicija limesa slijeva i sdesna

1. $\lim\limits_{x\nearrow c} f(x) = \lim\limits_{x\to c-} f(x) = f(c-) = L$ ako vrijedi:

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta > 0)\ (\forall x \in I)$$

$$((0 < c - x < \delta) \quad \Longrightarrow \quad (|f(x) - L| < \varepsilon))\,.$$

2. $\lim\limits_{x\searrow c} f(x) = \lim\limits_{x\to c+} f(x) = f(c+) = L$ ako vrijedi:

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta > 0)\ (\forall x \in I)$$

$$((0 < x - c < \delta) \quad \Longrightarrow \quad (|f(x) - L| < \varepsilon)).$$

Jednostrani limes funkcije ima ista svojstva kao i limes funkcije,

dakle, vrijede teoremi 2 i 3

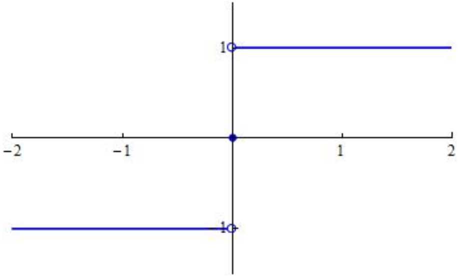
ako u njima limes zamijenimo s lijevim ili desnim limesom.

Primjer

Funkcija signum (predznak) definirana s

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

nema limes u nuli, ali ima i lijevi i desni limes u nuli i oni su različiti.



Za svaki $x < 0$ je $\mathrm{sgn}(x) = -1$, a za $x > 0$ je $\mathrm{sgn}(x) = 1$.

$\Longrightarrow$ za svaki niz $(c_n)_n$ koji konvergira k nuli slijeva, $f(c_n) = -1$
$\Longrightarrow$ $\lim_n f(c_n) = -1$.

Za nizove koji konvergira k nuli a za one s desna je jednak 1.
To znači da funkcija sgn nema limesa u nuli, ali je zato

$$\lim_{x\to 0-} \mathrm{sgn}(x) = -1$$

i

$$\lim_{x\to 0+} \mathrm{sgn}(x) = 1.$$

Veza između limesa funkcije i jednostranih limesa funkcije dana je slijedećim teoremom.

Teorem (3.5.)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $c \in I$ i $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$. Za funkcija f postoji $\lim_{x \to c} f(x)$ ako i samo ako limesi $\lim_{x \to c-} f(x)$ i $\lim_{x \to c+} f(x)$ postoje i jednaki su.

$$(\lim_{n \to \infty} c_n = c) \quad \Longrightarrow \quad (\lim_{n \to \infty} f(c_n) = L).$$

- za svaki niz $(c_n)_n$ u $I \setminus \{c\}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ Limes u c
- za svaki niz $(c_n)_n$ u I, $c_n < c \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ Limes slijeva u c
- za svaki niz $(c_n)_n$ u I, $c_n > c \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ Limes sdesna u c

Dokaz: $\Rightarrow$ Ako postoji $\lim_{x \to c} f(x) = L$, onda vrijedi

$$(\lim_{n\to\infty} c_n = c) \implies (\lim_{n\to\infty} f(c_n) = L)$$

za svaki niz $(c_n)_n$ u $I \setminus \{c\}$ pa posebno vrijedi za one kod kojih je $c_n < c$ i onih kod kojih je $c_n > c$.

Postoje limesi slijeva i sdesna i jednaki su L.

$\Leftarrow$ Neka postoje limesi slijeva i sdesna i neka su jednaki (L).

Neka je $(c_n)_n$ u $I \setminus \{c\}$ proizvoljan niz za koji vrijedi $\lim_{n\to\infty} c_n = c$

Ako je skup $\{c_n > c\}$ konačan tada je podniz niza (c_n) definiran s $\{c_n < c\}$ konvergentan. Ako označimo podniz s (a_n), vrijedi $\lim_n a_n = c$. Jer je $a_n < c$ slijedi da je

$$\lim_n f(a_n) = L.$$

Niz $(f(a_n))$ je podniz niza $(f(c_n))$ i razlikuju se za konačno mnogo članova. Niz $(f(c_n))$ je konvergentan i ima isti limes kao niz $(f(a_n))$:

$$\lim_n f(c_n) = L.$$

Ako je skup $\{c_n < c\}$ konačan konvergencija niza $(f(c_n))$ slijedi analogno.

Ako su oba skupa beskonačna, tada s (a_n) označimo podniz definiran s $\{c_n < c\}$ i s (b_n) označimo podniz definiran s $\{c_n > c\}$.

Zbog postojanja limesa slijeva, niz $(f(a_n))$ je konvergentan i

$$\lim_n f(a_n) = L.$$

Zbog postojanja limesa sdesna, niz $(f(b_n))$ je konvergentan i

$$\lim_n f(b_n) = L.$$

Budući da nizovi $(f(a_n))$ i $(f(b_n))$ čine potpunu particiju niza $(f(c_n))$, a oba su konvergentna i imaju isti limes, prema propoziciji (limes parnog i neparnog podniza) i niz $(f(c_n))$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_n f(c_n) = L.$$

Q.E.D.

