MATEMATIČKA ANALIZA 1

prof.dr.sc. Miljenko Marušić

Kontakt: miljenko.marusic@math.hr

Konzultacije: Utorak, 10-12

WWW: **http://web.math.pmf.unizg.hr/~rus/nastava/ma1/ma1.html**

Sadržaj kolegija

- Skupovi, funkcije
- Nizovi
- Neprekidnost
- Derivacija

Matematička analiza 2

- Integral
- Redovi

Literatura

- S. Kurepa, Matematička analiza 1: Diferenciranje i integriranje, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.
- S. Kurepa, Matematička analiza 2: Funkcije jedne varijable, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.
- B.P. Demidovič, Zadatci i riješeni primjeri iz više matematike, Tehnička knjiga, Zagreb.
- B.Guljaš, Matematička analiza I & II, skripta, http://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf

Pravila ocjenjivanja

- testovi (kontinuirano praćenje nastave) - svaki tjedan
- Kolokviji - sredina i kraj semestra
- Uvjet za potpis: 30% bodova iz testova ili kolokvija
- Ocjena: Gleda se bolji rezultat testova ili kolokvija.
  Skala:

Bodovi	Ocjena
0% – 49%	1
50% – 59%	2
60% – 74%	3
75% – 89%	4
90% – 100%	5

Pravila ocjenjivanja

Popravni kolokvij - Može se ispravljati jedan ili oba kolokvija.
Ocjena se može povećati samo za jednu ocjenu.
Održava se na kraju semestra.

1. SKUPOVI I FUNKCIJE

Pojmovi

- **skup**
- **element** ili **član skupa**

su osnovni pojmovi koji se ne definiraju.

Intuitivno, pojam skupa predstavlja cjelinu koju čine elementi ili članovi tog skupa.

Skupove najčešće definiramo

- Nabrajanjem članova skupa: $A = \{1, 2, 3\}$
- Navođenjem svojstva članova skupa: $B = \{x : x^2 - x = 0\}$ ili $B = \{x | x^2 - x = 0\}$

Oznake:

- $a \in A$ - a je element skupa A
- $a \notin A$ - a nije element skupa A

Aksiom

Aksiom (*grč. aksios - načelo, tvrdnja*) je polazna tvrdnja koja se smatra istinitom i koja se ne dokazuje. Iz nje se logčkim sredstvima izvode (deduciraju) složenije tvrdnje (teoremi).

Formulacija aksioma mora zadovoljavati sljedeća tri principa:

- princip neovisnosti - aksiomi međusobno moraju biti neovisni i jedan se pomoću drugoga ne smije moći dokazati
- princip neproturječnosti - aksiomi ne smiju biti međusobno kontradiktorni
- princip potpunosti - svaka matematička teorija mora imati dovoljan broj aksioma da se može izgraditi cijela teorija. Često se inzistira da aksiomatska izgradnje bude minimalna.

AKSIOMI ELEMENTARNE TEORIJE SKUPOVA

(O) **Aksiom obuhvatnosti**:
Ako su A i B skupovi sastavljeni od jednih te istih elemenata onda se oni podudaraju, tj. $A = B$ onda i samo onda ako vrijedi

$$\forall x((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)).$$

(A) **Aksiom unije:**
Za bilo koje skupove A i B postoji skup kojem su elementi svi elementi skupa A i svi elementi skupa B i koji ne sadrži druge elemente, tj.

$$\forall A \forall B \exists C(\forall x((x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)))).$$

(B) **Aksiom razlike:**
Za bilo koje skupove A i B postoji skup kojem su elementi oni i samo oni elementi skupa A koji nisu elementi skupa B, tj.

$$\forall A \forall B \exists C(\forall x((x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)))).$$

AKSIOMI ELEMENTARNE TEORIJE SKUPOVA

(C) **Aksiom egzistencije (postojanja):**
Postoji barem jedan skup.

Aksiom A definira operaciju unije: $A \cup B$ a aksiom B operaciju razlike: $A \backslash B$.

Presjek možemo definirati kao:

$$A \cap B = A \backslash (A \backslash B).$$

Inkluzija i prazan skup

Definicija

Za skup A kažemo da je podskup skupa B ako

$$\forall x\ ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)).$$

Tada pišemo $A \subseteq B$ ili $B \supseteq A$.
Ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$, skup A zovemo pravim podskupom skupa B.

Primjer

Očito je skup $A = \{2, 3, 5\}$ sadržan u skupu $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Provjerimo to koristeći definiciju podskupa.

$A = \{2, 3, 5\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$2 \in A \quad \text{i} \quad 2 \in B$

$3 \in A \quad \text{i} \quad 3 \in B$

$5 \in A \quad \text{i} \quad 5 \in B$

Pokazali smo:

$\forall x((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$

t.j.
$A \subseteq B$

Primjer

Neka je $A = \{x : x \text{ je primitivni broji manji od } 10\}$ i
$B = \{x : x \text{ je rješenje jednadžbe } x^4 - 17x^3 + 101x^2 - 247x + 210 = 0\}$.
Pokažite da je $A \subseteq B$.

$A = \{2, 3, 5, 7\}$

$2 \in A \quad \text{i} \quad 2^4 - 17 \cdot 2^3 + 101 \cdot 2^2 - 247 \cdot 2 + 210 = 0 \Rightarrow 2 \in B$

$3 \in A \quad \text{i} \quad 3^4 - 17 \cdot 3^3 + 101 \cdot 3^2 - 247 \cdot 3 + 210 = 0 \Rightarrow 3 \in B$

$5 \in A \quad \text{i} \quad 5^4 - 17 \cdot 5^3 + 101 \cdot 5^2 - 247 \cdot 5 + 210 = 0 \Rightarrow 5 \in B$

$7 \in A \quad \text{i} \quad 7^4 - 17 \cdot 7^3 + 101 \cdot 7^2 - 247 \cdot 7 + 210 = 0 \Rightarrow 7 \in B$

Pokazali smo:

$\forall x((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$

t.j. $A \subseteq B$

Propozicija

Vrijedi

$$(A \subseteq B) \ i \ (B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B.$$

Dokaz:

$\Rightarrow$

$$(A \subseteq B) \text{ i } (B \subseteq A) \quad \Rightarrow \quad ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \text{ i } ((x \in B) \Rightarrow (x \in A)) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)) \quad \Rightarrow \quad A = B$$

$\Leftarrow$

$$A = B \quad \Rightarrow \quad ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \text{ i } ((x \in B) \Rightarrow (x \in A)) \quad \Rightarrow \quad (A \subseteq B) \text{ i } (B \subseteq A)$$

Q.E.D.

Navedimo i dokažimo najvažnija svojstva inkluzije.
Tranzitivnost inkluzije

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C), \tag{1}$$

slijedi iz (**??**) i tranzitivnosti implikacije.
Unija skupova sadrži svaki pojedini skup, a presjek je sadržan u svakom pojedinom skupu, tj.

$$A \subseteq A \cup B\,,\; B \subseteq A \cup B, \tag{2}$$

$$A \cap B \subseteq A\,,\; A \cap B \subseteq B. \tag{3}$$

Inkluzije (2) slijede iz tautologije $p \Rightarrow p \vee q$, a inkluzije (3) slijede iz $p \wedge q \Rightarrow p$.
Razlika dva skupa je sadržana u skupu kojeg umanjujemo : $A - B \subseteq A$.

Propozicija

Relaciju inkluzije možemo definirati pomoću jednakosti i jedne od operacija $\cup$ ili $\cap$.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A). \tag{4}$$

Dokaz: Ako je $A \subseteq B$ onda vrijedi

$$\forall x \, ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)).$$

Pomoću tautologije

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow q)$$

slijedi

$$((x \in A) \vee (x \in B)) \Rightarrow (x \in B).$$

što dokazuje $A \cup B \subseteq B$.

Zbog (2) slijedi prva ekvivalencija u (4).

Analogno, koristeći tautologiju

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow (p \wedge q))$$

imamo

$$A \subseteq A \cap B,$$

odatle zbog (3) imamo drugu ekvivalenciju u (4). **Q.E.D.**

Po aksiomu (B) postoji barem jedan skup A.

Tada postoji i skup $A - A$.

Zbog

$$(x \in A - A) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in A) \Leftrightarrow 0$$

slijedi da taj skup ne sadrži niti jedan element.

Kada bi postojala dva skupa Z_1 i Z_2 s prethodnim svojstvom, izjava

$$\forall x \; (x \in Z_1 \Leftrightarrow x \in Z_2)$$

bi bila istinita jer su obje strane lažne.

Odatle po aksiomu (O) slijedi $Z_1 = Z_2$.

Zbog jedinstvenosti skupa s prethodnim svojstvom koristimo oznaku $\emptyset$ za taj skup.

Dakle, $\forall x (x \notin \emptyset)$, tj. $(x \in \emptyset) \Leftrightarrow 0$.

Budući je implikacija s lažnom premisom uvijek istinita to vrijedi

$$\forall x\ (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

iz čega zaključujemo

$$\forall A(\emptyset \subseteq A).$$

Iz

$$x \in (A \cup \emptyset) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in A) \vee 0 \Rightarrow (x \in A)$$

zaključujemo

$$A \cup \emptyset \subseteq A,$$

što zajedno s (2) daje $A \cup \emptyset = A$.

Analogno dobijemo $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Skupovi A i B su **disjunktni** ako nemaju zajedničkih elemenata, tj. $A \cap B = \emptyset$.

Skup koji nema niti jednog člana zovemo **prazni skup** i označavamo s $\emptyset$.

Kažemo da je skup A **podskup** skupa B i pišemo $A \subseteq B$, ako je svaki element $t \in A$ ujedno i element skupa B, tj.

$$\forall t,\ (t \in A) \Rightarrow (t \in B).$$

Posljednja izjava je napisana pomoću logičkih znakova i glasi:

"za svaki t, t element od A povlači (slijedi) t element od B".

Znak $\forall$ (za svaki) je logički kvantifikator (univerzalni kvantifikator), i on opisuje opseg izjave koja iza njega slijedi.

Znak $\Rightarrow$ je logički veznik koji zovemo implikacija.
On povezuje dvije izjave i čitamo ga "slijedi, povlači, ako - onda".

Drugi logički kvantifikator je $\exists$, kvantifikator egzistencije ili postojanja.

Npr. izjava $\exists a\ (a \in A)$, "postoji element a koji je u skupu A", kazuje da skup A ima barem jedan član, tj. $A \neq \emptyset$.

Pored navedenih kvantifikatora koristimo još slijedeće veznike ili logičke operacije:

- $\wedge, \&$ (konjunkcija) koji odgovara jezičnom vezniku "i",
- $\vee$ (disjunkcija)je veznik "ili",
- $\Leftrightarrow$ (ekvivalencija) čitamo "ako i samo ako", "onda i samo onda" i slično.

Navedeni veznici odgovaraju pojedinim operacijama sa skupovima.

Operacija presjek skupova A i B u oznaci $A \cap B$ odgovara vezniku "i", a njen rezultat je skup koji sadrži one i samo one članove koji su članovi skupa A i skupa B, tj.

$$\forall t\ (t \in A \cap B) \Leftrightarrow ((t \in A) \wedge (t \in B)).$$

Operacija unija skupova A i B u oznaci $A \cup B$ odgovara vezniku "ili", a njen rezultat je skup koji sadrži one i samo one članove koji su članovi skupa A ili skupa B, tj.

$$\forall t \ (t \in A \cup B) \Leftrightarrow ((t \in A) \vee (t \in B)).$$

Ako veznik $\Leftrightarrow$ povezuje dvije izjave, onda su one jednako vrijedne, obje su istinite ili su obje lažne.

Skup prirodnih brojeva ($\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Je li ovo dovoljno za opis skupa prirodnih brojeva?

U skupovima nije bitan poredak:

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}, \quad \{1, 2\} = \{2, 1\}.$$

Možemo li napisati

$$\mathbb{N} = \{2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots\}?$$

Ovo nije uobičajeno.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

- U skupu $\mathbb{N}$ elementi su poredani **po redu**.
- Iza svakog broja dolazi točno određeni broj (sljedbenik).
- Svakom članu skupa $\mathbb{N}$ pridružen je točno jedan sljedbenik.
- Može li neki broj biti sljedbenik dva broja?   NE!
- Ako su sljedbenici dva elementa iz $\mathbb{N}$ jednaki, tada su i ta dva elementa jednaka.
  $s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$
- Imaju li svi brojevi sljedbenika?   NE!
- 1 nije sljedbenik niti jednog prirodnog broja.
  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (s(n) \neq 1)$
- Ovime smo naveli neka bitna svojstva skupa $\mathbb{N}$.
  Opisuju li ona potpuno taj skup?
- Peanovi aksiomi

Peanovi aksiomi

N1 $1 \in \mathbb{N}$.

N2 Postoji pridruživanje s koje svakom elementu skupa $\mathbb{N}$ pridruži točno jedan element skupa $\mathbb{N}$ (sljedbenik).

N3 $s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$

N4 1 nije sljedbenik niti jednog elementa iz $\mathbb{N}$, tj. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (s(n) \neq 1)$

N5. **Aksiom matematičke indukcije**:

Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

1) $1 \in S$,
2) $\forall n \in \mathbb{N}, (n \in S) \Rightarrow (s(n) \in S)$.

Tada je $S = \mathbb{N}$.

Skup koji zadovoljava aksiome (N1)–(N5) nazivamo skupom prirodnih brojeva i označavamo s $\mathbb{N}$.

Primjer.

Pokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Možemo provjeriti da je

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \\ 1+2 &= 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} \\ 1+2+3 &= 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} \end{aligned}$$

Kako pokazati da to vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$?

Rješenje. Definirajmo skup

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ zadovoljava jednakost}\}.$$

Iskoristit ćemo aksiom matematičke indukcije da pokažemo da je $S = \mathbb{N}$.

1. baza indukcije Pokažimo da je $1 \in S$:
Za $n = 1$ je

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

pa jednakost vrijedi za 1, t.j. $1 \in S$.

2. Korak indukcije Pokazujemo da vrijedi: $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

Krećemo od pretpostavke da je $n \in S$:

$$
\begin{aligned}
n \in S \quad & \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\
& \qquad = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2} \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \quad n+1 \in S
\end{aligned}
$$

Prema aksiomu indukcije je $S = N$, t.j. jednakost vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Binomni teorem

Teorem

Za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

gdje je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Teorem tvrdi da je

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= 1\cdot a + 1\cdot b \\
(a+b)^2 &= 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2 \\
(a+b)^3 &= 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2 b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.
Označimo $S = \{n \in \mathbb{N} : \text{teorem vrijedi za } n\}$

1. Baza indukcije. $1 \in S$ jer

$$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

$$\binom{1}{1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

pa je

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1.$$

2. Korak indukcije. Pretpostavimo da je $n \in S$ t.j. da vrijedi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \\
\{l = k+1\} &= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n-l+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= &\ \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l-1} a^l b^{n-l+1} + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} = \\
= &\ a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}
\end{aligned}
$$

Izračunamo

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k)!(n-k)!} = \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) = \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{n+1}{(n-k+1)k} = \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k-1)!k(n-k)!(n+1-k)} = \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Uvrstimo ovo u prethodni izraz.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} = \\
&= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \\
&\quad + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

Dakle, formula vrijedi i za $n+1$, t.j. $n+1 \in S$.

Ovime smo pokazali da vrijedi $\quad n \in S \Rightarrow n+1 \in S$.

Uz prethodno pokazano da je $1 \in S$ pokazali smo da je $S = \mathbb{N}$ t.j. da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. **Q.E.D.**

Bernoullijeva nejednakost.

Teorem

Za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ *i* $\forall n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *vrijedi*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dokaz: Dokaz provodimo indukcijom.

1. Baza indukcije. Za $n = 0$ je

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$$

pa tvrdnja vrijedi.

2. Korak indukcije. Neka tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}_0$, t.j.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

tada je

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + nx = \\
&= (1+x)(1+x)^n \geq \\
&\geq (1+x)(1+nx) = \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq \\
&\geq 1 + (n+1)x
\end{aligned}$$

Dakle, nejednakost vrijedi i za $n+1$.

Pokazali smo da

- tvrdnja vrijedi za $n = 0$
- ako tvrdnja vrijedi za n da tada vrijedi i za $n+1$

Time smo pokazali da tvrdnja vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}_0$. **Q.E.D.**

Zbrajanje.

Pomoću funkcije sljedbenik definiramo binarnu operaciju zbrajanja:

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}, \quad n + m = \underbrace{s(s(s(\dots s}_{m}(n)\dots))) = s^{[m]}(n).$$

Asocijativnost

$$(\forall\, n, m, k \in \mathbb{N}), n + (m + k) = (n + m) + k$$

Komutativnost

$$(\forall\, n, m \in \mathbb{N}), n + m = m + n.$$

Uređaj.

Možemo definirati relaciju strogog uređaja $<$ tako da kažemo

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n < s(n).$$

tj.

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n < n+1 < \cdots .$$

Uređaj $\leq$:

$$(n \leq m) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} ((n < m) \vee (n = m)).$$

Na $\mathbb{N}$ imamo zadanu algebarsku strukturu i uređaj.

Možemo li riješiti jednadžbu oblika $a + x = b$, gdje su $a, b \in \mathbb{N}$? Možemo li tu jednadžbu riješiti u skupu $\mathbb{N}$ za svaki izbor brojeva $a, b \in \mathbb{N}$?

Skup cijelih brojeva ($\mathbb{Z}$)

Skupu $\mathbb{N}$ dodajmo broj koji je prethodnik broju 1. Označimo ga s 0. Dakle, $s(0) = 1$, tj., $0 + 1 = 1$.

Lako se vidi da je

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n + 0 = n).$$

0 je neutralni element za zbrajanje ili nula.

I dalje nije moguće riješiti svaku jednadžbu oblika $a + x = b$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo element $-n$ sa svojstvom

$$n + (-n) = 0.$$

Takav element $-n$ nazivamo suprotnim element od n.

Definirajmo skup $-\mathbb{N}$:

$$-\mathbb{N} = \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Elemente skupa $-\mathbb{N}$ poredajmo u obrnutom poretku od njihovih originala u skupu $\mathbb{N}$:

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) \quad ((n < m) \Rightarrow \quad (-m < -n))$$

Definirajmo skup

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

Skup $\mathbb{Z}$ nazivamo **skupom cijelih brojeva**.

Zbrajanje.

Na čitav skup $\mathbb{Z}$ možemo proširiti i operaciju zbrajanja.

Za $-m, -n \in -\mathbb{N}$ stavimo $-n + -m = -(n+m)$.

Za $-m \in -\mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ promatramo dva slučaja.

Ako je $(n \geq m) \Rightarrow \exists\, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $n = m + k$, pa stavljamo $-m + n = k$.

Ako je $(m \geq n) \Rightarrow \exists\, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $m = n + k$, pa stavljamo $-m + n = -k$.

Skup $\mathbb{Z}$ sa operacijom $+$ je algebarska struktura sa svojstvima:

1. $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z},\ a + (b + c) = (a + b) + c$ (asocijativnost).
2. $\exists\ 0 \in \mathbb{Z},\ \forall\ a \in \mathbb{Z},\ 0 + a = a + 0 = a$ (neutralni element).
3. $\forall\ a \in \mathbb{Z},\ \exists\ -a \in \mathbb{Z},\ a + -a = -a + a = 0$ (suprotni elementi).
4. $\forall\ a, b \in \mathbb{Z},\ a + b = b + a$ (komutativnost).

Strukturu $(\mathbb{Z}, +)$ koja zadovoljava svojstva 1., 2. i 3. zovemo **grupa**.

Ako vrijedi i svojstvo 4., zovemo je **komutativna (Abelova) grupa**.

To je osnovna algebarska struktura u kojoj je uvijek rješiva jednadžba $a + x = b$.

Skup racionalnih brojeva ($\mathbb{Q}$)

Na skupu $\mathbb{N}$ možemo definirati i drugu binarnu operaciju koju nazivamo množenje.

Za $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ stavimo

$$n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m}.$$

Proširenje na skup $\mathbb{Z}$:

$$-n, -m \in -\mathbb{N}, \quad (-n) \cdot (-m) = n \cdot m.$$

$$-m \in -\mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, \quad n \cdot (-m) = -(n \cdot m).$$

Lako se pokaže:

- asocijativnost,
- komutativnost
- i u skupu $\mathbb{Z}$ postoji neutralni element za množenje 1, tj.

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}, \quad n \cdot 1 = 1 \cdot n = n.$$

Promatrajmo sada rješivost jednadžbe

$$a \cdot x = b \quad \text{za} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Već za $a = n \in \mathbb{N}$ i $b = 1$ ta jednadžba nema rješenje u $\mathbb{Z}$.

Broj x za koji vrijedi $nx = 1$ nazivamo **recipročni element od n** ili **inverz od n** za operaciju množenje i označavamo s

$$n^{-1} = \frac{1}{n}.$$

Proširimo skup $\mathbb{Z}$ sa svim mogućim rješenjima jednadžbe $nx = m$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $m \in \mathbb{Z}$.
Dobivamo skup

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{Z}\}$$

koji zovemo **skupom racionalnih brojeva**.

Prikaz racionalnog broja u obliku $\frac{m}{n}$ jedinstven ako su brojevi m i n relativno prosti, tj. nemaju zajedničkog djelitelja različitog od 1 ili -1.

Operaciju množenje na skupu $\mathbb{Q}$ definiramo tako da za

$$\forall\ \frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q},\ \text{stavimo}\ \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm}{nn'} \in \mathbb{Q}.$$

Skup racionalnih brojeva bez nule, s operacijom množenja $(\mathbb{Q}, \cdot)$ je **komutativna grupa**.

Nula nema recipročnog elementa, tj. s nulom nije moguće dijeliti.

Operaciju zbrajanje je moguće proširiti sa skupa $\mathbb{Z}$ na skup $\mathbb{Q}$ na slijedeći način:

$$\forall\ \frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q},\ \text{stavimo}\ \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + m'n}{nn'} \in \mathbb{Q}.$$

Operacije zbrajanja i množenja su povezane svojstvom distributivnosti množenja prema zbrajanju:

$$\forall\, n, m, k \in \mathbb{Q}, \quad n(m+k) = nm + nk.$$

Struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ s gore navedenim svojstvima naziva se **polje**.

Uređaj sa skupa $\mathbb{Z}$ se jednostavno proširuje na skup $\mathbb{Q}$:

$$\forall\ \frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q}, \quad \text{definiramo} \quad \frac{m}{n} \leq \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' \leq m'n.$$

Ta relacija ima slijedeća svojstva:

1. $\forall\ a \in \mathbb{Q},\ (a \leq a)$, (refleksivnost).
2. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q},\ (a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow (a = b)$, (antisimetričnost).
3. $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Q},\ (a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$, (tranzitivnost).
4. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q},\ (a \leq b) \vee (b \leq a)$, (linearnost ili totalnost).

Ako uređaj zadovoljava samo svojstva 1., 2. i 3. zovemo ga **parcijalni uređaj**. Ovaj uređaj je u suglasju s operacijama zbrajanja i množenja.

Vrijedi

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q},\ (a \leq b) \Rightarrow (\forall c \in \mathbb{Q}\ (a + c \leq b + c))$.
2. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q},\ (a \leq b) \Rightarrow (\forall c \geq 0\ (ac \leq bc))$.

2.' $\forall\ a, b \in \mathbb{Q},\ ((a \geq 0) \wedge (b \geq 0)) \Rightarrow (ab \geq 0)$.

Aksiomi skupa racionalnih brojeva

Zbrajanje

A 1. Asocijativnost zbrajanja:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, \qquad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

A 2. Postoji neutralni element 0 (nula):

$$\exists! 0 \in \mathbb{Q},\ \forall x \in \mathbb{Q} \qquad 0 + x = x + 0 = x.$$

A 3. Svaki element iz $\mathbb{Q}$ ima inverz za zbrajanje (suprotni):

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ \exists! (-x) \in \mathbb{Q}, \qquad x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

A 4. Komutativnost zbrajanja:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \qquad x + y = y + x.$$

Množenje

A 5. Asocijativnost množenja:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, \qquad x(yz) = (xy)z.$$

A 6. Postoji jedinstven neutralni element 1 (jedinica):

$$\exists! 1 \in \mathbb{Q}, 1 \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{Q} \qquad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

A 7. Svaki element iz $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ima inverz za množenje (recipročni):

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \ \exists! x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}, \qquad x\frac{1}{x} = \frac{1}{x}x = 1.$$

A 8. Komutativnost množenja:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \qquad xy = yx.$$

A 9. distributivnost množenja prema zbrajanju:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, \qquad x(y + z) = xy + xz.$$

Uređaj

A 10. Linearnost uređaja:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \qquad (x \leq y) \vee (y \leq x).$$

A 11. Antisimetričnost uređaja:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \qquad ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = y).$$

A 12. Tranzitivnost uređaja:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, \qquad ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z).$$

A 13. Usklađenost zbrajanja:

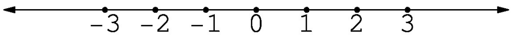
$$(y \leq y) \Rightarrow (\forall z, \ (x + z \leq y + z)).$$

A 14. Usklađenost množenja:

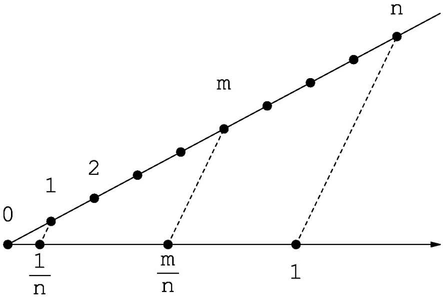
$$((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \Rightarrow (xy \geq 0).$$

Prikaz skupova $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ na pravcu

Prikaz cijelih brojeva na pravcu



Prikaz racionalnioh brojeva na pravcu



Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je **gust u sebi**:

$$\forall\, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, \quad q_1 < q_2, \quad \exists\, q \in \mathbb{Q}, \quad q_1 < q < q_2$$

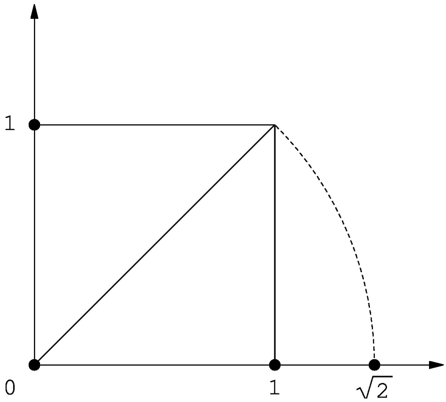
.

To je ispunjeno već za $q = \dfrac{q_1 + q_2}{2}$.

Jesu li na taj način dobivene sve točke na pravcu?

T.j. da li svaka točka na pravcu predstavlja neki racionalan broj?

