2. NIZOVI

Niz i podniz

Definicija

Svaku funkciju $a : \mathbb{N} \to S$ zovemo **niz** u S.

Za $n \in \mathbb{N}$ pišemo $a(n) = a_n$ i nazivamo n-tim članom niza.

Oznaka za niz je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili $(a_n)_n$ ili samo (a_n).

Kodomena niza može biti bilo koji neprazan skup. Nas će najviše zanimati slučajevi kada je taj skup $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ili skup realnih ili kompleksnih funkcija.

Primjeri nizova:

1. Niz $(a_n)_n$ s
$$a_n = \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
je niz u $\mathbb{R}$.

2. Niz $(a_n)_n$ s
$$a_n = n + \frac{i}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
je niz u $\mathbb{C}$.

3. Niz $(a_n)_n$ je niz realnih funkcija, gdje je $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s
$$a_n(x) = \sin nx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definicija

Neka je $(a_n)_n$ u $\mathbb{R}$.

Niz $(a_n)_n$ je **rastući** ako $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_{n+1}$.

Niz $(a_n)_n$ je **strogo rastući** ako $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n < a_{n+1}$.

Niz $(a_n)_n$ je **padajući** ako $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq a_{n+1}$.

Niz $(a_n)_n$ je **strogo padajući** ako $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n > a_{n+1}$.

Napomena. Ova definicija, iako se čini slabijom, ekvivalentna je s definicijom monotonosti funkcije.

Definicija

Za niz $b : \mathbb{N} \to S$ kažemo da je **podniz** niza $a : \mathbb{N} \to S$, ako postoji strogo rastući niz $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$ takav da je $b = a \circ p$.

U oznakama $(b_n)_n$ i $(a_n)_n$ za nizove pisali bismo

$$b_n = b(n) = (a \circ p)(n) = a[p(n)] = a_{p(n)} = a_{p_n}.$$

Podniz nekog niza dobijemo tako da izbacimo neke članove polaznog niza, a preostali članovi zadržavaju prijašnji međusobni poredak.

Zadatak

Neka je $(p_n)_n$ strogo rastući niz u $\mathbb{N}$. Tada vrijedi $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \leq p_n$.

Rješenje. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

Baza indukcije, Jasno je da vrijedi

$$1 \leq p_1 .$$

Pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \leq p_n$.

Tada je

$$p_{n+1} > p_n \geq n, \quad \text{tj.} \quad p_{n+1} > n, \quad \text{pa mora biti} \quad p_{n+1} \geq n+1 .$$

■

Limes niza u $\mathbb{R}$

Definicija

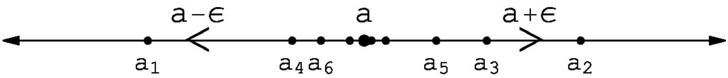
Niz realnih brojeva $(a_n)_n$ **konvergira** ili teži k realnom broju $a \in \mathbb{R}$ ako svaki otvoreni interval polumjera ε oko točke a sadrži gotovo sve članove niza.
Tada a zovemo **granična vrijednost** ili **limes** niza $(a_n)_n$ i pišemo

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \quad \text{ili} \quad a = \lim_n a_n.$$

Napomena. gotovo svi = svi osim konačno mnogo njih

Da je niz konvergentan, možemo zapisati ovako:

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}), \quad ((n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)).$$



Ako niz ne konvergira onda kažemo da on **divergira**.

Neograničeni rast (pad) niza

Definiramo okoline od $+\infty$ kao intervale oblika $\langle E, +\infty\rangle$, gdje je $E > 0$.

Kažemo da niz $(a_n)_n$ u $\mathbb{R}$ **divergira k** $+\infty$ ako svaka okolina od $+\infty$ sadrži gotovo sve članove niza, tj.

$$(\forall E > 0), (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}), \quad ((n > n_\varepsilon) \Rightarrow (a_n > E)).$$

U tom slučaju možemo govoriti o konvergenciji niza $(a_n)_n$ u $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ i pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Analogno možemo definirati

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Primjer

Pokažimo da niz $(\frac{1}{n})_n$ konvergira i

$$\lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Uzmimo $\varepsilon > 0$ po volji.

Iz Arhimedovog aksioma slijedi postojanje $m \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $m \cdot \varepsilon > 1$.

$\Rightarrow$ za $n > m$ vrijedi $n\varepsilon > m\varepsilon > 1$.

$\Rightarrow$ $n_\varepsilon = m$ je traženo rješenje.