Propozicija

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $c \in I$. Ako postoji $\lim_{x \to c} f(x)$ tada je taj limes jedinstven.

Dokaz: Neka je $L = \lim_{x \to c} f(x)$.

Tada za svaki niz $(c_n)_n$ za koji je

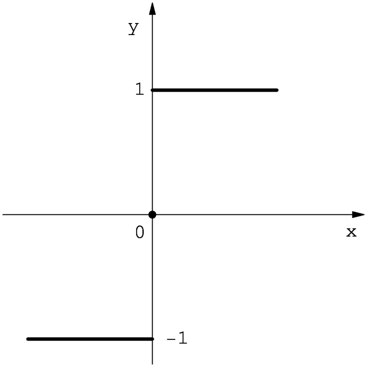
$$\lim_{n \to \infty} c_n = c \qquad c_n \neq c$$

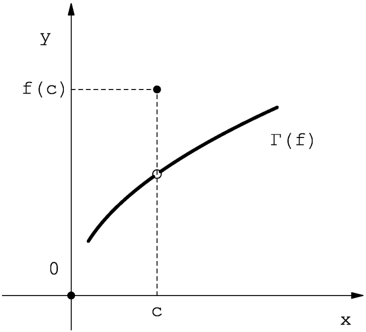
vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} f(c_n) = L \qquad c_n \neq c.$$

Jer je limes niza realnih brojeva jedinstven, L jedinstven. **Q.E.D.**

Neprekidnost funkcije u točki





Definicija

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i točka $c \in I$. Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je **neprekidna** u točki c ako postoji limes funkcije f u točki c i $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Funkcija je neprekidna na skupu I ako je neprekidna u svakoj točki $c \in I$.

Teorem (3.7. Cauchyjeva definicija)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $c \in I$ i funkcija $f : I \to \mathbb{R}$.

Funkcija f je neprekidna u točki c ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I) \quad ((|x - c| < \delta) \quad \Longrightarrow \quad (|f(x) - f(c)| < \varepsilon)).$$

Dokaz: Slijedi direktno iz definicije neprekidnosti:

postoji limes funkcije f u točki c i $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$;

i teorema 3.1. (Cauchyjeva definicija limesa):

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)$$

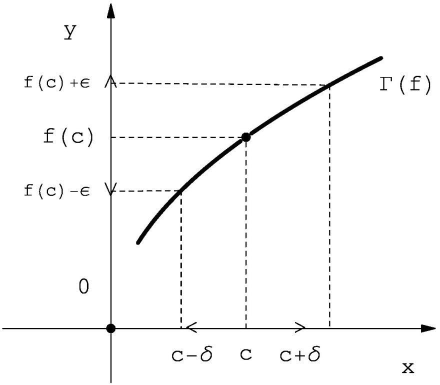
$$((0 < |x - c| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)).$$

Q.E.D.

Cauchyjeva definicija neprekidnosti funkcije u točki ima jasnu skupovnu interpretaciju koja glasi:

Za svaki interval polumjera ε oko slike $f(c)$ postoji interval polumjera δ oko c koji se u njega preslikava, tj.

$$f(\langle c-\delta, c+\delta\rangle) \subseteq \langle f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon\rangle.$$



Primjeri neprekidnih funkcija.

Primjer

Pokažimo da je konstantna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = d, \;\; \forall x \in \mathbb{R},$$

neprekidna u svakoj točki $c \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Neka je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna i $(c_n)_n$ proizvoljan niz sa svojstvom $\lim_n c_n = c$ i $c_n \neq c$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} d = d = f(c).$$

Dokaz pomoću Cauchyjeve definicije neprekidnosti:

Jasno je da uvijek vrijedi implikacija

$$
\begin{gathered}
(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in I) \\
|x - c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad 0 = |d - d| < \varepsilon.
\end{gathered}
$$

$\blacksquare$

Primjer

Pokažimo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x, \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

neprekidna u svakoj točki $c \in \mathbb{R}$. U

Neka je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna i $(c_n)_n$ proizvoljan niz sa svojstvom $\lim_n c_n = c$ i $c_n \neq c$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} c_n = c = f(c).$$

■

Primjer

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

neprekidna je u svakoj točki $c \in \mathbb{R}$.

Neka je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna i $(c_n)_n$ proizvoljan niz sa svojstvom

$$\lim_n c_n = c \quad \text{i} \quad c_n \neq c.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} |c_n| = |c| = f(c).$$

$\blacksquare$

Primjer

Pokažimo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

neprekidna u svakoj točki $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Neka je $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ proizvoljna i $(c_n)_n$ proizvoljan niz sa svojstvom

$$\lim_n c_n = c, \quad c_n \neq c \quad \text{i} \quad c_n \neq 0.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = \frac{1}{c} = f(c).$$

■

Napomena. Uočite uvjet $c_n \neq 0$.

Primjer

Pokažimo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2, \;\; \forall x \in \mathbb{R},$$

neprekidna u svakoj točki $c \in \mathbb{R}$.

Neka je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna i $(c_n)_n$ proizvoljan niz sa svojstvom

$$\lim_n c_n = c \quad \text{i} \quad c_n \neq c.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} c_n^2 = c^2 = f(c).$$

$\blacksquare$

Primjeri funkcija koje imaju prekid.

Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ ima prekid u točki $c \in I$ ako nije neprekidna u c.

To znači da možemo naći niz $(c_n)_n$ u $I \subseteq \mathbb{R}$ takav da je

$$\lim_n c_n = c$$

i da niz $(f(c_n))_n$ ne konvergira k $f(c)$.

Negacija Cauchyjeve definicije glasi

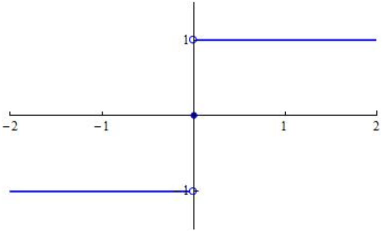
$$(\exists \varepsilon > 0) \quad (\forall \delta > 0) \quad (\exists x \in I)$$

$$((|x - c| < \delta) \quad \wedge \quad (|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon)).$$

Primjer

Za funkciju sgn definiranu u primjeru 2 je jasno da je neprekidna u svim točkama osim u točki 0.

Funkcija je prekidna u nuli jer ne postoji limes funkcije u nuli. ■



Primjer

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \in \mathbb{Q}, \\ 0; & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

je prekidna u svakoj točki.

Neka je $c \in \mathbb{Q}$ i $f(c) = 1$.

Uzmimo niz $(c_n)_n$ iz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ koji konvergira k c.

Tada je $f(c_n) = 0$, pa niz $(f(c_n))_n$ ne konvergira k 1.

Analogno, za $c \notin \mathbb{Q}$ i $f(c) = 0$, uzmimo niz $(c_n)_n$ iz $\mathbb{Q}$ koji konvergira k c.

Tada je $f(c_n) = 1$, pa niz $(f(c_n))_n$ ne konvergira k 0.

Primjer

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \in \mathbb{Q}, \\ 0; & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

je prekidna u svakoj točki osim u točki 0, gdje je neprekidna.

Dokaz je sličan kao u prethodnom primjeru.

$c \in \mathbb{Q} \quad \longrightarrow \quad (f(c) = c \neq 0) \quad \longrightarrow$

Uzmimo niz $(c_n)_n$ iz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ za koji $c_n \to c$.

$\implies \quad f(c_n) = 0 \to 0 \neq c = \lim c_n$

$\implies \quad$ niz $(f(c_n))_n$ ne konvergira k $f(c)$ $(= c)$.

$c \notin \mathbb{Q} \quad \longrightarrow \quad f(c) = 0$

Uzmimo niz $(c_n)_n$ iz $\mathbb{Q}$ za koji $c_n \to c$.

$\Longrightarrow \quad f(c_n) = c_n \to c \neq 0 = f(c)$.

$c = 0$ za niz $(c_n)_n$ koji konvergira k 0 i niz $(f(c_n))_n$ konvergira k 0. ■

Činjenica da je funkcija neprekidna u nekoj točki ima utjecaj na ponašanje funkcije u okolini te točke. O tome se radi u slijedećim lemama.

Lema (3.1.)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $c \in I$ i funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna u c. Tada je f lokalno ograničene oko c, tj. $\exists \eta > 0$ i $\exists M > 0$ tako da je $\forall x \in I$, $(|x - c| < \eta) \Rightarrow (|f(x)| < M)$.

Dokaz: Iz Cauchyjeve definicije za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takav da $\forall x \in I$ vrijedi

$$(|x - c| < \delta) \Rightarrow (|f(x)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(c)| < 1 + |f(c)|).$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $\eta = \delta$ i $M = 1 + |f(c)|$. **Q.E.D.**

Lema (3.2.)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $c \in I$ i funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna u c. Ako je $f(c) \neq 0$ onda funkcija lokalno oko c čuva predznak, tj. postoji $\delta > 0$ tako da

- *U slučaju $(f(c) > 0)$ vrijedi $(|x - c| < \delta) \Rightarrow (f(x) > \frac{1}{2}f(c) > 0)$,*
- *a u slučaju $(f(c) < 0)$ vrijedi $(|x - c| < \delta) \Rightarrow (f(x) < \frac{1}{2}f(c) < 0)$.*

Dokaz: U slučaju $f(c) > 0$ uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}f(c) > 0$ pa dobijemo $\delta > 0$ takav da $\forall x \in I$,

$$(|x - c| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(c)| < \frac{1}{2}f(c)) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (-\frac{1}{2}f(c) < f(x) - f(c) < \frac{1}{2}f(c)) \Longrightarrow (f(x) > \frac{1}{2}f(c)).$$

U slučaju $f(c) < 0$ uzimamo $\varepsilon = -\frac{1}{2}f(c) > 0$ i postupamo analogno.
Q.E.D.

Neprekidnost i operacije s funkcijama

Teorem (3.8.)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $c \in I$ i neka su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ neprekidne u c. Tada vrijedi:

1. *Za svaki $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ je funkcija $\lambda f + \mu g$ neprekidna u c.*
2. *Funkcija fg je neprekidna u c.*
3. *Ako je $g(x) \neq 0, \forall x \in I$, onda je funkcija $\frac{f}{g}$ neprekidna u c.*

Korolar (3.1.)