Primjer: $\sqrt{2}$



Dokažimo da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Pretpostavimo suprotno, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow$ Postoje relativno prosti brojevi $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2}.$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{m^2}{n^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow$ m^2 je djeljiv s 2 $\Rightarrow$ m je djeljiv s 2 $\Rightarrow$ $m = 2m_0,\ m_0 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad 4m_0^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad 2m_0^2 = n^2$

$\Rightarrow$ n^2 je djeljiv s 2 $\Rightarrow$ n je djeljiv s 2

$\Rightarrow$ m i n su djeljivi s 2 $\Rightarrow$ m i n nisu relativno prosti.

kontradikcija! s pretpostavkom da su m i n relativno prosti. **Q.E.D.**

Ovdje smo pokazali da iz pretpostavke $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ slijedi da su m i n relativno prosti i da m i n nisu relativno prosti.

Za tvrdnje p i q pokazali smo da vrijedi

$$\neg p \Rightarrow (q) \text{ i } (\neg q)$$

Kako je

$$(q) \text{ i } (\neg q) \Leftrightarrow 0$$

pokazali smo

$$\neg p \Rightarrow 0.$$

To je moguće samo ako je

$$\neg p = 0,$$

odnosno

$$p = 1.$$

Iskoristili smo

$$(p = 1) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow 0).$$

Sada je jasno da sve točke na pravcu ne predstavljaju racionalne brojeve, već ima (puno više) točaka koje ne predstavljaju racionalne nego tzv. iracionalne brojeve. Sve te točke zajedno predstavljaju skup **realnih brojeva** koji označavamo s $\mathbb{R}$.

Po čemu se razlikuju skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$?

Aksiomi polja $\mathbb{R}$, supremum i infimum, potpunost
Aksiomi polja $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ je komutativna grupa s obzirom na operaciju zbrajanje $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A 1. Asocijativnost zbrajanja:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x + (y + z) = (x + y) + z.$$

A 2. Postoji neutralni element 0 (nula):

$$\exists! 0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\ 0 + x = x + 0 = x.$$

A 3. Svaki element iz $\mathbb{R}$ ima inverz za zbrajanje (suprotni):

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists!(-x) \in \mathbb{R},\ x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

A 4. Komutativnost zbrajanja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x.$$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativna grupa s obzirom na množenje $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A 5. Asocijativnost množenja:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x(yz) = (xy)z.$$

A 6. Postoji jedinstven neutralni element 1 (jedinica):

$$\exists! 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

A 7. Svaki element iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ima inverz za množenje (recipročni):

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists! x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R},\ x\frac{1}{x} = \frac{1}{x}x = 1.$$

A 8. Komutativnost zbrajanja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = yx.$$

A 9. distributivnost množenja prema zbrajanju:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x(y+z) = xy + xz.$$

Uređenu trojku $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nazivamo **poljem**.

Primjer

Iz aksioma dokažimo neka poznata svojstva operacija zbrajanja i množenja.

1. 0 je jedinstveni neutralni element za zbrajanje i 1 je jedinstveni neutralni broj za množenje.

Kada bi postojao broj $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sa svojstvom da

$$\forall x \in \mathbb{R} \; a + x = x + a = x,$$

imali bi

$$a = a + 0 = 0,$$

a to je kontradikcija.

Analogno, kada bi postojao broj $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$ sa svojstvo da

$$\forall x \in \mathbb{R} \; bx = xb = x,$$

imali bi

$$b = b \cdot 1 = 1$$

2. Suprotni i recipročni brojevi su jedinstveni.

Neka je $a \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$, $c \neq -a$ njegov suprotni broj, tj.

$$a + c = c + a = 0.$$

Tada bi vrijedilo

$$-a = -a + 0 = -a + (a + c) = (-a + a) + c = 0 + c = c,$$

što je kontradikcija.

Dokaz jedinstvenosti recipročnog broja je analogan.

3. Vrijedi $\forall x \in \mathbb{R}, -(-x) = x$.

Po definiciji suprotnog elementa je

$$-x + (-(-x)) = (-(-x)) + (-x) = 0$$

i

$$-x + x = x + (-x) = 0.$$

Iz jedinstvenosti elementa s danim svojstvom za $-x$, slijedi $x = -(-x)$.

4. Pokažimo da je $-0 = 0$.

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x + (-0) = x + 0 + (-0) = x + 0 = x$$

i

$$-0 + x = -0 + 0 + x = 0 + x = x,$$

pa zbog jedinstvenosti nule vrijedi $-0 = 0$.

5. Za svako $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$

Naime,

$$0 \cdot x = (0+0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x = 2 \cdot 0 \cdot x.$$

Kada bi bilo

$$0x \neq 0,$$

$\Rightarrow \quad 0x$ ima inverz $\quad \Rightarrow \quad 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 1$

To se protivi zahtjevu iz A6.

6. Vrijedi $\quad (-1)(-1) = 1.$

Imamo

$$(-1)(-1) + (-1) = (-1)(-1) + (-1)1 = (-1)((-1) + 1) = (-1)0 = 0$$

i isto tako

$$(-1) + (-1)(-1) = 0.$$

Odatle je

$$(-1)(-1) = -(-1) = 1.$$

7. Pokažimo $(ab = 0) \Leftrightarrow ((a = 0) \vee (b = 0))$.

Neka vrijedi
$$ab = 0.$$

Ako je $a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a$ ima recipročni element $\quad \Rightarrow$
$$b = 1 \cdot b = a^{-1}ab = a^{-1}0 = 0.$$

Analogno, ako je $b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$.

Obratna tvrdnja slijedi iz 3. $\square$

Na skupu $\mathbb{R}$ je zadan linearan (totalan) uređaj $\leq$.

A 10. Linearnost uređaja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leq y) \vee (y \leq x).$$

A 11. Antisimetričnost uređaja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = y).$$

A 12. Tranzitivnost uređaja:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z).$$

Uređaj je u skladu s operacijama zbrajanja i množenja.

A 13. Usklađenost zbrajanja:

$$(y \leq y) \Rightarrow (\forall z,\ (x + z \leq y + z)).$$

A 14. Usklađenost množenja:

$$((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \Rightarrow (xy \geq 0).$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je **uređeno polje.**

Primjer

Vrijedi monotonost množenja:

$$((x \leq y) \wedge (z \geq 0)) \Rightarrow (xz \leq yz).$$

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad y - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (y - x)z \geq 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad yz - xz \geq 0 \quad \Rightarrow \quad xz \leq yz$$

$\square$

Supremum i infimum skupa, potpunost

Definicija

Kažemo da je $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, **omeđen odozgo** u $\mathbb{R}$, ako postoji broj $M \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\forall x \in S$, $x \leq M$. Broj M zovemo **gornja međa** ili **majoranta** skupa S.

Kažemo da je $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, **omeđen odozdo** u $\mathbb{R}$, ako postoji broj $m \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\forall x \in S$, $m \leq x$. Broj m zovemo **donja međa** ili **minoranta** skupa S.

Skup $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, je **omeđen** u $\mathbb{R}$, ako je omeđen odozdo i odozgo u $\mathbb{R}$.

Ako S ima majorantu, onda on ima beskonačno mnogo majoranti.

Broj $L \in \mathbb{R}$ koji je najmanja majoranta nepraznog odozgo omeđenog skupa $S \subset \mathbb{R}$ nazivamo **supremum** skupa S i pišemo $L = \sup S$.

$L = \sup S$ je karakteriziran slijedećim svojstvima:

$(i.)$ $\forall x \in S,\ x \leq L$.

$(ii.)$ $\forall a \in \mathbb{R},\ a < L,\ \exists x \in S,\ a < x$.

Često je praktično uvjet $(ii.)$ pisati u obliku:

$(ii.)'$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in S,\ L - \varepsilon < x$.

Supremum koji je u skupu nazivamo **maksimum**, tj. ako je $L = \sup S \in S$ onda je $L = \max S$.

Posljednji aksiom skupa $\mathbb{R}$.

A 15. **Aksiom potpunosti**:
Svaki neprazan odozgo omeđen podskup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

Uređeno polje koje zadovoljava i A 15. zovemo **uređeno potpuno polje**.
Dakle $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je uređeno potpuno polje.

Teorem (Arhimedov aksiom)

U skupu $\mathbb{R}$ *vrijedi tvrdnja:*

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0, b > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad na > b.$$

Dokaz: Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije istinita, tj. neka vrijedi:

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0, b > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad na \leq b.$$

$\Rightarrow$ $A = \{na; n \in \mathbb{N}\}$ je odozgo ograničen skup u $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Po A15. postoji $c = \sup A$, tj.

$$\forall n, \quad na \leq c \quad \text{i} \quad \forall \varepsilon >, \exists n \in \mathbb{N}, \quad c - \varepsilon < na$$

$\Rightarrow$ Za $\varepsilon = a > 0$ dobijemo $c - a < na$, odnosno $c < (n+1)a \in A$, što je kontradikcija s činjenicom da je c gornja međa od S. **Q.E.D.**

Zadatak

Pokažite bez upotrebe A 15. da Arhimedov aksiom vrijedi u skupu $\mathbb{Q}$.

Rješenje: Dovoljno je pokazati da

$$\forall k, m \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad nk > m.$$

U suprotnom bismo imali

$$\exists k, m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad nk \leq m.$$

Tada za $n = m$ imamo

$$mk \leq m \Rightarrow k = 1.$$

No tada bi vrijedilo

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leq m,$$

što nije istina već za $n = m + 1$.

Sada za svaki

$$q = \frac{m}{k}, \quad q' = \frac{m'}{k'} \in \mathbb{Q}, \quad m, k, m', k' \in \mathbb{N},$$

postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $nmk' > m'k$, odnosno $nq > q'$. $\square$

Zadatak

Utvrdite da li postoji i ako postoji odredite supremum skupa

$$S = \{\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}.$$

Rješenje: Skup S je odozgo ograničen s 1, tj.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n}{n+1} \leq 1.$$

Pokažimo da je $1 = \sup S$.
Uzmimo bilo koji $\varepsilon > 0$.
Trebamo naći $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (1-\varepsilon)(n+1) < n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -n\varepsilon + 1 - \varepsilon < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < (n+1)\varepsilon.$$

Iz Arhimedovog aksioma slijedi postojanje $m \in \mathbb{N}$, $m\varepsilon > 1$.
Uzmimo sada $n = m - 1$ i imamo tvrdnju. $\square$

Primjer

Polje $\mathbb{Q}$ nije potpuno.

Neka je

$$S = \{q \in \mathbb{Q};\ 1 < q,\ q^2 < 2\}.$$

Očito je S odozgo omeđen s $2 \in \mathbb{Q}$.

Skup S nema maksimalan element.

Naime, za bilo koji $q \in S$ po Arhimedovom aksiomu za brojeve

$$2 - q^2 > 0 \quad \text{i} \quad 2q + 1 > 0$$

postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je

$$n(2 - q^2) > 2q + 1.$$

$$\Rightarrow \quad n^2(2 - q^2) > n(2q + 1) = 2nq + n \geq 2nq + 1 \Rightarrow (q + \frac{1}{n})^2 < 2.$$

$\Rightarrow$ Postoji $q' = q + \frac{1}{n} \in S, \quad q' > q.$

Pokažimo da vrijedi: $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, je majoranta od $S \Leftrightarrow a^2 > 2$. Neka je $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, majoranta od S. Tada je $a^2 \neq 2$ ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Kada bi bilo $a^2 < 2$, onda bi a bio maksimum od S, a takvog nema. Dakle, mora biti $a^2 > 2$. Obratno, ako je $0 < a$ i $a^2 > 2$, onda za svaki $q \in S$ imamo $q^2 < 2 < a^2 \Rightarrow q < a$, tj. a je majoranta od S.

Pokažimo da ne postoji najmanja majoranta skupa S u $\mathbb{Q}$. Neka je a bilo koja majoranta skupa S. Tada po Arhimedovom aksiomu za brojeve $a^2 - 2 > 0$ i $2a > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $n(a^2 - 2) > 2a$. Odatle je $\dfrac{2a}{n} < a^2 - 2 < a^2 - 2 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow 2 < \left(a - \dfrac{1}{n}\right)^2$. Dakle, postoji majoranta $a' = a - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$, $a' < a$. $\square$

Zadatak

Dokažite da je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Rješenje: U suprotnom slučaju bi vrijedilo $\exists \varepsilon > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, $(q \leq x - \epsilon) \vee (x + \varepsilon \leq q)$. Neka je $q_1 \leq x - \epsilon$ i $x + \varepsilon \leq q_2$. Uzmimo $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $2n\varepsilon > q_2 - q_1$ i odredimo $\alpha_k = q_1 + \frac{k}{n}(q_2 - q_1) \in \mathbb{Q}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1, n)$. Neka je $1 \leq k_0 < n$ najveći od indeksa za koje je $\alpha_k \leq x - \epsilon$. Zbog $x + \varepsilon \leq \alpha_{k_0+1}$ vrijedi $\frac{q_2 - q_1}{n} = \alpha_{k_0+1} - \alpha_{k_0} \geq 2\varepsilon$, što je kontradikcija s izborom broja n. $\square$

Definicija

Broj $\ell \in \mathbb{R}$ koji je najveća minoranta nepraznog odozdo omeđenog skupa $S \subset \mathbb{R}$ nazivamo **infimum** skupa S i pišemo $\ell = \inf S$.

$\ell = \inf S$ je karakteriziran slijedećim svojstvima:

(*i.*) $\forall x \in S, \ell \leq x$.