Naime, $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$n > n_\varepsilon \;\Rightarrow\; n\varepsilon > n_\varepsilon\varepsilon > 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} < \varepsilon \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Teorem (2.1)

1. *Konvergentan niz u $\mathbb{R}$ ima samo jednu graničnu vrijednost.*
2. *Konvergentan niz u $\mathbb{R}$ je ograničen.*

Dokaz:

1. Pretpostavimo da konvergentan niz $(a_n)_n$ ima dvije granične vrijednosti $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

$\Rightarrow$ za $\varepsilon = |a - b| > 0$ postoje $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$(n > n_a) \Rightarrow (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}) \quad \text{i} \quad (n > n_b) \Rightarrow (|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

$\Rightarrow$ za $n_\varepsilon = \max\{n_a, n_b\}$ imamo

$$n > n_\varepsilon \ \Rightarrow \ |a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon \ = |(|a - b|),$$

što je očita neistina. $\Rightarrow$ limes mora biti jedinstven.

2. U definiciji limesa uzmimo $\varepsilon = 1$.

$\Rightarrow$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da

$$n > n_\varepsilon \;\Rightarrow\; |a_n - a| < 1.$$

Sada za $n > n_\varepsilon$ imamo

$$|a_n| \;\leq\; |a_n - a| + |a| \;\leq\; 1 + |a|.$$

Neka je

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_\varepsilon}|, 1 + |a|\}.$$

Tada vrijedi

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M,$$

tj. niz je ograničen. **Q.E.D.**

Primjer

Sama ograničenost nije dovoljna za konvergenciju niza.

Niz definiran s

$$a_n = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tj. niz $\quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$

je očigledno ograničen.

1 nije limes jer za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ izvan intervala

$$[1 - 1/2, 1 + 1/2]$$

se nalazi beskonačno članova niza.

To znači da se unutar intervala ne nalaze gotovo svi članovi niza (iako ih je beskonačno).

Iz istih razloga -1 nije limes.

Za očekivati je da podnizovi niza nasljeđuju dobra svojstva originalnog niza.

Teorem (2.2.)

Svaki podniz konvergentnog niza u $\mathbb{R}$ i sam je konvergentan i ima istu graničnu vrijednost kao i niz.

Dokaz: Neka je $(a_n)_n$ konvergentan niz u $\mathbb{R}$,

$$a = \lim_n a_n,$$

i neka je $(a_{p_n})_n$ bilo koji njegov podniz.

Uzmimo bilo koji $\varepsilon > 0$.

$a = \lim_n a_n \quad \Rightarrow \quad$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

niz $(p_n)_n$ je strogo rastući niz u $\mathbb{N}$ i zadatak $\quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \geq n$.

$$\Rightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad (n > n_\varepsilon) \Rightarrow (p_n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_{p_n} - a| < \varepsilon),$$

Dakle,

$$a = \lim_n a_{p_n}.$$

Q.E.D.

Od interesa je naći jednostavno provjerive dovoljne uvjete za konvergenciju niza.

Teorem (2.3.)

Svaki ograničen i monoton niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan.

Dokaz: Neka je niz $(a_n)_n$ rastući, tj. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_{n+1}$.

Ograničenost rastućeg niza znači ograničenost skupa

$$A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

odozgo.

Postoji

$$a = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Iz definicije supremuma skupa A imamo:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a,$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}.$

Iz 1. i 2. i rasta niza $(a_n)_n$ imamo $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N},$

$$n > n_\varepsilon \;\Rightarrow\; a - \varepsilon \;<\; a_{n_\varepsilon} \;\leq\; a_n \;\leq\; a \;<\; a + \varepsilon \;\Rightarrow\; |a_n - a| \;<\varepsilon.$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}.$$

Analogno se za padajući niz pokaže $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n;\; n \in \mathbb{N}\}.$

Q.E.D.

Primjer

Monotonost nije nužna za konvergenciju niza.

Npr. niz
$$\frac{(-1)^n}{n}$$
konvergira k 0, a nije monoton.

Teorem

Neka je $(a_n)_n$ niz i neka su $(a_{2n})_n$ i $(a_{2n+1})_n$ konvergentni podnizovi tako da vrijedi

$$\lim_n a_{2n} = \lim_n a_{2n+1} = L.$$

Tada je i niz je $(a_n)_n$ konvergentan i vrijedi

$$\lim_n a_n = L$$

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$ (proizvoljan).