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n, \forall x \in \mathbb{R}$ neprekidna na $\mathbb{R}$.

Korolar (3.2.)

Svaki polinom je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$.

Dokaz: Polinom $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ je linearna kombinacija potencija, pa je neprekidan po teoremu 3.8. **Q.E.D.**

Korolar (3.3.)

Svaka racionalna funkcija je neprekidna na cijelom području definicije.

Dokaz: Racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

je kvocijent neprekidnih funkcija, pa je neprekidna po teoremu 3.8.
Q.E.D.

Slijedeći rezultat se odnosi na usklađenost neprekidnosti i operacije kompozicije funkcija.

Teorem (3.9.)

Neka su $I, J \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni intervali, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ funkcije za koje vrijedi $f(I) \subseteq J$, tj. dobro je definirana funkcija $g \circ f : I \to \mathbb{R}$.
Ako je funkcija f neprekidna u točki $c \in I$ i funkcija g neprekidna u $d = f(c) \in J$, onda je $g \circ f$ neprekidna u c.

Dokaz: Neka je $(c_n)_n$ proizvoljan niz u $I \setminus \{c\}$ takav da je $\lim_n c_n = c$. Jer je f neprekidna u c postoji $\lim_n f(c_n)$ i

$$\lim_n f(c_n) = f(c).$$

Jer je g neprekidna u $f(c)$, postoji

$$\lim_n g(d_n) \quad \text{i} \quad \lim_n g(d_n) = g(f(c))$$

za svaki niz (d_n) za koji je $\lim_n d_n = f(c)$.

Posebno, postoji

$$\lim_n g(f(c_n))$$

i

$$\lim_n g(f(c_n)) = g(f(c)).$$

Pokazali smo da za proizvoljni niz $(c_n)_n$ u $I \setminus \{c\}$ takav da je $\lim_n c_n = c$ postoji

$$\lim_n g(f(c_n))$$

i

$$\lim_n g(f(c_n)) = g(f(c)).$$

Q.E.D.

Dokaz: (uz upotrebu Cauchyjeve definicije neprekidnosti)

Da bismo dokazali neprekidnost funkcije $g \circ f$ po Cauchyjevoj definiciji, uzmimo $\varepsilon > 0$ po volji.

Po pretpostavci o neprekidnosti funkcije g u točki d za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\eta > 0$ tako da vrijedi

$$(\forall\, y \in J)\ ((|y - d| < \eta) \Rightarrow (|g(y) - g(d)| < \varepsilon)).$$

Isto tako, iz pretpostavke o neprekidnosti funkcije f u točki c za svaki $\eta > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi

$$(\forall\, x \in I)\ ((|x - c| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(c)| < \eta)).$$

Sada imamo

$$(\forall\, x \in I)\ ((|x - c| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(c)| < \eta) \Rightarrow \\ \Rightarrow (|g(f(x)) - g(f(c))| < \varepsilon)),$$

dakle, $g \circ f$ je neprekidna u c. **Q.E.D.**

Neprekidnost eksponencijalne funkcije

Eksponencijalnu funkciju $\exp : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ definirali smo pomoću rastuće funkcije $f : [0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$ koja je limes niza funkcija $(f_n)_n$:

$$f(x) = \lim_n f_n(x) = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Teorem (3.10)

Funkcija $\exp : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ *je neprekidna na* $\mathbb{R}$*.*

Dokaz: Prvo ćemo pokazati da je f neprekidna u 0.

Za $x \geq 0$ vrijedi

$$f_n(x) - f_n(0) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 = \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^k.$$

Odatle je

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leq |x| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} = |x| \frac{f_n(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)}.$$

Za $n \to +\infty$ dobivamo nejednakost

$$|f(x) - f(0)| \leq |x| f(x).$$

Za $x < 0$ je

$$\exp(x) = \frac{1}{f(-x)}$$

pa je

$$
\begin{aligned}
|\exp(x) - \exp(0)| &= \left|\frac{1}{f(-x)} - 1\right| = \left|\frac{1 - f(-x)}{f(-x)}\right| = \\
&= \frac{|f(0) - f(|x|)|}{f(|x|)} \leq |f(0) - f(|x|)| \leq \\
&\leq |x||f(0) - f(|x|)|.
\end{aligned}
$$

Uzmimo sada $\varepsilon > 0$ po volji.

Cilj nam je pokazati da je

$$
|x|f(|x|) < \varepsilon
$$

za dovoljno mali x.

Funkcija $|x|f(x)$ je produkt strogo rastućih funkcija na $[0, \infty\rangle$ pa je i sama strogo rastuća. Usto je i bijekcija.

$\Longrightarrow$ Za dani ε postoji jedinstveni $\delta > 0$ takav da je

$$\delta\ f(\delta) = \varepsilon.$$

Za svaki $0 < x < \delta$ je

$$|x|f(x) < |\delta|f(\delta) = \varepsilon.$$

Sada vrijedi

$$|x - 0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(0)| \leq |x|f(x) < |\delta|f(\delta) = \varepsilon$$

pa je exp neprekidna u 0.