(*ii.*) $\forall a \in \mathbb{R}, a > \ell, \exists x \in S, x < a$.

(*ii.*)$'$ $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S, x < \ell + \varepsilon$.

Infimum koji je u skupu nazivamo **minimum**, tj. ako je $\ell = \inf S \in S$ onda je $\ell = \min S$.

Teorem

Neka je $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, odozdo ograničen skup. Tada postoji $\ell = \inf S \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Neka je $S_- = \{-x;\ x \in S\}$. Skup S je odozdo omeđen u $\mathbb{R}$, tj. postoji $m \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $\forall x \in S$, $m \leq x$. Tada je $\forall -x \in S_-$, $-x \leq -m$, tj. skup S_- je odozgo omeđen u $\mathbb{R}$. Prema A 15. postoji $L = \sup S_- \in \mathbb{R}$, tj. $\forall -x \in S_-$, $-x \leq L$ i $\forall \varepsilon > 0$, $\exists -x \in S_-$, $L - \varepsilon < -x$. To možemo napisati i na slijedeći način: $\forall x \in S$, $-L \leq x$ i $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in S$, $x < -L + \varepsilon$. To kazuje da je $\ell = -L = \inf S$, tj. postoji infimum skupa S. **Q.E.D.**

Zadatak

Neka je $A \subseteq B \subset \mathbb{R}$ i B ograničen skup. Tada je $\sup A \leq \sup B$ i $\inf A \geq \inf B$.

Rješenje: Svaka majoranta skupa B ujedno je i majoranta skupa A. Tako je i $\sup B$ majoranta za A. Pošto je supremum od A najmanja majoranta skupa A, to vrijedi $\sup A \leq \sup B$. Analogno, svaka minoranta skupa B ujedno je i minoranta skupa A, pa je infimum od B minoranta za A. Odatle za infimum skupa a kao najveću minorantu od A vrijedi $\inf A \geq \inf B$. $\square$

Aksiom A 15. karakterizira svojstvo potpunosti koje razlikuje polje $\mathbb{R}$ od polja $\mathbb{Q}$. Slijedeći teorem opisuje to svojstvo na prihvatljiviji način.

Teorem (O potpunosti)

Neka za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo segmente $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ takve da vrijedi $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $x \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Označimo s $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{b_n; n \in \mathbb{N}\}$. Skupovi A i B su ograničeni (odozdo s a_1 i odozgo s b_1) pa postoje $\sup A$ i $\inf B$. Želimo pokazati da vrijedi $[\sup A, \inf B] \subseteq [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Za sve $n \in \mathbb{N}$ očigledno vrijedi $a_n \leq b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$ i $b_{n+1} \leq b_n$. Dokažimo da vrijedi $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_m$. Ako je $n = m$ onda je to jasno. Ako je $n < m$, onda $n < n+1 < \cdots < m-1 < m$ povlači $a_n \leq \cdots \leq a_m \leq b_m$, tj. $a_n \leq b_m$. analogno vrijedi za $m < n$. Odatle zaključujemo $\forall n \in \mathbb{N}$ je a_n donja međa za skup B, dakle, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \inf B$. Sada je $\inf B$ gornja međa za skup A, pa vrijedi $\sup A \leq \inf B$. **Q.E.D.**

OBAVIJEST

web stranica kolegija je :

http://web.math.pmf.unizg.hr/˜rus/nastava/ma1/ma1

Konzultacije: Srijeda 10-12.

Kartezijeva ravnina

Uređeni par dva objekta a i b je uređen skup koji označavamo s (a, b) i kod kojeg je osim samih elemenata važno i na kojem se mjestu oni nalaze.

Dva uređena para (a, b) i (c, d) su jednaka, tj.

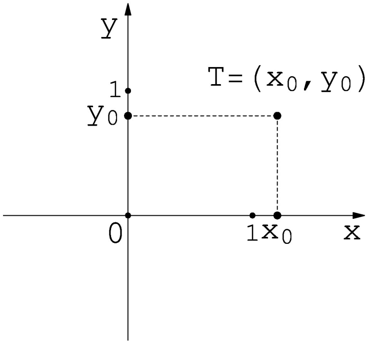
$$(a, b) = (c, d),$$

ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Kartezijev produkt dva skupa A i B je skup kojeg označavamo s $A \times B$, a sastoji se od svih uređenih parova (a, b), gdje je $a \in A$ i $b \in B$, tj.

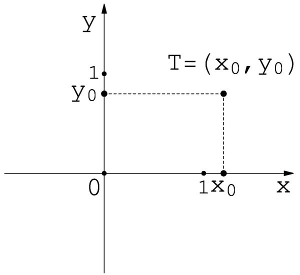
$$A \times B = \{(a, b);\ a \in A, b \in B\}.$$

Točke skupova $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ reprezentiraju se na brojevnom pravcu. kartezijev produkt prikazuje se u ravnini.



U ravnini nacrtamo dva okomita brojevna pravca i njihovom sjecištu pridružimo broj 0 na jednom i na drugom pravcu.

Ta dva pravca zovemo **koordinatne osi**.



Svakoj točki ravnine pridružujemo par realnih brojeva koji se dobiju tako da se nacrtaju pravci koji su paralelni sa koordinatnim osima.

Svakoj točki ravnine T smo pridružili uređeni par realnih brojeva (x_0, y_0) kojima je ta točka jednoznačno određena.

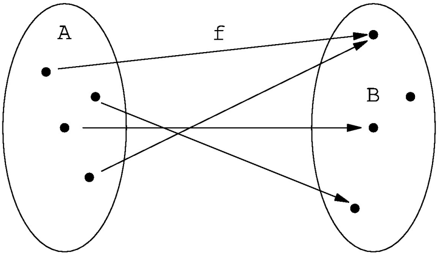
Ravninu s okomitim koordinatnim osima zovemo **Kartezijeva koordinatna ravnina** i možemo je poistovjetiti sa skupom

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

FUNKCIJE
Definicija funkcije

Definicija

Neka su A i B bilo koja dva neprazna skupa. **Funkcija** sa skupa A u skup B je pridruživanje elemenata skupa A elementima skupa B, tako da je **svakom** elementu iz A pridružen **točno jedan** element iz B. Tada pišemo $f : A \to B$, s tim da skup $\mathcal{D}(f) = A$ zovemo **područje definicije** ili **domena** funkcije f, skup $\mathcal{K}(f) = B$ nazivamo **područje vrijednosti** ili **kodomena** funkcije f.



Slika i graf

Slika funkcije f je skup $\mathcal{R}(f) = \{f(x);\ x \in A\} \subseteq B$.

Skup
$$\Gamma(f) = \{(x, f(x));\ x \in \mathcal{D}(f)\} \subseteq A \times B$$
je **graf funkcije** f.

Dvije funkcije $f : A \to B$ i $f : C \to D$ su **jednake** točno onda kada vrijedi

- $A = \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = C$,
- $B = \mathcal{K}(f) = \mathcal{K}(g) = D$ i
- $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$.

Funkcija g je **restrikcija** ili **suženje** funkcije f ako vrijedi

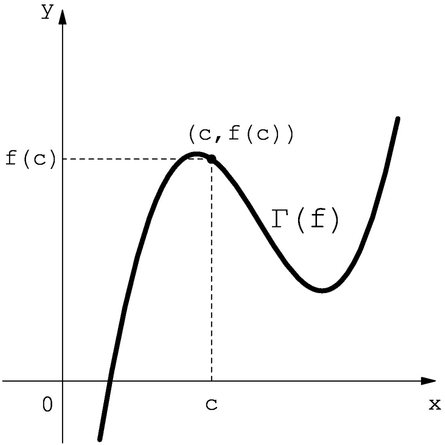
- $\mathcal{D}(g) \subseteq \mathcal{D}(f)$ i
- $\forall x \in \mathcal{D}(g),\ g(x) = f(x)$.

Tada pišemo $g = f|_{\mathcal{D}(g)}$.

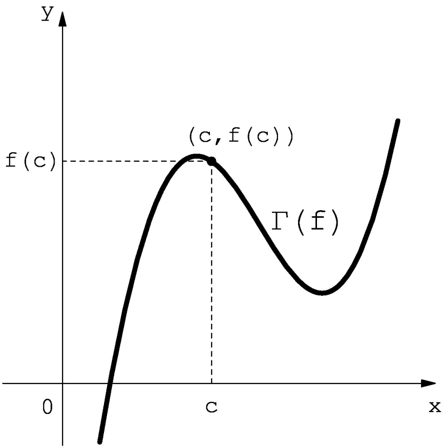
Također se kaže i da je f **proširenje** od g.

U slučaju kada je $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathcal{K}(f) \subseteq \mathbb{R}$, onda je graf $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$.

Graf možemo ga nacrtati u Kartezijevoj ravnini.



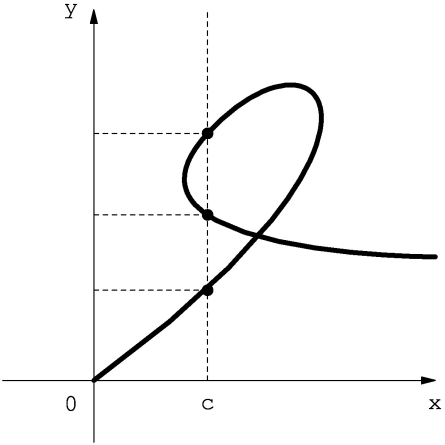
Graf funkcije $\quad \rightarrow \quad$ svaki pravac paralelan s osi ordinata siječe graf funkcije u najviše jednoj točki.



Za $c \in \mathcal{D}(f)$ postoji točno jedna točka na grafu oblika $(c, f(c))$, a onda je jedinstvena i točka $f(c)$ koja je pridružena točki c.

Točku $f(c)$ zovemo **slikom** točke c, a c zovemo **originalom** od $f(c)$.

Primjer krivulje u Kartezijevoj ravnini koja nije graf funkcije.



Injekcija, surjekcija i bijekcija
Injekcija

Definicija

Kažemo da je funkcija $f : A \to B$ **injekcija** ako vrijedi

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, ((x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))).$$

Ekvivalentni zapis gornjeg uvjeta:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, ((f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)).$$

Različiti elementi domene se preslikaju u različite elemente kodomene.

Surjekcija

Definicija

Kažemo da je funkcija $f : A \to B$ **surjekcija** ako vrijedi

$$\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A,\ (y = f(x)).$$

Funkcija je surjekcija ako je slika funkcije jednaka kodomeni funkcije:

$$\mathcal{R}(f) = B.$$

Ako znamo koji skup je slika funkcije, onda možemo jednostavno uzeti taj skup za kodomenu i postigli smo da je dana funkcija surjekcija.
U pravilu nije lako pogoditi skup koji je slika funkcije, a tada je još teže dokazati tu činjenicu.

Bijekcija

Definicija

Kažemo da je funkcija $f : A \to B$ **bijekcija** ili **f 1-1** ako je ona injekcija i surjekcija.

Bijekcija:

$$(\forall y \in B)\ (\exists! x \in A)\ (y = f(x)).$$

Za svaki element kodomene postoji i jedinstven je njegov original.

Kompozicija funkcija, inverzna funkcija

Kompozicija funkcija

Definicija

Neka su funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$. Ako je $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$, onda je formulom $h(x) = g[f(x)], \forall x \in A$, definirana funkcija $h : A \to D$. Tu funkciju nazivamo **kompozicijom** funkcija f i g, te koristimo oznaku $h = g \circ f$.

Kompozicija funkcija je asocijativna operacija.

Teorem

Neka su f,g,h tri funkcije. Ako su definirane kompozicije $g \circ f$, $h \circ g$, $h \circ (g \circ f)$ $(h \circ g) \circ f$, onda vrijedi $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Dokaz: Domene su jednake:

$$\mathcal{D}((h \circ g) \circ f) = \mathcal{D}(f)$$

i

$$\mathcal{D}(h \circ (g \circ f)) = \mathcal{D}(g \circ f) = \mathcal{D}(f).$$

Kodomene su jednake:

$$\mathcal{K}((h \circ g) \circ f) = \mathcal{K}(h \circ g) = \mathcal{K}(h)$$

i

$$\mathcal{K}(h \circ (g \circ f)) = \mathcal{K}(h).$$

Pravila pridruživanja su jednaka:
$\forall x \in \mathcal{D}(f)$,

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h\{g[f(x)]\} = (h \circ g)[f(x)] = [(h \circ g) \circ f](x).$$

Q.E.D.

Primjer. Kompozicija nije općenito komutativna operacija.

To vidimo na primjeru funkcija $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdje je

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 1 \\ g(x) &= x^2 + 2 \end{aligned}$$

Očito postoje funkcije $g \circ f,\ f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g\,(f(x)) = (f(x))^2 + 2 = (2x+1)^2 + 2 = \\ &= 4x^2 + 4x + 1 + 2\ pause = 4x^2 + 4x + 3 \\ (f \circ g)(x) &= f\,(g(x)) = 2g(x) + 1 = \\ &= 2(x^2+2) + 1 = 2x^2 + 4 + 1 = 2x^2 + 5 \end{aligned}$$

Očito je

$$4x^2 + 4x + 3 \neq 2x^2 + 5$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x + 1 \\
g(x) &= x^2 + 2
\end{aligned}
$$

Npr. za $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(0) &= g[f(0)] = g(1) = 3 \\
(f \circ g)(0) &= f[g(0)] = f(2) = 5
\end{aligned}
$$

Dakle

$$(g \circ f)(0) \neq (f \circ g)(0)$$

pa je

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Identiteta

Funkcija $i_A : A \to A$ definirana s

$$\forall x \in A, \quad i_A(x) = x$$

naziva se **identično preslikavanje** ili **identiteta**

Identitete $i_A : A \to A$ i $i_B : B \to B$ imaju svojstvo:

$$\forall f : A \to B, \quad i_B \circ f = f \quad \text{i} \quad f \circ i_A = f.$$

Napomena. i_A je desni, a i_B je lijevi neutralni element za operaciju $\circ$ i oni su općenito različiti.