$(a_{2n})_n$ je konvergentan $\implies$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n > n_1 \implies |a_{2n} - L| < \varepsilon$$

$(a_{2n+1})_n$ je konvergentan $\implies$ postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n > n_2 \implies |a_{2n+1} - L| < \varepsilon$$

Neka je n_ε veći od $2n_1$ i $2n_2 + 1$, npr. $n_\varepsilon = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$.

Neka je $n > n_\varepsilon$.

Ako je n paran, $n = 2k$ tada

$$n > n_\varepsilon \implies 2k > 2n_1 \implies k > n_1 \implies$$

$$\implies |a_{2k} - L| < \varepsilon \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Analogno, ako je n neparan, $n = 2k + 1$ tada

$$n > n_\varepsilon \implies 2k + 1 > 2n_2 + 1 \implies k > n_1 \implies$$

$$\implies |a_{2k+1} - L| < \varepsilon \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Znači

$$n > n_\varepsilon \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Q.E.D.

Operacije s konvergentnim nizovima

Za nizove $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ u $\mathbb{R}$ možemo definirati nove nizove

- $(a_n)_n \pm (b_n)_n = (a_n \pm b_n)_n$
- $\lambda(a_n)_n = (\lambda a_n)_n$ za $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $(a_n \cdot b_n)_n$,

Skup nizova je vektorski prostor.

Kako se limes ponaša kod ovih operacija s nizovima?

Teorem (2.4.)

Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ konvergentni nizovi u $\mathbb{R}$. Tada vrijedi:

1. *Niz $(a_n \pm b_n)_n$ je konvergentan i*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2. *Niz $(a_n \cdot b_n)_n$ je konvergentan i*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3. Ako je $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$, i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, onda je i niz $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_n$ konvergentan i

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

4. Niz $(|a_n|)_n$ je konvergentan i

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|.$$

5. Za $\lambda \in \mathbb{R}$ niz $(\lambda a_n)_n$ je konvergentan i

$$\lim_{n\to\infty}\lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dokaz: Neka su $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

1. (a_n) i (b_n) konvergentni

$\Rightarrow$ Za $\varepsilon > 0$ postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi,

$$(n > n_1) \quad \Rightarrow \quad (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}) \quad \text{i}$$
$$(n > n_2) \quad \Rightarrow \quad (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

$\Rightarrow$ Za $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ vrijedi

$$(n > n_\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}) \quad \text{i}$$
$$(n > n_\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Odavdje slijedi da

$$n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n + b_n - (a+b)| \,\leq\, |a_n - a| + |b_n - b| \,<\, \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon,$$

tj. niz $(a_n + b_n)_n$ je konvergentan i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Analogno se dokazuje tvrdna za niz $(a_n - b_n)_n$

2. $(a_n)_n$ konvergentan $\quad\Rightarrow\quad$ $(a_n)_n$ ograničen,

tj. postoji $M > 0$ takav da

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||a_n| \leq M.$$

(a_n) i (b_n) konvergentni

$\Rightarrow$ $\quad$ Za $\varepsilon > 0$ postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(n > n_1) \quad \Rightarrow \quad \left(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M + |b|} \right) \text{ i}$$

$$(n > n_2) \quad \Rightarrow \quad \left(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M + |b|} \right).$$

$\Rightarrow$ Za $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ je

$$\begin{aligned}(n > n_\varepsilon) \quad &\Rightarrow \quad \left(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M + |b|}\right) \quad \text{i} \\ (n > n_\varepsilon) \quad &\Rightarrow \quad \left(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M + |b|}\right).\end{aligned}$$

te $(n > n_\varepsilon) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| \quad &= \quad |a_n b_n - a_n b + a_n bab| \ \leq \\ &\leq \quad |a_n||b_n - b|| + |a_n - a||b| \ < \\ &< M\frac{\varepsilon}{M + |b|} + \frac{\varepsilon}{M + |b|}|b| \ = \ \varepsilon.\end{aligned}$$

3. Pokažimo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Za $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \;\Rightarrow\; |b_n| \geq \frac{|b|}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{|b_n|} \leq \frac{1}{\frac{|b|}{2}}.$$

Sada za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(n > n_1) \Rightarrow (|b_n - b| < \varepsilon\frac{|b|^2}{2}).$$

Uzmimo $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$, pa $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \frac{\varepsilon \frac{|b|^2}{2}}{\frac{|b|}{2}|b|} = \varepsilon.$$

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \left(a_n \frac{1}{b_n}\right) = \lim_n a_n \lim_n \frac{1}{b_n} = a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

4. Iz nejednakosti

$$||x| - |y|| \le |x - y|$$

slijedi

$$n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad ||a_n| - |a|| \;\le\; |a_n - a| \;<\; \varepsilon.$$

5. Tvrdnja slijedi direktno iz tvrdnje 2.

Za bilo koji $\lambda \in \mathbb{R}$ definiramo konstantni niz

$$b_n = \lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tvrdnja 2. $\quad\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} b_n a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \lambda a.$$

Q.E.D.