Za funkciju exp vrijedi

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^c\,\mathrm{e}^{x-c}$$

pa postoji

$$\lim_{x\to c} \mathrm{e}^x$$

jer postoji

$$\lim_{x\to c} \mathrm{e}^{x-c} = \lim_{y\to 0} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Jer je

$$\lim_{x\to c} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to c} \mathrm{e}^c\,\mathrm{e}^{x-c} = \mathrm{e}^c \lim_{x\to c} \mathrm{e}^{x-c} = \mathrm{e}^c$$

funkcija exp je neprekidna u c. **Q.E.D.**

Korolar (3.4.)

Hiperbolne funkcije su neprekidne na cijelom području definicije.

Dokaz: Funkcije sh i ch su linearne kombinacije funkcije exp i njene kompozicije s funkcijom $x \mapsto -x$, pa su neprekidne po teoremu 3.9.

Funkcije th i cth su neprekidne kao kvocijenti od sh i ch prema teoremu 3.8. **Q.E.D.**

Teorem (3.11.)

Funkcija $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *je neprekidna na* $\mathbb{R}$.

Dokaz: U primjeru 1 koristili smo nejednakost

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{za} \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Sada za bilo koji $c \in \mathbb{R}$ imamo

$$|\sin x - \sin c| = 2\,|\sin(\frac{x-c}{2})|\,|\cos(\frac{x+c}{2})| \leq 2\frac{|x-c|}{2},$$

kada je $|x - c| < \frac{\pi}{2}$.

$$\Longrightarrow \lim_{x \to c} |\sin x - \sin c| \leq \lim_{x \to c} 2\frac{|x-c|}{2} = 0,$$

tj.

$$\lim_{x \to c} \sin x = \lim_{x \to c} \sin c = \sin c,$$

što znači da je funkcija sinus neprekidna u točki c. **Q.E.D.**

Korolar (3.5.)

Trigonometrijske funkcije su neprekidne na cijelom području definicije.

Dokaz: Vrijedi

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

pa je cos kompozicija neprekidnih funkcija te je neprekidna prema teoremu 3.9.

Funkcije tg i ctg su kvocijenti neprekidnih funkcija pa su neprekidne prema teoremu 3.8. ∎

Neprekidnost funkcije na segmentu
Jednostrana neprekidnost funkcije

Definicija

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i točka $c \in I$.

Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna slijeva u točki c ako postoji limes slijeva funkcije f u točki c i $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = f(c)$.

Funkcija f je neprekidna zdesna u točki c ako postoji limes zdesna funkcije f u točki c i $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = f(c)$.

Ako u Cauchyjevu definiciju jednostranog limes uvrstimo vrijednost limesa jednaku $f(c)$ dobijemo Cauchyjevu definiciju jednostrane neprekidnosti:

f je neprekidna slijeva ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)$$
$$((0 \leq c - x < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(c)| < \varepsilon)),$$

i f je neprekidna zdesna ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)$$
$$((0 \leq x - c < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(c)| < \varepsilon)),$$

Neprekidnost funkcije na segmentu

Definicija

Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je neprekidna na segmentu, ako je neprekidna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$, te neprekidna zdesna u a i slijeva u b.

Napomena. Analogno se definira neprekidnost na $[a, b\rangle$ i $\langle a, b]$.

Teorem (3.12., Bolzano-Weierstrass)

Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna na segmentu* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$*.*
Tada je $f([a, b]) = [m, M]$ *također segment.*

Dokaz: Skripta.

Napomena. Tvrdnja teorema može se razdvojiti na tri dijela:

1. f je ograničena na $[a, b]$, tj. postoje $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ i $M = \sup\limits_{[a,b]} f$.
2. Funkcija f postiže svoj minimum i maksimum na $[a, b]$, tj. postoje $x_m, x_M \in [a, b]$, $f(x_m) = m$ i $f(x_M) = M$.
3. Za svaki $C \in \langle m, M\rangle$ postoji $c \in [a, b]$ tako da je $C = f(c)$.

Korolar (3.6)

Za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ je funkcija $f : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ definirana s $f(x) = x^n$ surjekcija.

Dokaz: Cilj nam je dokazati da je $f([0, +\infty\rangle) = [0, +\infty\rangle$.

Pokazat ćemo da za bilo koji $C > 0$ vrijedi $C \in \mathcal{R}(f)$

Za bilo koje prirodne brojeve $n, m > 1$ vrijedi $m < m^n$, pa je $m < f(m)$.

Neka je $C > 0$ bilo koji broj.

Arhimedov aksiom $\Longrightarrow$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f(0) = 0 < C < m < f(m).$$

f neprekidna na segmentu $[0, m]$ $\Longrightarrow$ $[0, f(m)] \subseteq \mathcal{R}(f)$

$\Longrightarrow$ $C \in \mathcal{R}(f)$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{R}(f) = [0, +\infty\rangle$. **Q.E.D.**

U dokazima surjektivnosti logaritamske, hiperbolnih i area funkcija koristili smo pretpostavku da je eksponencijalna funkcija surjekcija. Sada smo u stanju to dokazati.

Korolar (3.7)

Funkcija $\exp : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ *je surjekcija.*

Dokaz: Koristimo istu ideju kao u prošlom korolaru.

Pokažimo: $n < 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$. (Indukcija.)