Inverzna funkcija

Definicija

Neka je zadana funkcija $f : A \to B$. Kažemo da je funkcija $g : B \to A$ **inverzna funkcija** od funkcije f ako vrijedi

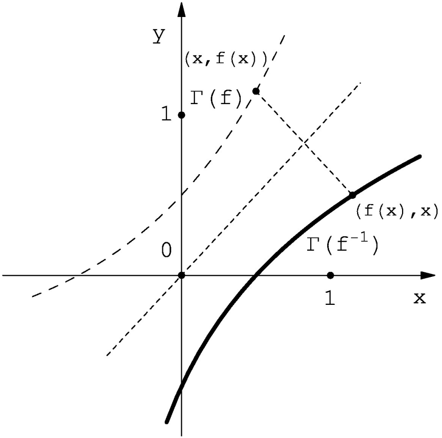
$$g \circ f = i_A \quad \text{i} \quad f \circ g = i_B,$$

odnosno,

$$\forall x \in A, \quad g[f(x)] = x \quad \text{i} \quad \forall y \in B, \quad f[g(y)] = y.$$

Tada koristimo oznaku $g = f^{-1}$.

Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, graf $\Gamma_{f^{-1}}$ funkcije f^{-1} simetričan je grafu Γ_f funkcije f s obzirom na pravac $y = x$



Lema

Ako postoji, inverzna funkcija je jedinstvena.

Dokaz: Neka je $f : A \to B$ i neka su g_1 i g_2 njene inverzne funkcije.

Tada je

$$\begin{aligned} g_1 \circ f &= i_A \quad \text{i} \quad f \circ g_1 = i_B, \\ g_2 \circ f &= i_A \quad \text{i} \quad f \circ g_2 = i_B. \end{aligned}$$

Sada je

$$g_1 = g_1 \circ i_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = i_A \circ g_2 = g_2$$

Q.E.D.

Teorem

Za funkciju $f : A \to B$ postoji inverzna funkcija $f^{-1} : B \to A$ ako i samo ako je f bijekcija.

Dokaz:

$\Rightarrow$

Neka postoji $f^{-1} : B \to A$.

$\Rightarrow$ Za svaki $y \in B$ postoji $x = f^{-1}(y)$ sa svojstvom

$$f(x) = f[f^{-1}(y)] = y$$

$\Rightarrow$ f je surjekcija.

Injektivnost:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow f^{-1}[f(x_1)] = f^{-1}[f(x_2)] \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

$\Rightarrow$ f je injekcija.

f je surjekcija i injekcija $\quad \Rightarrow \quad$ f je bijekcija.

$\Leftarrow$
Neka je f bijekcija.

$$(\forall y \in B)\ (\exists! x \in A)\ (y = f(x)).$$

Definirajmo pridruživanje $g : B \to A$:
y-u iz B pridružimo $x \in A$ takav da je $f(x) = y$.

g je funkcija - **svakom** elementu iz B smo pridružili **točno jedan** element iz A.

Funkcija $g : B \to A$ je dobro definirana.

$$\forall x \in A, \quad g[f(x)] = g(y) = x$$

$$\forall y \in B, \quad f[g(y)] = f(x) = y.$$

tj.

$$g \circ f = i_A \quad \text{i} \quad f \circ g = i_B,$$

$\Rightarrow \quad g = f^{-1}.$ **Q.E.D.**

Ekvipotentni skupovi

Kako ustanoviti da dva skupa imaju jednak broj elemenata?
Bez brojanja!

Konačni skup - sparivanje.

A i B - skupovi s konačnim brojem elemenata

Uzmimo element skupa A i element skupa B, sparimo ih.

Nastavimo li tako sparivati nesparene elemente skupa A s nesparenim elementima skupa B.

Nakon konačno koraka doći ćemo do:

1. Niti u skupu A, niti u skupu B nema nesparenih elemenata.
2. U skupu B nema nesparenih elemenata.
3. U skupu A nema nesparenih elemenata.

1. Niti u skupu A, niti u skupu B nema nesparenih elemenata.

   Konstruirali smo obostrano jednoznačno preslikavanje sa skupa A na skup B (bijekciju) i jasno je da skupovi A i B imaju jednak broj elemenata.

2. U skupu B nema nesparenih elemenata.

   Konstruirali smo injekciju sa skupa B u skup A i jasno je da skup A ima više elemenata od skupa B

3. U skupu A nema nesparenih elemenata.

   Konstruirali smo injekciju sa skupa A u skup B i jasno je da skup B ima više elemenata od skupa A.

Definicija

Za skupove A i B kažemo da imaju jednak broj elemenata, tj. da su **jednakobrojni** ili **ekvipotentni** ako postoji bijekcija $f : A \to B$.

Tada još kažemo da A i B imaju jednak kardinalni broj i pišemo $k(A) = k(B)$ ili $A \sim B$.

Ako postoji injekcija $f : A \to B$ onda kažemo da A ima manje ili jednako elemenata od B, tj. $k(A) \leq k(B)$.

Zadatak

Pokažite da je ekvipotentnost relacija ekvivalencije, tj. da vrijedi

(*i*) $A \sim A$,

(*ii*) $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$,

(*iii*) $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$.

Rješenje:

(*i*) Identiteta $i_A : A \to A$ je bijekcija,

(*ii*) $f : A \to B$ bijekcija $\Rightarrow (f^{-1} : B \to A)$ bijekcija,

(*iii*) $f : A \to B \wedge g : B \to C$ bijekcije $\Rightarrow g \circ f : A \to C$ je bijekcija. $\square$

Slijedeći teorem u konkretnim situacijama bitno olakšava utvrđivanje ekvipotentnosti skupova, a navodimo ga bez dokaza.

Teorem (Cantor-Bernstein-Banach)

Ako postoje injekcije $f : A \to B$ i $g : B \to A$, onda je $A \sim B$, odnosno

$$((k(A) \leq k(B)) \wedge (k(B) \leq k(A))) \Rightarrow (k(A) = k(B)).$$

Definicija

Kažemo da je beskonačan skup S **prebrojiv** ako je ekvipotentan skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. U suprotnom slučaju kažemo da je taj skup **neprebrojiv**.

Zadatak

Pokažite da vrijedi

1. $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$.
2. $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} + 1$.
3. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.
4. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, je

   $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle$ i $[a, b] \sim [c, d]$.
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je $[a, b] \sim \langle a, b \rangle$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je $\mathbb{R} \sim \langle a, b \rangle$.
7. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Rješenje:

1. $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$.

   Preslikavanje $n \mapsto 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, je bijekcija.

2. $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} + 1$.

   Preslikavanje $n \mapsto 2n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, je bijekcija.

3. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

   Preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definirano s $f(2n) = n + 1$, $f(1) = 0$ i $f(2n + 1) = -n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ je bijekcija.

4. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, je

   $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle$ i $[a, b] \sim [c, d]$.

   $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ definirano s
   $$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$$
   je bijekcija.

5. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je $[a, b] \sim \langle a, b \rangle$.

Identiteta je injekcija s $\langle a, b \rangle$ u $[a, b]$.

Po 4. postoji bijekcija s $[a, b]$ na bilo koji segment u $\langle a, b \rangle$,

npr. na $[\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}]$.

Tada je to injekcija s $[a, b]$ u $\langle a, b \rangle$.

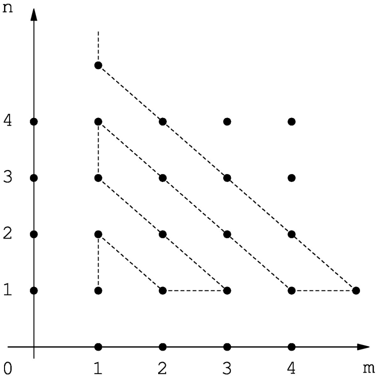
$\Rightarrow$ po teoremu 8 slijedi tvrdnja.

6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je $\mathbb{R} \sim \langle a, b \rangle$.

$Tg^{-1} : \mathbb{R} \to \langle a, b \rangle$ je bijekcija.

7. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Konstruiramo preslikavanje $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kako je grafički prikazano na slici:



Svakom uređenom paru prirodnih brojeva jednoznačno je određen poredak na putanji označenoj na slici.

Funkcija f je definirana formulom:

$$f((m,n)) = \begin{cases} \binom{m+n-1}{2} + n; m+n-1 \text{ neparan} \\ \binom{m+n-1}{2} + m;\ \ m+n-1 \text{ paran} \end{cases}$$

Propozicija

Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.

Dokaz: Skup

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}, \text{su relativno prosti}\},$$

pa postoji injekcija sa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Komponiramo tu injekciju s bijekcijom sa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$ iz prošlog zadatka i dobijemo injekciju s $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{N}$.

Identiteta je injekcija s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{Q}$

Po teoremu 8 je $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. **Q.E.D.**

Propozicija

Neprazan podskup prebrojivog skupa je konačan ili prebrojiv.

Teorem

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Segment* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *je neprebrojiv skup.*

Korolar

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ *je neprebrojiv.*

Monotonost i parnost
Monotonost

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Promatramo **realne** funkcije $f : I \to \mathbb{R}$.

Definicija

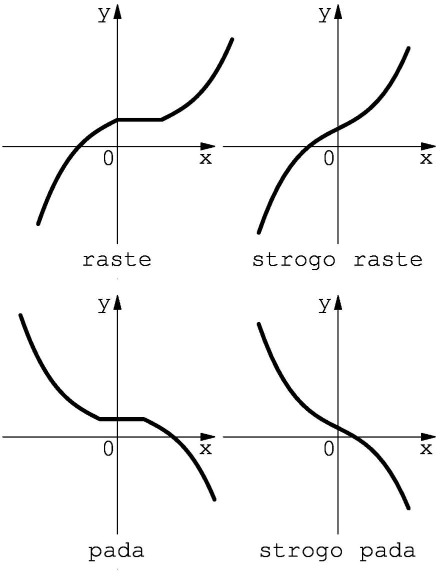
Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je:

1. **rastuća** na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, ako
$$(\forall x_1, x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2)),$$
2. **strogo rastuća** na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, ako
$$(\forall x_1, x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2)),$$
3. **padajuća** na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, ako
$$(\forall x_1, x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

4. **strogo padajuća** na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, ako

$$(\forall x_1, x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2)).$$

Za takve funkcije kažemo da su **monotone**, odnosno, **strogo monotone**.

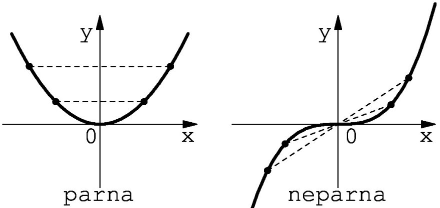

y
0
x
raste
y
0
x
strogo raste
y
0
x
pada
y
0
x
strogo pada

Parnost

Definicija

Za funkciju $f : \langle -a, a \rangle \to \mathbb{R}$ kažemo da je:

1. **parna** na intervalu $\langle -a, a \rangle \subseteq \mathbb{R}$, ako
$$(\forall x \in \langle -a, a \rangle), \quad f(-x) = f(x)),$$
2. **neparna** na intervalu $\langle -a, a \rangle \subseteq \mathbb{R}$, ako
$$(\forall x \in \langle -a, a \rangle), \quad f(-x) = -f(x)).$$



Linearna funkcija

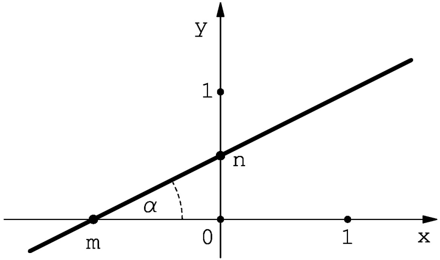
Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanu formulom

$$f(x) = k \cdot x + l, \quad x \in \mathbb{R},$$

zovemo **linearnom funkcijom**.

Napomena. Ovaj naziv nije u skladu s definicijom linearnosti u linearnoj algebri.

- Graf funkcije je pravac $y = k \cdot x + l$.



- Broj $k = \text{tg}\,\alpha$ u formuli je **koeficijent smjera**
- broj l je točka na osi y u kojoj pravac siječe os.

Nekoliko činjenica koje se uče o pravcima u srednjoj školi.

i. Jednadžba pravca koji prolazi točkom $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ i koji ima zadan koeficijent smjera k je

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

ii. Jednadžba pravca koji prolazi točkama $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \neq x_1$, je

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0.$$

iii. Normalna jednadžba pravca je

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

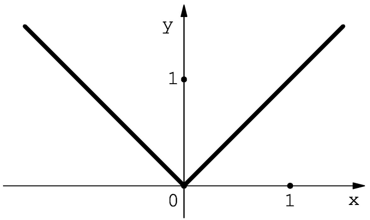
gdje su m, n točke u kojima pravac siječe osi x i y.

Apsolutna vrijednost i udaljenost

- mjerenje udaljenosti među objektima (brojevima).