Napomena. Skup svih konvergentnih nizova u $\mathbb{R}$ je vektorski prostor.

Osim operacija, na skupu $\mathbb{R}$ imamo zadan uređaj $\leq$.

Konvergencija nizova je u skladu s tim uređajem.

Teorem (2.5. teorem o sendviču)

Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ konvergentni nizovi u $\mathbb{R}$.

1. *Ako je $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, onda je*
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$
2. *Ako je $(c_n)_n$ niz za kojeg vrijedi*
$$\forall\ n \in \mathbb{N},\quad a_n \leq c_n \leq b_n \quad i \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c,$$
onda je $(c_n)_n$ konvergentan i
$$\lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Dokaz:

1. Neka je niz $(c_n)_n$ konvergentan i takav da vrijedi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n \geq 0.$$

Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c \geq 0$.

Kada bi bilo $c < 0$, onda bi u okolini

$$\langle c - \frac{|c|}{2}, c + \frac{|c|}{2} \rangle$$

bili gotovo svi članovi niza.

To nije moguće zbog $c + \frac{|c|}{2} < 0$.

Sada za

$$c_n = b_n - a_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

slijedi tvrdnja.

2. (a_n) i (b_n) konvergentni i imaju isti limes $c \quad \Rightarrow$

Za $\varepsilon > 0$ postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (n > n_1) \quad &\Rightarrow \quad (|a_n - c| < \varepsilon) \quad \text{i} \\ (n > n_2) \quad &\Rightarrow \quad (|b_n - c| < \varepsilon). \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad$ Za $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ vrijedi

$$n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |c_n - c| < \varepsilon.$$

Q.E.D.

Primjeri konvergentnih nizova

Primjer

Niz $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ je konvergentan za svaki $\alpha > 0$ i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Rješenje. Cilj nam je pokazati da je a_n proizvoljno malen.

Za bilo koji $\varepsilon > 0$ želimo pokazati da je za dovoljno veliki n

$$a_n < \varepsilon \iff \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon \iff n^\alpha > \varepsilon^{-1} \iff n > \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.
Tada postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $\quad n_\varepsilon > \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}$.

Tada vrijedi

$$n > n_\varepsilon \implies n > \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} \implies a_n < \varepsilon$$

■

Primjer

Niz $a_n = n^\alpha$ divergira k $+\infty$ za svaki $\alpha > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty.$$

Rješenje. Cilj nam je pokazati da je a_n proizvoljno velik.

Za bilo koji $E > 0$ želimo pokazati da je za dovoljno veliki n

$$a_n > E \quad \Longleftrightarrow \quad n^\alpha > E \quad \Longleftrightarrow \quad n > E^{\frac{1}{\alpha}}$$

Neka je $E > 0$ proizvoljan.
Tada postoji $n_E \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $\quad n_E > E^{\frac{1}{\alpha}}$.

Tada vrijedi

$$n > n_E \quad \Longrightarrow \quad n > E^{\frac{1}{\alpha}} \quad \Longrightarrow \quad a_n > E$$

■

Primjer

Niz $a_n = a^n$ je konvergentan za svaki a, $|a| < 1$, i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Rješenje. Cilj nam je pokazati da je a_n proizvoljno malen.
Promatramo $|a^n - 0| = |a^n| = |a|^n < \varepsilon$ pa b.s.o. (bez smanjenja općenitosti) pretpostavljamo da je $0 < a < 1$.
Za $a = 0$ tvrdnja je očita: $a_n = 0^n = 0$.

Za bilo koji $\varepsilon > 0$ želimo pokazati da je za dovoljno veliki n

$$a_n < \varepsilon \iff a^n < \varepsilon \iff n \ln a < \ln \varepsilon \iff n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$$

Zadnja nejednakost se okrenula zbog $\ln a < 0 \Leftrightarrow a < 1$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.
Tada postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $\quad n_\varepsilon > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln a}$.

Tada vrijedi

$$n > n_\varepsilon \implies n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a} \implies a_n < \varepsilon$$

Primjer

Niz $a_n = a^n$ divergira k $+\infty$ za svaki $a > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

Rješenje. Cilj nam je pokazati da je a_n proizvoljno velik.