Baza indukcije. Za $n = 1$: $1 < 2^1$.

Pretpostavka indukcije. Neka je $n < 2^n$.

Korak indukcije. $\Longrightarrow$

$$n + 1 < 2^n + 1 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Potencije su strogo rastuće na $\mathbb{R}_+$ $\Longrightarrow$

$$n < 2^n < e^n = \exp(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $C > 1$ proizvoljan.

$\Longrightarrow$ Postoji i $n \in \mathbb{N}$ takav da $n > C$.

$$\Longrightarrow \quad \exp(0) = 1 < C < n < \exp(n).$$

exp je neprekidna na segmentu $[0, n]$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $[\exp(0), \exp(n)] \subseteq \mathcal{R}(\exp)$

$\Longrightarrow$ $C \in \mathcal{R}(\exp)$

$\Longrightarrow$ $[1, +\infty\rangle \subseteq \mathcal{R}(\exp)$.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \quad \forall x \in [0, +\infty\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle 0, 1] \subseteq \mathcal{R}(\exp).$$

Napomena. Za $0 < C < 1$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $1/n < C$, ...

Q.E.D.

Korolar (3.8)

Funkcija $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *je surjekcija.*

Dokaz: Funkcija sin je neprekidna na segmentu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\Longrightarrow \quad [\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})] \;=\; [-1, 1] \;\subseteq\; \mathcal{R}(\sin).$$

Obratna inkluzija slijedi iz geometrijske definicije funkcije sin.

Q.E.D.

Neprekidnost i monotonost, neprekidnost inverzne funkcije

Teorem (3.13)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ monotona na I i $I' = f(I)$ otvoren interval. Tada je f neprekidna funkcija na I.

Dokaz: Neka je f rastuća funkcija. (Dokaz za padajuću funkciju je analogan)

Pokažimo da je f neprekidna slijeva.

Neka je $c \in I$ proizvoljan.

Neka je $(c_n)_n$ proizvoljan rastući niz takav da $\lim_n c_n = c$.

$$c_n \leq c \quad \Longrightarrow \quad f(c_n) \leq f(c)$$

f rastuća funkcija $\implies$ $(c_n \leq c_{n+1} \Rightarrow f(c_n) \leq f(c_{n+1}))$

$\implies$ $(f(c_n))_n$ rastući niz

$\implies$ Niz $(f(c_n))_n$ je ograničen i rastući

$\implies$ Niz $(f(c_n))_n$ je konvergentan.

Neka je $L = \lim\limits_n f(c_n)$

$c_n < c \implies f(c_n) \leq f(c) \implies L = \lim\limits_n f(c_n) \leq f(c)$

Pretpostavimo da je $L < f(c)$.

$\implies$ Postoji $b \in \mathbb{R}$, $\quad f(c_n) \leq L < b < f(c)$.

$\implies$ $b \in \mathcal{R}(f)$ jer $b \in \langle f(c_n), f(c) \rangle \subseteq I'$

$\implies$ postoji $a \in I$ takav da je $f(a) = b$

Zbog monotonosti od f: $c_n < a < c, \quad \forall n$

$\implies$ $c = \lim_n c_n \leq a < c$

Kontradikcija! Dakle, $\lim_n f(c_n) = f(c)$ **Q.E.D.**

Teorem (3.14)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoren interval, funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *i* $I' = f(I)$.

1. *Ako je* f *strogo monotona i neprekidna funkcija na* I*, onda je* I' *otvoren interval i* $f^{-1} : I' \to I$ *neprekidna funkcija na* I'.
2. *Ako je* f *neprekidna bijekcija sa* I *na* I'*, onda je* f *strogo monotona funkcija na* I *i* $f^{-1} : I' \to I$ *neprekidna funkcija na* I'.

Teorem (3.14b)

Neka je $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *segment, funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *i* $I' = f([a, b])$.

1. *Ako je* f *strogo monotona i neprekidna funkcija na* $[a, b]$*, onda je* I' *segment i* $f^{-1} : I' \to [a, b]$ *neprekidna funkcija na* I'.
2. *Ako je* f *neprekidna bijekcija sa* $[a, b]$ *na* I'*, onda je* f *strogo monotona funkcija na* $[a, b]$ *i* $f^{-1} : I' \to [a, b]$ *neprekidna funkcija na* I'.

Teorem

Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija u točki* $c \in < a, b >$*. Neka je* $(c_n)_n \subset \langle a, b\rangle$ *takav da je* $\lim c_n = c$*. Tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} c_n\right).$$

Napomena. Uočite da

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} c_n\right).$$

ne slijedi direktno iz definicije limesa funkcije i neprekidnosti u točki, jer se u definiciji limesa funkcije zahtijeva da niz $(c_n)_n$ zadovoljava i $c_n \neq c, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: $\Longrightarrow$ Neka je f neprekidna u $c \in \langle a, b\rangle$.

Neka je $(c_n)_n$ proizvoljan niz takav da je $c_n \in \langle a, b\rangle$ i $\lim_n c_n = c$.