Za realne brojeve koristimo funkciju koju zovemo **apsolutna vrijednost** realnog broja:

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$



Iz definicije funkcije za svaki $a \in \mathbb{R}$ slijedi nejednakost

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

Često je potrebno provjeriti nejednakost

$$|x| \leq \varepsilon,$$

gdje je $\varepsilon \geq 0$ realan broj.
Ta nejednakost je ekvivalentna s dvije nejednakosti

$$-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon.$$

Teorem

Za funkciju apsolutna vrijednost vrijedi

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{R}, \quad |a+b| \leq |a| + |b|$. *(nejednakost trokuta)*
2. $\forall\ a, b \in \mathbb{R}, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Dokaz: 1. Iz nejednakosti

$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$

zbrajanjem dobijemo

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

što daje 1.

2. Gledamo četiri slučaja:

i) $a \geq 0, b \geq 0$,
ii) $a \geq 0, b \leq 0$,
iii) $a \leq 0, b \geq 0$,
iv) $a \leq 0, b \leq 0$.

U slučaju i) je

$$|a| = a, |b| = b$$

pa je

$$|a||b| = ab = |ab|.$$

U slučaju ii) je

$$ab \leq 0$$

pa je

$$|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$$

itd. **Q.E.D.**

Nejednakost

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

možemo poopćiti na sumu od konačno realnih brojeva $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Zadatak

Dokazati prethodnu nejednakost matematičkom indukcijom.

Korolar

Za bilo koje $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$||a| - |b|| \le |a - b|. \tag{5}$$

Dokaz: Vrijedi

$$|a| = |(a-b) + b| \le |a-b| + |b| \quad \Rightarrow \quad |a| - |b| \le |a-b|.$$

Zamjenom a sa b dobijemo

$$|b| = |(b-a)+a| \le |b-a| + |a| = |a-b| + |a| \quad \Rightarrow \quad |b| - |a| \le |a-b|.$$

$$\Rightarrow \quad -|a-b| \le |a| - |b|$$

$$\Rightarrow \quad -|a-b| \le |a| - |b| \le |a-b|,$$

Odavdje slijedi nejednakost (5). **Q.E.D.**

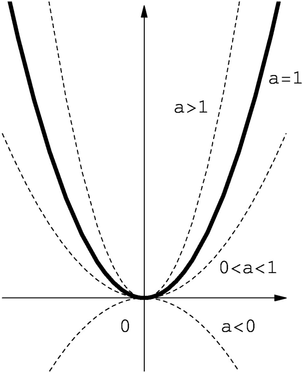
Kvadratna funkcija

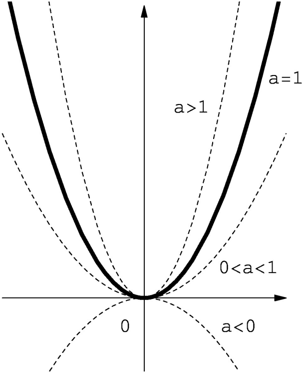
Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanu formulom

$$f(x) = ax^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

zovemo **kvadratna funkcija**.

Graf funkcije f je parabola.





- $a > 0 \quad \Rightarrow \quad$ funkcija ima minimum jednak 0 u točki $x_0 = 0$,
- $a < 0 \quad \Rightarrow \quad$ 0 je maksimum za $x_0 = 0$.
- Točku $T = (0, 0)$ na grafu zovemo tjeme parabole.

Opća kvadratna funkcija

Opća kvadratna funkcija je zadana formulom

$$f(x) = ax^2 + bx + c = .$$

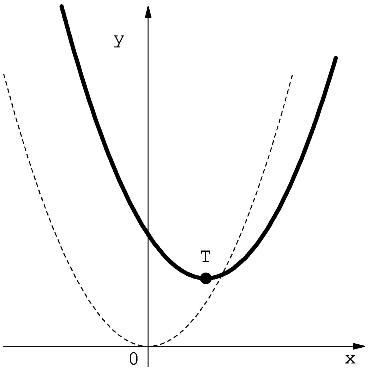
Može se zapisati u obliku

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

$\Rightarrow$ Tjeme parabole je u točki $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$,
gdje je broj $D = b^2 - 4ac$ **diskriminanta** kvadratne funkcije.

- $D < 0 \quad \Rightarrow \quad$ funkcija ne siječe os x (nema realne nultočke).
- $D \geq 0 \quad \Rightarrow \quad$ funkcija ima nultočke $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Graf opće kvadratne funkcije



Razlomljene linearne funkcije

Razlomljena linearna funkcija je zadana formulom

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Prirodno područje definicije te funkcije je skup

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\},$$

a slika je

$$\mathcal{R}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\},$$

tj.

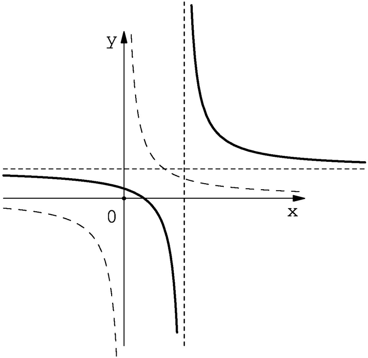
$$f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}.$$

Funkciju je moguće prikazati u obliku $\quad f(x) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$,

$\Rightarrow$ graf funkcije f moguće je dobiti translacijom grafa istostrane hiperbole

$$h(x) = \frac{\alpha}{x}, \quad \left(\alpha = \frac{bc-ad}{c^2}\right)$$

Potrebno je ishodište $(0,0)$ translatirati u točku $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$.



Polinomi

Polinom stupnja $n \in \mathbb{N}$ je funkcija zadana formulom

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_n \neq 0$.

Pišemo $\quad \mathrm{st}\, P_n = n$.

Prirodno područje definicije polinoma kao realne funkcije je skup $\mathbb{R}$, tj. $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ako je $\mathrm{st}\, P_n \geq \mathrm{st}\, Q_m$, onda P_n možemo prikazati u obliku

$$P_n(x) = P_{n-m}(x) Q_m(x) + R_p(x),$$

gdje je $\mathrm{st}\, R_p < \mathrm{st}\, Q_m$ i $\mathrm{st}\, P_{n-m} = \mathrm{st}\, P_n - \mathrm{st}\, Q_m$.

Ako je α realna nultočka polinoma P_n $(P_n(\alpha) = 0)$ $\Rightarrow$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - \alpha) + r,$$

gdje je ostatak r polinom stupnja 0, tj. konstanta. $\Rightarrow$

Iz $0 = P_n(\alpha) = r$ slijedi

$$P_n(x) = (x - \alpha)P_{n-1}(x).$$

$P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (polinom s realnim koeficijentima) možemo shvatiti i kao polinom $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Tada vrijedi $\overline{P_n(x)} = P_n(\overline{x})$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

Ako je $z \in \mathbb{C}$ nultočka od P_n, onda je i $\overline{z}$ nultočka:

$$0 = \overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z}).$$

Ako su z i $\bar{z}$ nultočke od P_n $\Rightarrow$ P_n je djeljiv s $x - z$ i $x - \bar{z}$,

$\Rightarrow$ P_n je djeljiv s

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = x^2 - 2\mathrm{Re}(z)x + |z|^2$$

Ovo je polinom s realnim koeficijentima.

Svaki polinom nad $\mathbb{C}$ može rastaviti na produkt linearnih polinoma ("osnovni teorem algebre").

$\Rightarrow$ Polinom s realnim koeficijentima može se faktorizirati u obliku:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_p)^{k_p}(x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \cdots (x^2 + b_mx + c_m)^{l_m},$$

gdje je

$$n = k_1 + \cdots + k_p + 2(l_1 + \cdots + l_m).$$

Racionalne funkcije

Racionalna funkcija je zadana formulom

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdje su P, Q polinomi nad $\mathbb{R}$.

Prirodno područje definicije racionalne funkcije je skup $\mathbb{R}$ bez nultočaka nazivnika Q.

Broj nultočaka je manji ili jednak stupnju polinoma Q

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \cdots, x_n\},$$

gdje je $Q(x_k) = 0$, $(k = 1, \ldots, n)$.

Racionalna funkcija je **prava racionalna** funkcija ako je stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja polinoma u nazivniku.

Svaku racionalnu funkciju je moguće prikazatiu obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad \mathrm{st}\, R < \mathrm{st}\, Q$$

Propozicija

Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ strogo monotona na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada je ona injekcija.

Dokaz: Neka je funkcija strogo rastuće na I.

Uzmimo bilo koje

$$x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \neq x_2.$$

$\Rightarrow \quad x_1 < x_2 \quad$ ili $\quad x_2 < x_1$.

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$

$$x_2 < x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1),$$

$\Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$ **Q.E.D.**

Propozicija

Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ strogo rastuća (padajuća) surjekcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada ona ima inverznu funkciju koja je strogo rastuća (padajuća) na $\mathcal{R}(f)$.

Dokaz:

Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ strogo rastuća surjekcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$

strogo rastuća $\Rightarrow$ injekcija

injekcija i surjekcija $\Rightarrow$ bijekcija $\Rightarrow$ postoji $f^{-1} : \mathcal{R}(f) \to I$.

Pokažimo da za bilo koje $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(f)$,

$$(y_1 < y_2) \Rightarrow (f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)).$$

U suprotnom bi vrijedilo da postoje

$$y_1, y_2 \in \mathcal{R}(f), \quad y_1 < y_2, \quad \text{i} \quad f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(y_1).$$

U suprotnom bi vrijedilo da postoje

$$y_1, y_2 \in \mathcal{R}(f), \quad y_1 < y_2, \quad \text{i} \quad f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(y_1).$$

Jer je f strogo rastuća:

$$f[f^{-1}(y_2)] < f[f^{-1}(y_1)] \quad \Leftrightarrow \quad y_2 < y_1,$$

što je suprotno pretpostavci. **Q.E.D.**

Primjer

Linearna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = kx + l, \quad k \neq 0,$$

je bijekcija.

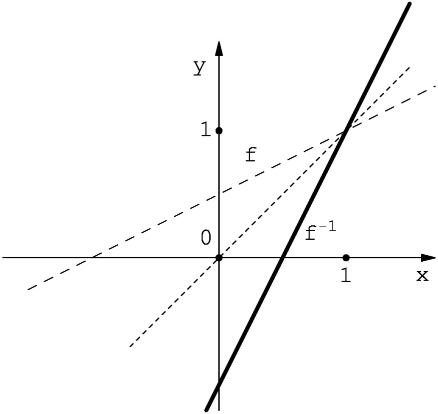
Naime, za bilo koji $y \in \mathbb{R}$ postoji jedinstven

$$x = \frac{y - l}{k} \in \mathbb{R}.$$

Iz ovoga je vidljivo da vrijedi

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{k}x - \frac{l}{k}.$$

Grafovi od f i f^{-1} su simetrični na pravac $y = x$.



Primjer

Razlomljena linearna funkcija zadana formulom

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ima inverznu funkciju zadanu formulom

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a},$$

koja je isto razlomljena linearna funkcija.

Lako se vidi da je skup svih razlomljenih linearnih funkcija (nekomutativna) grupa s obzirom na kompoziciju kao grupnu operaciju i identitetu ($a = d = 1, c = b = 0$) kao neutralni element.

Korijeni

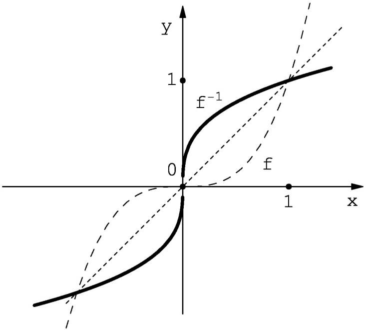
Neparne potencije su funkcije zadane formulom

$$f(x) = x^{2n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Neparne potencije su bijekcije s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Imaju inverze: $\sqrt[2n+1]{x} = f^{-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$, **neparne korijene**.

Neparni korijeni su neparne i strogo rastuće funkcije na $\mathbb{R}$.



Parne potencije zadane formulom

$$f(x) = x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

su parne funkcije $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$.

$\Rightarrow$ Nisu injekcije i nemaju inverze.

Njihove restrikcije

$$f_+ = f|_{[0,+\infty\rangle}$$

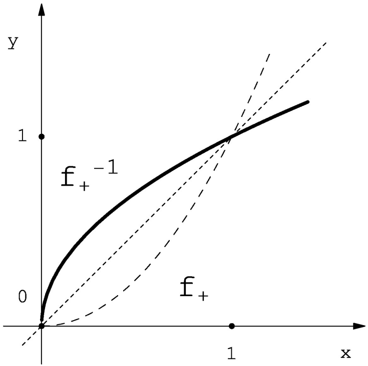
su strogo rastuće bijekcije

$$f_+ : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle.$$

One imaju inverzne funkcije

$$f_+^{-1} : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle.$$

$$\sqrt[2n]{x} = f_+^{-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$


y
1
0
f_+^{-1}
f_+
1
x

Eksponencijalna funkcija

Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i $a \neq 1$. Definiramo:

$$a^1 = a$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definirali smo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$:

$$f(n) = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jer je

$$a^{n+m} = a^n a^m,$$

funkcija f zadovoljava

$$f(n+m) = f(n)f(m), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proširimo funkciju f na $\mathbb{Z}$ tako da zadovoljava ovaj uvjet. Iz

$$a = f(1) = f(1+0) = f(1)f(0) = af(0)$$

slijedi da mora biti

$$f(0) = 1 \quad \text{tj.} \quad a^0 = 1.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$1 = f(0) = f(n-n) = f(n)f(-n)$$

pa je

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)} \quad \text{tj.} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ zadovoljava:

(*i*) $f(0) = 1$, $f(1) = a$,

(*ii*) $f(n+m) = f(n)f(m), \forall\, n, m \in \mathbb{Z}$.