Za bilo koji $E > 0$ želimo pokazati da je za dovoljno veliki n

$$a_n > E \quad \Longleftrightarrow \quad a^n > E \quad \Longleftrightarrow \quad n \ln a > \ln E \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{\ln E}{n \ln a}$$

Zadnja nejednakost se nije okrenula zbog $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Neka je $E > 0$ proizvoljan.
Tada postoji $n_E \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $\quad n_E > \dfrac{\ln E}{n \ln a}$.

Tada vrijedi

$$n > n_E \quad \Longrightarrow \quad n > \frac{\ln E}{n \ln a} \quad \Longrightarrow \quad a_n > E$$

Primjer

Vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Rješenje. Za bilo koji $\varepsilon > 0$ po binomnom teoremu je:

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\,\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n > n\frac{n-1}{2}\,\varepsilon^2.$$

Uzmimo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi

$$(n_\varepsilon - 1)\varepsilon^2 > 2.$$

Tada vrijedi

$$n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad (1+\varepsilon)^n \; > \; n\frac{n-1}{2}\,\varepsilon^2 \; > \; n\frac{n_\varepsilon - 1}{2}\,\varepsilon^2 \; > \; n,$$

odnosno

$$n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad 1 < n < (1+\varepsilon)^n.$$

Jer je funkcija $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ strogo rastuća:

$$(n > n_\varepsilon) \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon.$$

■

Primjer

Za $a > 0$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

U slučaju $1 < a$ je
$$1 < a < n$$
za gotovo sve $n \in \mathbb{N}$, te
$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$$
za gotovo sve $n \in \mathbb{N}$.

Sada tvrdnja slijedi iz teorema o sendviču.

Ako je $a < 1$ onda je $\frac{1}{a} > 1$, pa je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Primjer

Niz $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Rješenje. Cilj nam je pokazati da je a_n proizvoljno malen.

Za bilo koji $\varepsilon > 0$ želimo pokazati da je za dovoljno veliki n

$$0 < a_n < \varepsilon \iff 0 < \frac{\ln n}{n} < \varepsilon \iff 0 < \ln n^{\frac{1}{n}} < \varepsilon \iff$$

$$\iff 1 < n^{\frac{1}{n}} < e^{\varepsilon}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.
Jer je

$$\lim_n n^{\frac{1}{n}} = 1$$

tada postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi

$$n > n_\varepsilon \implies 1 < n^{\frac{1}{n}} < e^{\varepsilon}.$$

$$\implies 0 < a_n < \varepsilon$$

Primjer

Niz $a_n = \dfrac{n^\alpha}{a^n}$ je konvergentan za svaki α i $a > 1$ i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

Napomena. Ovaj primjer pokazuje da eksponencijalna funkcija raste brže od bilo koje potencije.

Napomena. Ako je $\alpha \leq 0$ tvrdnja slijedi jednostavno iz prethodnih primjera. Zato ćemo u dokazu razmatrati samo slučaj $\alpha > 0$.

Rješenje. Cilj nam je pokazati da je a_n proizvoljno malen.
Promatramo slučaj za $\alpha > 0$.

Za bilo koji $\varepsilon > 0$ želimo pokazati da je za dovoljno veliki n

$$a_n < \varepsilon \iff \frac{n^\alpha}{a^n} < \varepsilon \iff \alpha \ln n - n \ln a < \ln \varepsilon \iff$$

$$\iff n\alpha \left(\frac{\ln a}{\alpha} - \frac{\ln n}{n} \right) > -\ln \varepsilon$$

Jer je

$$\lim_n \frac{\ln n}{n} = 0$$

postoji n_1 takav da vrijedi

$$n > n_1 \implies \frac{\ln n}{n} < \frac{1}{2} \frac{\ln a}{\alpha} \implies$$

$$\implies \frac{\ln a}{\alpha} - \frac{\ln n}{n} \geq \frac{\ln a}{\alpha} - \frac{\ln a}{2\alpha} = \frac{\ln a}{2\alpha}$$

Za $n > n_1$ će biti $a_n < \varepsilon$ ako

$$n\alpha\left(\frac{\ln a}{\alpha} - \frac{\ln n}{n}\right) > n\alpha\frac{\ln a}{2\alpha} = n\frac{\ln a}{2} > -\ln\varepsilon$$

$$\iff n > \frac{-2\ln\varepsilon}{\ln a}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.
Tada postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi

$$n_\varepsilon > n_1 \quad \text{i} \quad n_\varepsilon > \frac{-2\ln\varepsilon}{\ln a}.$$

Sada

$$n > n_\varepsilon \implies n > \frac{-2\ln\varepsilon}{\ln a} \implies n\alpha\left(\frac{\ln a}{\alpha} - \frac{\ln n}{n}\right) > -\ln\varepsilon \implies$$

$$\implies a_n < \varepsilon$$

Primjer

Niz $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ je konvergentan za svaki $a \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Napomena. Ovaj primjer pokazuje da faktorijele rastu brže od eksponencijalna funkcija.