Niz $(c_n)_n$ podijelimo na dva skupa:

$\{c_n \mid c_n = c\}$ i $\{c_n \mid c_n \neq c\}$

Ako je prvi skup beskonačan, tada je odgovarajući podniz niza $(f(c_n))_n$ konstantan niz $(f(c))_n$ i prema tome konvergentan i limes mu je jednak $f(c)$.

Ako je drugi skup beskonačan, on definira niz $(a_n)_n$, podniz niza $(c_n)_n$.

Jer je $\lim_n a_n = c$ i $a_n \neq c$, iz definicije neprekidnosti slijedi $\lim_n f(a_n) = f(c)$.

Niz $(f(c))_n$ je konvergentan i $\lim_n f(c_n) = f(c) = f(\lim_n c_n)$.

$\Longleftarrow$ Neka vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} c_n\right)$ za proizvoljan niz $(c_n)_n$.

Onda posebno vrijedi i za $c_n \neq c$. **Q.E.D.**

Neprekidnost korijena, logaritamske, area i arcus funkcija

Korijen

Neparne potencije: neprekidne i strogo rastuće bijekcije s otvorenog (beskonačnog) intervala $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ korijeni neparnih potencija su neprekidne funkcije

Parna potencija nije bijekcija $\rightarrow$ gledamo njenu restrikciju

$f : [0, +\infty\rangle \rightarrow [0, +\infty\rangle$

koja je neprekidna i strogo rastuća bijekcija

$\Longrightarrow$ postoji inverzna funkcija $f^{-1} : [0, +\infty\rangle \rightarrow [0, +\infty\rangle$.

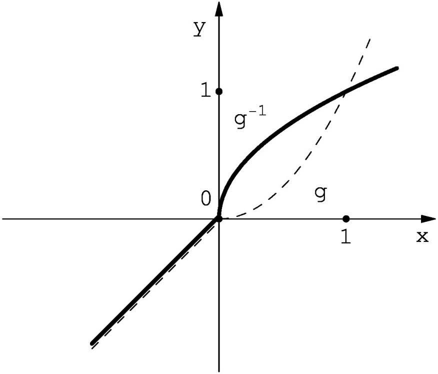
f ne ispunjava pretpostavke teorema 3.14. jer joj domena nije otvoren interval (konačan ili beskonačan).

Zadovoljeni su uvjeti Teorema 3.14.b

Napomena. Trik koji će omogućiti primjenu Teorema 3.14. - ideja dokaza Teorema 3.14b.

Proširimo funkciju f do funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na slijedeći način:

$$g(x) = \begin{cases} x^n; & x \geq 0, \\ x; & x \leq 0. \end{cases}$$



g zadovoljava uvjete teorema 3.14.

$\Longrightarrow \quad g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow \quad f^{-1} = g^{-1}|_{[0,+\infty\rangle}$ je restrikcija neprekidne funkcije,

$\Longrightarrow \quad$ funkcija f^{-1} je neprekidna na $[0, +\infty\rangle$

Logaritamska funkcija

exp : $\mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ je neprekidna bijekcija

$\Longrightarrow$ ln : $\langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ je neprekidna.

Area funkcije

$\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ su neprekidne bijekcije

$\Longrightarrow \quad \mathrm{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\mathrm{th}^{-1} : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ su neprekidne

Funkcija

$$\mathrm{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

nema područje definicije interval, pa ne zadovoljava uvjete teorema 3.14.

Restrikcije

$$\begin{aligned} \mathrm{cth}_- &: \langle -\infty, 0\rangle \to \langle -\infty, -1\rangle \\ \mathrm{cth}_+ &: \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 1, +\infty\rangle \end{aligned}$$

imaju neprekidan inverz

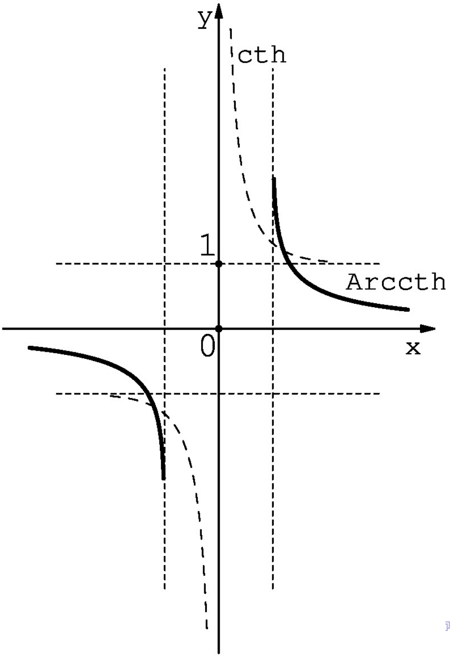
$$\begin{aligned} \mathrm{cth}_-^{-1} &: \langle -\infty, -1\rangle \to \langle -\infty, 0\rangle \\ \mathrm{cth}_+^{-1} &: \langle 1, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle \end{aligned}$$