Proširimo funkciju f na skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ tako da uvjeti (i)–(ii) budu zadovoljeni.

Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$a = f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}n\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

pa je

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a} \quad \text{tj.} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Neka je $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, gdje su $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$:

$$f(q) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}m\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Tako smo dobili funkciju $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$.

Provjerimo da f zadovoljava svojstvo (ii):

$$f(q+q') = f(q)f(q'), \quad \forall\, q, q' \in \mathbb{Q}.$$

Naime, za

$$q = \frac{m}{n} \quad \text{i} \quad q' = \frac{m'}{n'}$$

je

$$\begin{aligned} f(q+q') &= f\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right) = f\left(\frac{mn' + m'n}{nn'}\right) = \\ &= \sqrt[nn']{a^{mn'+m'n}} = \sqrt[nn']{a^{mn'}}\,\sqrt[nn']{a^{m'n}} = \\ &= \sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n']{a^{m'}} = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(\frac{m'}{n'}\right) = f(q)f(q'). \end{aligned}$$

Za $a > 1$ funkcija $f : \mathbb{Q} \to \langle 0, +\infty \rangle$ je strogo rastuća na $\mathbb{Q}$.

Uzmimo

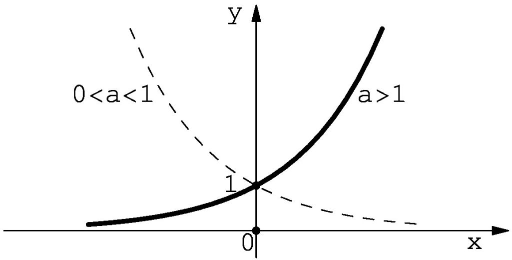
$$q = \frac{m}{n},\ q' = \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q}, \quad q < q', \quad \text{tj.} \quad mn' < m'n.$$

Jer je $n \mapsto a^n$ strogo rastuća na $\mathbb{Z}$:

$$\Rightarrow \quad a^{mn'} < a^{m'n}.$$

Funkcija $x \mapsto \sqrt[nn']{x}$ je strogo rastuća na $\mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[nn']{a^{mn'}} < \sqrt[nn']{a^{m'n}}, \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n']{a^{m'}}, \quad \Rightarrow \quad f(q) < f(q').$$



Teorem

Postoji točno jedna bijekcija $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ tako da vrijedi

$$f(0) = 1, \quad f(1) = a > 0$$

i

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bijekciju iz teorema zovemo **eksponencijalna funkcija** s bazom a i označavamo s

$$f(x) \; = \; \exp_a(x) \; = a^x$$

Sada funkcionalna jednadžba ima zapis

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadatak

Neka su $A, B \subset \mathbb{R}$ odozgo ograničeni neprazni skupovi. Tada je skup

$$A + B = \{x + y \; ; \; x \in A, y \in B\}$$

odozgo ograničen i vrijedi

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Zadatak

Neka su $A, B \subset \langle 0, +\infty \rangle$ odozgo ograničeni neprazni skupovi. Tada je skup

$$AB = \{xy \; ; \; x \in A, y \in B\}$$

odozgo ograničen i vrijedi

$$\sup(AB) = \sup A \sup B.$$

Sada eksponencijalnu funkciju proširujemo do funkcije $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$.

Za $a > 1$ i $x \in \mathbb{R}$ definiramo

$$f(x) = \sup\{a^q; q \in \mathbb{Q}, q < x\}.$$

Zbog zadatka imamo

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \sup\{a^q \ : : q \in \mathbb{Q}, q < x\} \sup\{a^{q'}; q' \in \mathbb{Q}, q' < y\} = \\ &= \sup\{a^{q+q'}; q, q' \in \mathbb{Q}, q < x, q' < y\} = \\ &= \sup\{a^{q+q'}; q, q' \in \mathbb{Q}, q + q' < x + y\} = \\ &= f(x + y). \end{aligned}$$

Logaritamska funkcija

Eksponencijalna funkcija ima inverznu funkciju $f^{-1} : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ koja je

- strogo rastuća za $a > 1$
- strogo padajuća za $0 < a < 1$.

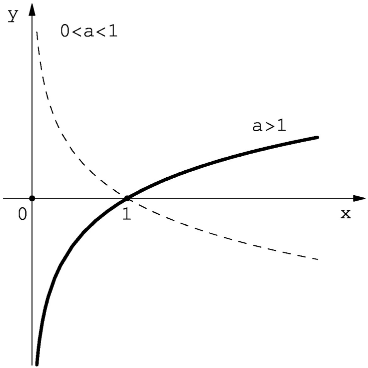
Tu funkciju zovemo **llogaritamska funkcija** s bazom a i označavamo s

$$f^{-1}(x) = \log_a x, \quad \forall x \in \langle 0, +\infty\rangle.$$

Vrijedi

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{i} \quad \log_a a = 1, \quad \forall a > 0,\ a \neq 1.$$

Graf logaritamske funkcije



Funkcionalna jednadžba za logaritamsku funkciju ima oblik

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall x, y \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

To slijedi iz injektivnosti eksponencijalne funkcije i

$$a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Zadatak

Za $a, b > 0$ dokazati da vrijedi

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \ \forall x \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Rješenje: Formula slijedi iz injektivnosti eksponencijalne funkcije i

$$b^{\log_b x} \ = \ x \ = \ a^{\log_a x} \ = \ b^{\log_b a^{\log_a x}} \ = \ b^{\log_a x \log_b a}.$$

Za $a = e \approx 2.71828182$ označavamo $\log_e = \ln$ i zovemo **prirodni logaritam**.

Za $a = 10$ pišemo $\log_{10} = \log$ i zovemo **Briggsov** ili **dekadski logaritam**.

Sada je moguće definirati **opću potenciju** $f : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$ kao funkciju zadanu formulom

$$f(x) = x^\alpha \stackrel{def}{=} e^{\alpha \ln x}.$$

Hiperbolne i area funkcije
Hiperbolne funkcije

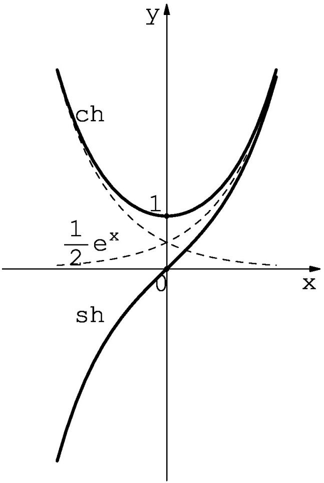
Pomoću eksponencijalne funkcije definiramo **hiperbolne funkcije**:

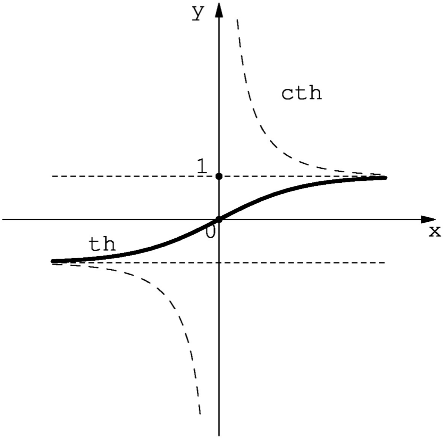
$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(sinus hiperbolni)},$$

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(kosinus hiperbolni)},$$

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(tangens hiperbolni)},$$

$$\mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \textbf{(kotangens hiperbolni)}.$$





Funkcije sh, th, cth su neparne, a ch je parna funkcija.

Osnovna formula koja vrijedi za hiperbolne funkcije je

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

Slijedi iz definicija za ch i za sh:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Također vrijede adicione formule

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y, \\ \mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y. \end{aligned}$$

Za primjer pokažimo:

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y &= \frac{1}{4}\left[\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^y + e^{-y}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^y - e^{-y}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right) = \mathrm{sh}(x+y). \end{aligned}$$

Funkcije sh, ch i th strogo rastu na $[0, +\infty\rangle$,
a cth strogo pada na $\langle 0, +\infty\rangle$.

e^x i $-e^{-x}$ strogo rastu $\quad\Rightarrow\quad$ sh je suma strogo rastućih funkcija
$\Rightarrow\quad$ sh je strogo rastuća funkcija na $\mathbb{R}$.

Iz

$$\mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x \geq 1$$

slijedi da je $\mathcal{R}(\mathrm{ch}) \subseteq [1, +\infty\rangle$.

Za $x, y > 0$ je

$$\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y > \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y > \mathrm{ch}x,$$

pa ch strogo raste na $[0, +\infty\rangle$.

Zbog parnosti ch strogo pada na $\langle -\infty, 0]$.

Za $x, y > 0$ je

$$\mathrm{th}(x+y) - \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}(x+y)\mathrm{ch}x - \mathrm{ch}(x+y)\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}(x+y)\mathrm{ch}x} = \frac{\mathrm{sh}(2x+y)}{\mathrm{ch}(x+y)\mathrm{ch}x} > 0,$$

tj.

$$\mathrm{th}x < \mathrm{th}(x+y),$$

$\Rightarrow$ th strogo raste na $\mathbb{R}_+$, $\Rightarrow$ a zbog neparnosti strogo raste i na $\mathbb{R}$.

Nadalje, zbog

$$\mathrm{cth}x = \frac{1}{\mathrm{th}x}$$

slijedi da cth strogo pada na $\langle 0, +\infty\rangle$.

Zbog neparnosti je cth strogo padajuća i na $\langle -\infty, 0\rangle$.

Odatle i iz propozicije. slijedi da su navedene funkcije injekcije.

Uz pretpostavku da je $\mathcal{R}(\exp) = \langle 0, +\infty\rangle$ (dokazati ćemo kasnije), možemo dokazati da su funkcije

- $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$,
- $\mathrm{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ i
- $\mathrm{ch}|_{[0,+\infty\rangle} = \mathrm{Ch} : [0, +\infty\rangle \to [1, +\infty\rangle$

bijekcije.

Neka je $y \in \mathcal{R}(\mathrm{sh})$, tj.

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad y = \mathrm{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Tada je

$$e^x - e^{-x} - 2y = 0$$

Uz zamjenu $u = e^x$ dobijemo jednadžbu

$$u^2 - 2yu - 1 = 0.$$

Moguće rješenja su

$$u = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Zbog $u = e^x > 0$ jedino rješenje je

$$u = e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Odatle je

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

gdje je funkcija

$$y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

definirana na $\mathbb{R}$.

Sada uzmimo bilo koji $y \in \mathbb{R}$ i neka je

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Jasno je da odatle slijedi

$$y = \operatorname{sh} x, \qquad \text{tj.} \quad \mathcal{R}(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ Inverzna funkcija $\operatorname{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definirana formulom

$$\operatorname{sh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Neka je $y \in \mathcal{R}(\text{th}) \subseteq \langle -1, 1\rangle$, tj.

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad y = \text{th}x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

$$\Rightarrow \quad (1 - y)e^{2x} = 1 + y,$$

odnosno

$$x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right).$$

Kao u prethodnom slučaju zaključujemo $\quad \mathcal{R}(\text{th}) = \langle -1, 1\rangle$

i inverzna funkcija $\text{th}^{-1} : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ definirana je formulom

$$\text{th}^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right), \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Zbog

$$\mathrm{cth}x = \frac{1}{\mathrm{th}x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

je

$$\mathcal{R}(\mathrm{cth}) = \left\{ \frac{1}{t}; t \in \langle -1, 1 \rangle \right\} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Također slijedi da je

$$\mathrm{cth}^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

zadana formulom

$$\mathrm{cth}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Neka je

$$y \in \mathcal{R}(\mathrm{Ch}) \subseteq [1, +\infty\rangle,$$

tj. $\exists x \in [0, +\infty\rangle$,

$$y = \mathrm{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Tada dobijemo jednadžbu

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0,$$

odnosno

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

$$x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad e^x \geq 1$$

pa je jedino rješenje

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1},$$

tj.

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

Odatle dobivamo

$$\mathcal{R}(\mathrm{Ch}) = [1, +\infty\rangle$$

i funkcija $\mathrm{Ch}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definirana formulom

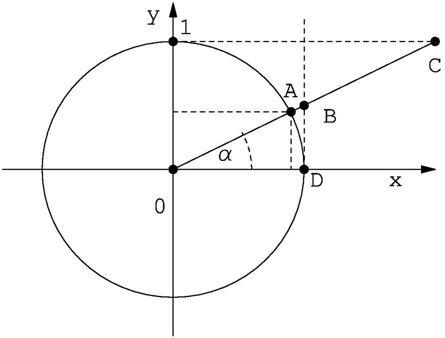
$$\mathrm{Ch}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \forall x \in [1, +\infty\rangle.$$

Inverzi hiperbolnih funkcija nazivaju se **area funkcije**.

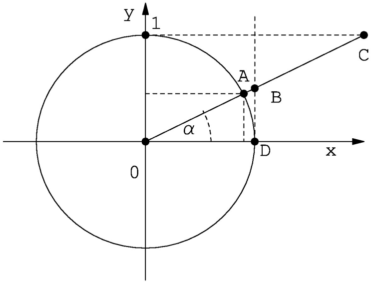
Još se koriste oznake

$$\begin{aligned} \mathrm{arsh} &= \mathrm{sh}^{-1} \\ \mathrm{arch} &= \mathrm{Ch}^{-1} \\ \mathrm{arth} &= \mathrm{th}^{-1} \\ \mathrm{arcth} &= \mathrm{cth}^{-1} \end{aligned}$$

Trigonometrijske i arkus funkcije
Trigonometrijske funkcije



Neka je u Kartezijevom koordinatnom sustavu zadana kružnica polumjera 1 (**trigonometrijska kružnica**)
i na njoj središnji kut α s vrhom u ishodištu, a prvi krak mu je pozitivni dio osi *x*.