Napomena. Ako je $|a| \leq 1$ tvrdnja slijedi jednostavno iz prethodnih primjera. Ako je $a < -1$ tada promatramo $|a^n| = |a|^n$. Zato ćemo u dokazu razmatrati samo slučaj $a > 1$.

Rješenje. Cilj nam je pokazati da je a_n proizvoljno malen. Promatramo slučaj za $a > 1$.

Za bilo koji $\varepsilon > 0$ želimo pokazati da je za dovoljno veliki n

$$a_n < \varepsilon \iff \frac{a^n}{n!} < \varepsilon \quad \iff \quad \frac{a}{1}\frac{a}{2}\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{n} < \varepsilon$$

Neka je $m > a$ (postoji takav m).

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{m-1}\frac{a}{m}\frac{a}{m+1}\cdots\frac{a}{n}$$

Označimo

$$\alpha = \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{m-1}\frac{a}{m}.$$

Za $k > m$ je

$$\frac{a}{k} < \frac{a}{m}.$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{m-1}\frac{a}{m}\frac{a}{m+1}\cdots\frac{a}{n} < \alpha\frac{a}{m}\cdots\frac{a}{m} = \alpha\left(\frac{a}{m}\right)^{n-m}$$

Jer je

$$\frac{a}{m} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_n \left(\frac{a}{m}\right)^{n-m} = 0$$

$$\frac{a^n}{n!} < \alpha \left(\frac{a}{m}\right)^{n-m}, \quad \text{za } n > m \quad \Longrightarrow \quad \lim_n \frac{a^n}{n!} \le \lim_n \alpha \left(\frac{a}{m}\right)^{n-m} = 0$$

∎

Primjer

Nizovi

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

i

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

su konvergentni i imaju isti limes.

Niz

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

je očigledno strogo rastući.

Pokažimo da je i ograničen, i da vrijedi

$$b_n < 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1!} + \left(\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\right) = \\ &= 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots 3}\right) < \\ &< 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n\cdots 2}\right) = \\ &= 2 + \frac{1}{2}(b_n - 1), \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Vrijedi rekurzija

$$b_{n+1} < 2 + \frac{1}{2}(b_n - 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tvrdnja slijedi indukcijom.

$$b_1 = 2 < 3,$$

i $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$b_n < 3 \ \Rightarrow \ b_{n+1} \ < \ 2 + \frac{1}{2}(b_n - 1) \ < \ 2 + \frac{1}{2}(3 - 1) = 3.$$

$\Rightarrow$ Niz $(b_n)_n$ je konvergentan.

Primjenom binomne formule na niz

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

slijedi

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \\ &< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = b_n. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Niz $(a_n)_n$ je odozgo ograničen.

Zbog

$$1 - \frac{p}{n+1} \geq 1 - \frac{p}{n},$$

za $0 \leq p \leq n$, vrijedi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)\right] + \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > a_n, \end{aligned}$$

$(a_n)_n$ rastući i ograničen $\quad \Rightarrow \quad$ $(a_n)_n$ konvergentan.

Sada za bilo koji čvrsti $p \in \mathbb{N}$ i svaki $n > p$ imamo

$$a_n > \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Prethodna nejednakost za $n \to \infty$ daje

$$\lim_n a_n \;\geq\; \lim_n \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \;=\; \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \;=\; b_p.$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;\geq\; b_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Odatle slijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Zbog ranije pokazane nejednakosti $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, je

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ovaj limes označavamo oznakom e i

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e \approx 2.71828182.$$

Primjer

Niz $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Napomena. Ovaj primjer pokazuje da n^n raste brže od $n!$.