Zato što su i domene i slike funkcija cth_- i cth_+ disjunktni skupovi, vrijedi

$$\mathrm{cth}(x) = \begin{cases} \mathrm{cth}_-(x) & ; x < 0 \\ \mathrm{cth}_+(x) & ; x > 0 \end{cases},$$

a odatle slijedi

$$\mathrm{cth}^{-1}(x) = \begin{cases} \mathrm{cth}_-^{-1}(x) & ; x < -1 \\ \mathrm{cth}_+^{-1}(x) & ; x > 1 \end{cases}.$$


y
cth
1
Arccth
0
x

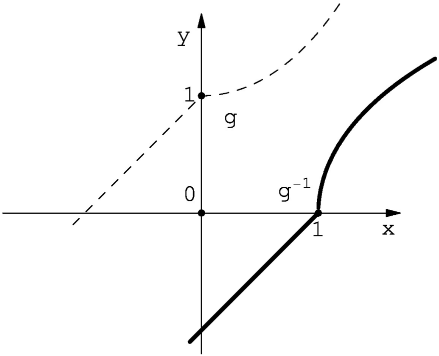
Bijektivna restrikcija od ch je

$$\mathrm{Ch}: \ [0, +\infty\rangle \to [1, +\infty\rangle$$

i nju proširujemo do funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{ch}(x); & x \geq 0, \\ x + 1; & x \leq 0. \end{cases}$$

$\Longrightarrow \quad \mathrm{Ch}^{-1} : [1, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ restrikcija neprekidne funkcije g^{-1}, pa je neprekidna.


y
1
g
0
g⁻¹
1
x

Arcus funkcije

Restrikcije

$$\begin{aligned} \mathrm{Tg} &: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R} \\ \mathrm{Ctg} &: \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

imaju neprekidne inverze

$$\begin{aligned} \mathrm{Tg}^{-1} &= \mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \mathrm{Ctg}^{-1} &= \mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle \end{aligned}$$

Funkcije $\arcsin = \mathrm{Sin}^{-1}$ i $\arccos = \mathrm{Cos}^{-1}$ su inverzi funkcija

$$\begin{aligned} \mathrm{Sin} &: \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \\ \mathrm{Cos} &: \quad [0, \pi] \to [-1, 1] \end{aligned}$$

pa su neprekidne prema teoremu 3.14b.

Za korištenje teorema 3.14, proširimo ih do neprekidnih bijekcija sa otvorenog intervala na otvoren interval.

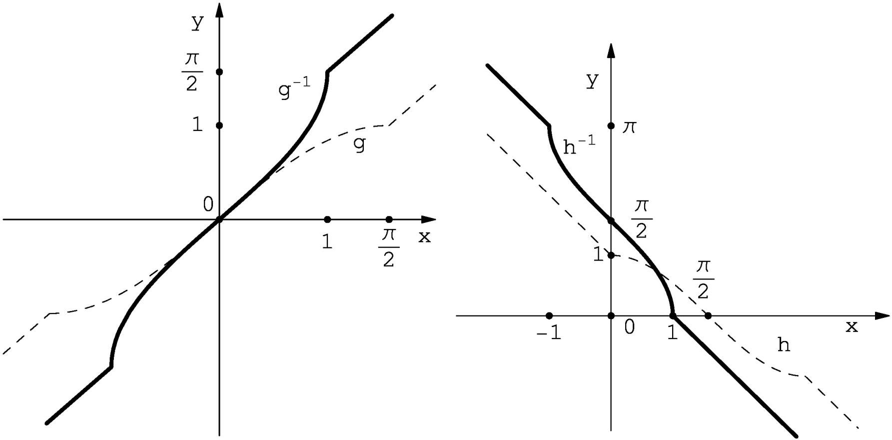
Definiramo $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} - 1 & ; x \le -\frac{\pi}{2}, \\ \sin x & ; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2} + 1 & ; \frac{\pi}{2} \le x. \end{cases}$$

i

$$h(x) = \begin{cases} -x + 1 & ; x \le 0, \\ \cos x & ; -\pi \le x \le \pi, \\ -x + \pi - 1 & ; \pi \le x. \end{cases}$$

Teorem 3.14. $\Longrightarrow$ funkcije g i h imaju neprekidne inverze, pa su i njihove restrikcije $\mathrm{Sin}^{-1} = g|_{[-1,1]}$ i $\mathrm{Cos}^{-1} = h|_{[-1,1]}$ neprekidne funkcije.



Teorem (3.15.)

Elementarne funkcije su neprekidne na cijelom području definicije.

Dokaz: Sve funkcije od kojih gradimo elementarne funkcije (potencije, eksponencijalna funkcija, hiperbolne, trigonometrijske funkcije i njihove inverzne funkcije korijeni, logaritamske funkcije, area i arcus funkcije) su neprekidne su na cijelom području definicije. Budući da operacije kojima od tih funkcija gradimo elementarne funkcije čuvaju neprekidnost, to su elementarne funkcije neprekidne. **Q.E.D.**

Prekid funkcije

Definicija

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f : I \to \mathbb{R}$. Kažemo da f ima u točki $c \in I$ **prekid prve vrste** ako u c postoje i lijevi limes $f(c-)$ i desni limes $f(c+)$ funkcije i ako su oni različiti. Ostali prekidi su prekidi druge vrste.

Teorem (3.16.)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f : I \to \mathbb{R}$ monotona funkcija.

1. *Monotona funkcija može imati samo prekide prve vrste.*
2. *Monotona funkcija ima najviše prebrojivo mnogo prekida.*