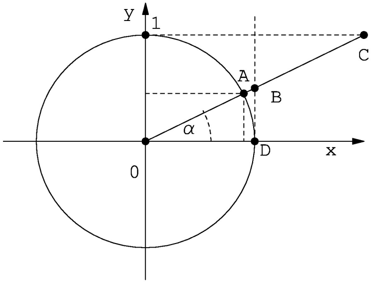
Kutu α pridružujemo realan broj koji odgovara duljini luka na kružnici koji odsjecaju krakovi kuta α.

Ako je drugi krak odmaknut od prvoga u pozitivnom smjeru (suprotnom od smjera kazaljke na satu), onda je kut pozitivan,

a u suprotnom je negativan.

Tu mjeru kuta nazivamo **radijan**.

Npr, puni kut je 2π radijana; pravi kut je $\frac{\pi}{2}$ radijana.



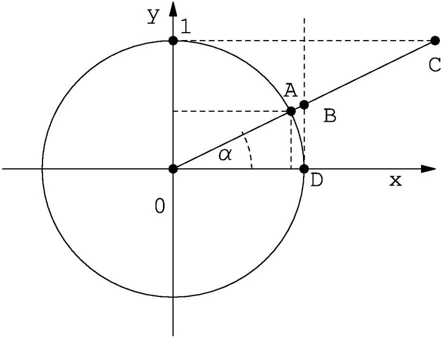
Pridruživanje koje realnim brojevima koji odgovaraju radijanima pripadnih središnjih kutova pridružuje točke jedinične kružnice K, $\alpha_0 : [0, 2\pi\rangle \to K$, je bijekcija.

Tu funkciju je moguće proširiti do funkcije $\alpha : \mathbb{R} \to K$,

$$\alpha(x) = \alpha_0(r_x),$$

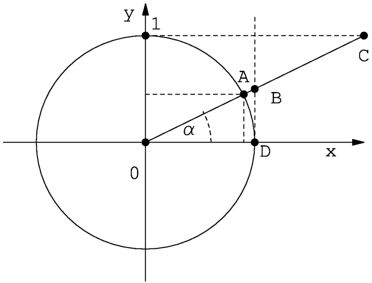
gdje je

$$x = 2k\pi + r_x, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r_x < 2\pi.$$



Geometrijski definiramo trigonometrijske funkcije

- sinus (sin),
- kosinus (cos),
- tangens (tg) i
- kotangens (ctg)



tako da pridružimo koordinate

- $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$,
- $B = (1, \operatorname{tg}\alpha)$ i
- $C = (\operatorname{ctg}\alpha, 1)$.

Iz sličnosti pripadnih pravokutnih trokuta vrijedi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Definicija

Za funkciju $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ kažemo da je **periodička** perioda $\tau > 0$ ako vrijedi

1) $\forall x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow x + \tau \in \mathcal{D}(f)$,
2) $f(x + \tau) = f(x), \forall x \in \mathcal{D}(f)$.

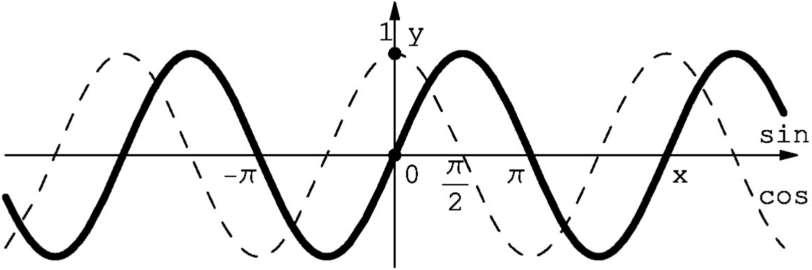
Ako postoji najmanji period $\tau_0 > 0$ onda njega zovemo **temeljni period** funkcije f.

$\tau > 0$ period funkcije $f \quad \Rightarrow \quad n\tau$ je također period od f, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Napomena. Postoje periodičke funkcije koje nemaju temeljnog perioda kao npr. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = 1 \quad \text{za } x \in \mathbb{Q} \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \quad \text{za } x \notin \mathbb{Q}.$$

Svaki $\tau \in \mathbb{Q}_+$ je njen period, pa taj skup nema minimum veći od 0.



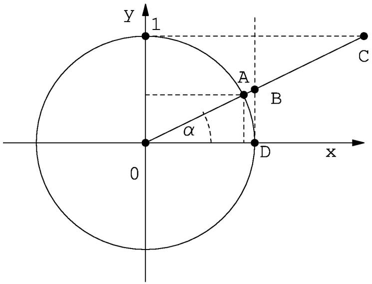
Funkcije $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ i $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ su periodičke s temeljnim periodom 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{i} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Iz slike je jasno da vrijedi $\quad \sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}), \quad \forall x \in \mathbb{R},$

odnosno, $\quad \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

sin je neparna, a cos parna funkcija.



$$A = (\cos x, \sin x)$$

Sa trigonometrijske kružnice je vidljivo da vrijedi

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

što je osnovna trigonometrijska jednakost.

Osnovni adicioni teorem za funkciju kosinus:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Adicioni teorem za funkciju sinus:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Iz prethodnih formula lako dobijemo

$$\begin{aligned}
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)],\\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)],\\
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)].
\end{aligned}$$

Funkcije

$$\text{tg}\ : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

i

$$\text{ctg}\ : \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

imaju osnovni period π.

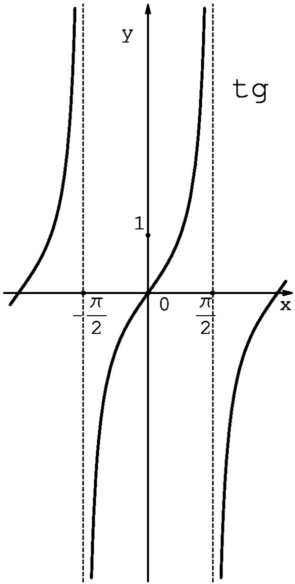
To slijedi iz

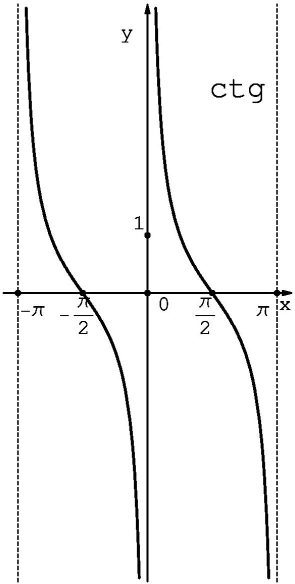
$$\text{tg}\ (x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \text{tg}\ x$$

i

$$\text{ctg}\ x = \frac{1}{\text{tg}\ x}.$$

Funkcije tg i ctg su neparne.


y
tg
1
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
x


y
ctg
1
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x

Arkus funkcije

Periodičke funkcije nisu injekcije $\quad \Rightarrow \quad$ nemaju inverzne funkcije.

Njihove restrikcije na dijelove područja definicije na kojem su strogo monotone, jesu injekcije.

Tako definiramo

- $\text{Sin} = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$,
- $\text{Cos} = \cos|_{[0,\pi]}$,
- $\text{Tg} = \text{tg}|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$,
- $\text{Ctg} = \text{ctg}|_{\langle 0,\pi\rangle}$.

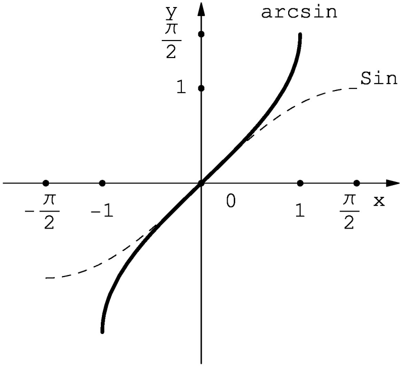
Dakle, parovi inverznih funkcija su:

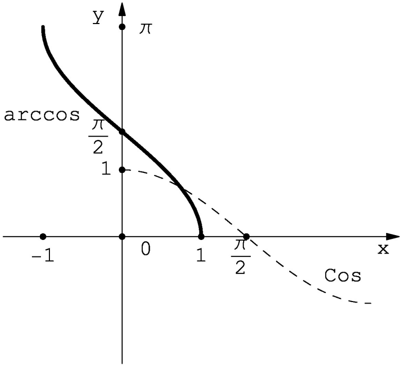
$$\mathrm{Sin} : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1], \qquad \mathrm{Sin}^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],$$

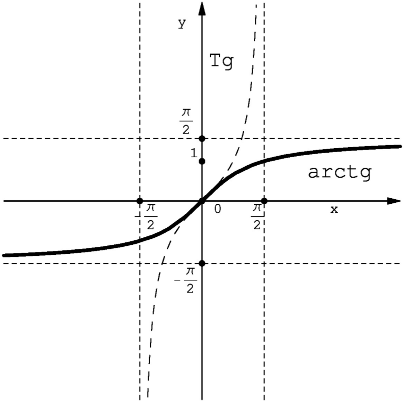
$$\mathrm{Cos} : [0, \pi] \to [-1, 1], \qquad \mathrm{Cos}^{-1} = \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

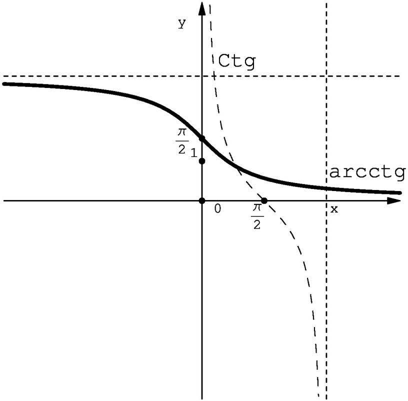
$$\mathrm{Tg} : \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Tg}^{-1} = \mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle,$$

$$\mathrm{Ctg} : \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Ctg}^{-1} = \mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle.$$


y
arcsin
$\frac{\pi}{2}$
1
Sin
$-\frac{\pi}{2}$
-1
0
1
$\frac{\pi}{2}$
x


y
π
arccos
$\frac{\pi}{2}$
1
-1
0
1
$\frac{\pi}{2}$
x
Cos


y
Tg
$\frac{\pi}{2}$
1
arctg
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$


y
Ctg
$\frac{\pi}{2}$
1
arcctg
0
$\frac{\pi}{2}$
x

Zadatak

Riješimo jednadžbe $\sin x = b$ i $\cos y = b$ za $b \in [-1, 1]$.

Rješenje. $\sin x = b$

Prvo nađemo rješenje na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Jer je sin bijekcija na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$x_1 = \mathrm{Sin}^{-1}(b).$$

Zatim tražimo rješenje na intervalu $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$.

Zbog

$$\sin(\pi - x) = \sin\pi\cos x - \cos\pi\sin x = 0 \cdot \cos x - (-1)\sin x = \sin x$$

drugo rješenje je

$$x_2 = \pi - x_1 = \pi - \mathrm{Sin}^{-1}(b).$$

To su sva rješenja na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$.

Uočite da je širina intervala jednaka temeljnom periodu 2π.

Rješenje periodički proširimo na cijeli $\mathbb{R}$

$$\left\{\mathrm{Sin}^{-1}(b) + 2k\pi, \pi - \mathrm{Sin}^{-1}(b) + 2k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ovaj skup rješenja se može opisati s:

$$x_n = (-1)^n \mathrm{Sin}^{-1}(b) + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$\cos x = b$

Koristimo isti princip kao prije.

Prvo nađemo rješenje na intervalu $[0, \pi]$.
Jer je cos bijekcija na $[0, \pi]$:

$$y_1 = \mathrm{Cos}^{-1}(b).$$

Zatim tražimo rješenje na intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$.

Zbog parnosti funkcije cosinus:

$$\cos(-x) = \cos x$$

drugo rješenje je
$$y_2 = -y_1 = -\mathrm{Cos}^{-1}(b).$$
To su sva rješenja na intervalu $\langle -\pi, \pi]$.

Uočite da je širina intervala jednaka temeljnom periodu 2π.

Rješenje periodički proširimo na cijeli $\mathbb{R}$
$$\left\{\mathrm{Cos}^{-1}(b) + 2k\pi, -\mathrm{Cos}^{-1}(b) + 2k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$
Ovaj skup rješenja se može opisati s:
$$y_n = (-1)^n \left(\mathrm{Cos}^{-1}(b) - \frac{\pi}{2}\right) + n\pi + \frac{\pi}{2}i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
$\square$

Zadatak

Riješimo nejednadžbu

$$a \leq \sin x \leq b$$

za $-1 < a < b < 1$.

Nejednadžbu riješimo na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Koristeći

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

nađemo rješenje na intervalu $\langle\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$.

Zatim rješenje periodički proširimo na cijeli $\mathbb{R}$

Za $n = 2m,\ m \in \mathbb{Z}$, imamo

$$\mathrm{Sin}^{-1}(a) + 2m\pi \leq x \leq \mathrm{Sin}^{-1}(b) + 2m\pi,$$

a za $n = 2m - 1,\ m \in \mathbb{Z}$, je

$$\mathrm{Sin}^{-1}(b) + (2m-1)\pi \leq x \leq \mathrm{Sin}^{-1}(a) + (2m-1)\pi.$$