Rješenje. Promotrimo

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{n!(n+1)(n+1)^n}{(n+1)!n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

Zadnja nejednakost vrijedi jer je $(1+1/n)^n$ rastući niz pa su svi članovi niza veći od prvog: $1+1/1)^1 = 2$.

$$\Longrightarrow \quad a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2} \leq \ldots \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_n a_n = 0.$$

■

Sažetak

$$\lim_n \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0$$

$$\lim_n n^\alpha = +\infty, \quad \alpha > 0$$

$$\lim_n a^n = 0, \quad |a| < 1$$

$$\lim_n a^n = +\infty, \quad |a| > 1$$

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_n \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

$$\lim_n \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$\lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad \forall\alpha, \; a > 1$$

$$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \forall\, a$$

$$\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0, \quad \forall\, a$$

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_n \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha, \quad \forall\alpha$$

Svojstva ograničenog niza

Lema (2.1.)

Svaki niz $(a_n)_n$ u $\mathbb{R}$ ima monoton podniz.

Dokaz: Neka je $A_m = \{a_n; n \geq m\}$. Promatramo dva slučaja:

1. $\exists m \in \mathbb{N}$ tako da skup A_m nema maksimum.
2. $\forall m \in \mathbb{N}$ skup A_m ima maksimum.

1. slučaj. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $m = 1$.
(A_1 nema maksimuma)

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N},\, k > n \quad \text{i} \quad a_k > a_n.$$

Počnimo s $n = 1$.

Nađemo prvi član niza iza a_1 koji je veći od njega.

Odredili smo p_1 takav da je $a_{p_1} > a_1$.

Sada promatramo skup A_{p_1}.

Ovaj skup isto nema maksimum, jer kada bi ga imao, onda bi i prethodni A_1 imao. M

Nađemo prvi član niza iza a_{p_1} koji je veći od njega.

Odredili smo p_2 takav da je $a_{p_2} > a_{p_1}$. itd.

Dobivamo strogo rastući niz $(p_n)_n$ u $\mathbb{N}$ takav da je

$$a_{p_n} < a_{p_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tj. podniz $(a_{p_n})_n$ je strogo rastući.

2. slučaj. Neka je $b_1 = \max A_1$.

Nađemo prvi maksimum.

tj. među onim $k \in \mathbb{N}$ za koje je $a_k = b_1$ uzmimo najmanji i označimo ga s p_1.

Sada gledamo A_{p_1+1}.

Neka je $b_2 = \max A_{p_1+1}$.

Vrijedi $b_2 \leq b_1$.

Uzmemo prvi maksimum.

i označimo ga s p_1.

Vrijedi $a_{p_2} \leq a_{p_1}$, itd.

Tim postupkom dobijemo strogo rastući niz $(p_n)_n$ u $\mathbb{N}$ takav da je $a_{p_n} \geq a_{p_{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. podniz $(a_{p_n})_n$ je padajući. **Q.E.D.**

Korolar (2.2.)

Za konačno nizova $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ *postoji strogo rastući niz* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takav da su svi podnizovi* $a^{(1)} \circ p, a^{(2)} \circ p, \dots, a^{(n)} \circ p$ *monotoni.*

U teoremu 2.1. i prijašnjem primjeru smo vidjeli da je ograničenost niza nužna, ali ne i dovoljna za konvergenciju toga niza.

Slijedeći teorem govori o tome što se ipak može zaključiti iz ograničenosti niza.

Teorem (2.6. Weierstrass)

Ograničen niz u $\mathbb{R}$ ima konvergentan podniz.

Dokaz: Pomoću leme 2.1. možemo naći monoton podniz zadanog niza.

Niz je ograničen $\Rightarrow$ svaki njegov podniz je ograničen.

Podniz je ograničen i monoton $\Rightarrow$ podniz je konvergentan (Teorem 2.3.) **Q.E.D.**

Definicija

Kažemo da je $\alpha \in \mathbb{R}$ **gomilište niza** $(a_n)_n$ realnih brojeva, ako postoji podniz $(a_{p_n})_n$ niza $(a_n)_n$ takav da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{p_n} = \alpha$.

Iz definicije slijedi da je $\alpha \in \mathbb{R}$ gomilište niza $(a_n)_n$ ako i samo ako $\forall \varepsilon > 0$ okolina $\langle \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon \rangle$ sadrži beskonačno članova niza.

Primjer

i. Svaki ograničeni niz ima barem jedno gomilište u $\mathbb{R}$.

ii. Svaki konvergentan niz ima točno jedno gomilište, a to je granična vrijednost.

iii. Niz iz primjera **??**. ima točno dva gomilišta jer je $(-1)^{2n} \to 1$ i $(-1)^{2n-1} \to -1$.

iv. Skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ su ekvipotentni, tj. postoji bijektivni niz $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Tada je $\mathbb{R}$ skup svih gomilišta niza $(r_n)_n$, tj. svaki realan broj je limes nekog niza racionalnih brojeva.

v. Niz $(n)_n$ nema niti jedno gomilište u $\mathbb{R}$.

Eksponencijalne funkcije na $\mathbb{R}$

Definirat ćemo eksponencijalnu funkciju $\exp : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ kao limes niza funkcija.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo funkcije $f_n : [0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$ tako da vrijedi

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad \forall x \in [0, +\infty\rangle.$$

Definicija

Kažemo da niz funkcija $(f_n)_n$, gdje su $f_n : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, konvergira **obično** ili **po točkama** k funkciji $f : I \to \mathbb{R}$ na intervalu I, ako niz brojeva $(f_n(x))_n$ konvergira k $f(x)$, $\forall x \in I$.

Propozicija (2.2.)

Niz funkcija $(f_n)_n$*, gdje su* $f_n : [0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$*,* $n \in \mathbb{N}$*, definirane s*

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad \forall x \in [0, +\infty\rangle.$$

konvergira na skupu $[0, +\infty\rangle$*. Funkcija* $f : [0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$*,*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n,$$

zadovoljava :

1. $f(0) = 1$,
2. $f(1) = e$,
3. $f(x + y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in [0, +\infty\rangle$.

Dokaz: Uzmimo $x \geq 0$ i pokažimo da je niz $f_n(x)_n$ strogo rastući i omeđen.

Vrijedi

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k}{n^k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) x^k < \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \\
&= f_{n+1}(x),
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad (f_n(x))_n$ je strogo rastući niz.

Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $x \leq m$. Tada je $\Rightarrow$
$f_n(x) \leq f_n(m), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Za podniz $(f_{nm}(m))_n$ strogo rastućeg niza $(f_n(m))_n$ vrijedi

$$f_{nm}(m) = f_n(1)^m, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

U primjeru je pokazano $\quad f_n(1) \leq 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$\Rightarrow \quad f_n(x) \leq 3^m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Niz je ograničen i rastući

$\Rightarrow \quad$ Niz $(f_n(x))_n$ je konvergentan $\forall x \in [0, +\infty\rangle$.

1. $f(0) = 1$

$$f_n(0) = 1^n = 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) = \lim_n f_n(0) = \lim_n 1 = 1$$

2. $f(1) = e$

$$f_n(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \quad f(1) = \lim_n f_n(1) = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

3. $f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in [0, +\infty\rangle$

Za $x, y \geq 0$ imamo

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right) = \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right) \geq \left(1 + \frac{x+y}{n}\right).$$

Vrijedi

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n=$$

$$=\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n=$$

$$=\frac{xy}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^{n-1-k}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^k\right],$$

$\Rightarrow$

$$0\le\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\le$$

$$\le\frac{xy}{n^2}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{y}{n}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}1\le$$

$$\le\frac{xy}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{y}{n}\right)^{n-1}$$

Sada iz prethodne nejednakosti za $n \to \infty$ dobijemo

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\right]=0,$$

odakle slijedi svojstvo 3. **Q.E.D.**

Sada definiramo funkciju $\exp : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ na slijedeći način:

$$\exp(x) = \begin{cases} f(x) & ;\ x \geq 0, \\ \dfrac{1}{f(-x)} & ;\ x < 0. \end{cases}$$

Pokažimo da vrijedi

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokaz ovisi o predznaku x i y.

$x > 0,\ y > 0$ Direktno iz Propozicije 2.2.:

$$\exp(x+y) = f(x+y) = f(x)f(y) = \exp(x)\exp(y)$$

$x < 0,\ y < 0$ Direktno iz Propozicije 2.2.:

$$\exp(x+y) = \frac{1}{f(-(x+y))} = \frac{1}{f(-x)f(-y)} = \exp(x)\exp(y).$$

$x > 0,\ y < 0,\ x+y > 0$

$$f(x) = f(x+y+(-y)) = f(x+y)f(-y)$$

$$\Rightarrow \quad \exp(x+y) = f(x+y) = f(x)\frac{1}{f(-y)} = \exp(x)\exp(y).$$

$x > 0,\ y < 0,\ x+y < 0 \rightarrow$ analogno.

$x < 0,\ y > 0,\ x+y < 0$ i $x < 0,\ y > 0,\ x+y > 0\ \rightarrow$ analogno.