Oslo algoritam*

Kristian Sabo

Sažetak

U ovom seminaru obrađen je *Oslo algoritam* i neke njegove primjene. Na početku vrlo kratko izložene su definicije i osnovna svojstva B–splajna i diskretnog splajna. Oslo algoritam kao i odgovarajući numerički primjeri napravljeni su u programu *Matlab*.

1 B–splajn krivulja

Neka su $\ldots \leq \tau_{-1} \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots$ realni brojevi. Za fiksni $i \in \mathbb{Z}$ funkciju $B_i^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanu formulom

$$B_i^k(s) = \begin{cases} (-1)^k(\tau_{k+i} - \tau_i)[\tau_i, \ldots, \tau_{k+i}](s-t)_+^{k-1} & \text{ako je } \tau_i < \tau_{k+i} \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{1}$$

zovemo B–spline funkcija reda k pridružena čvorovima $\tau_i, \ldots \tau_{k+i}$.

Može se dokazati da za B–splajn funkcije vrijedi sljedeća rekurzivna relacija:

$$B_i^1(s) = \begin{cases} 1 & \tau_i \leq s < \tau_{i+1} \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{2}$$

i za $k \geq 2$

$$B_i^k(s) = \omega_{i,k}(s) B_i^{k-1}(s) + (1 - \omega_{i+1,k}(s)) B_{i+1}^{k-1}(s), \tag{3}$$

gdje je $\omega_{i,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$\omega_{i,k}(s) = \begin{cases} \frac{s-\tau_i}{\tau_{i+k-1}-\tau_i} & \text{ako je } \tau_i < \tau_{i+k-1} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

*Seminarski rad iz kolegija *Geometrijski algoritmi i splajnovi*

Neka su točke $P_1, P_2, \ldots, P_n$, $P_j \in \mathbb{R}^h$, $j = 1, \ldots, n$, $h \in \mathbb{N}$ vrhovi poligona $P = P_1 P_2 \cdots P_n$ te neka je $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n+k})^T$, $\tau \in \mathbb{R}^{n+k}$, takvi da je $\tau_1 \leq \cdots \leq \tau_{n+k}$.

Krivulju

$$f(s) = \sum_{i}^{n} P_i B_i^k(s), \tag{4}$$

gdje su B_i^k definirani kao u (1), zovemo B–splajn krivulja reda k, pripadni poligon P zovemo kontrolni poligon, njegove vrhove kontrolne točke, a vektor τ vektor čvorova.

Za zadani kotrolni poligon P i vektor čvorova τ primjenom rekurzije (3), može se izvesti rekurzija za računanje koordinata točaka koje leže na B–splajn krivulji (tehnika koja se koristi u dokazu ove rekurzije slična je tehnici koju ćemo kasnije koristiti za rekurziju na kojoj se zasniva Oslo algoritam):

$$f(s) = f_j^{(k-1)}(s) \text{ ako je } s \in [\tau_j, \tau_{j+1}\rangle,$$

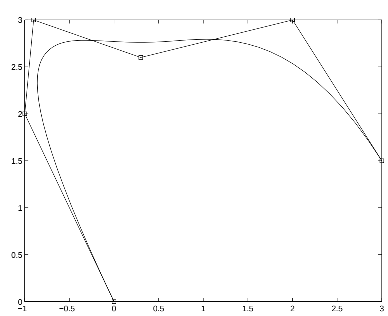
gdje je

$$f_r^{(i)}(s) = \begin{cases} (1 - \lambda_r^i) f_{r-1}^{(i-1)}(s) + \lambda_r^i f_r^{(i-1)}(s) & \text{ako je } i \geq 1 \\ P_r & \text{ako je } i = 0 \end{cases}$$

i

$$\lambda_r^i = \frac{s - \tau_r}{\tau_{r+k-i} - \tau_r}.$$

Primjer 1 *Zadan je kontrolni poligon P s vrhovima $P_1 = (0,0), P_2 = (-1,2), P_3 = (-0.9,3), P_4 = (0.3,2.6), P_5 = (2,3), P_6 = (3,1.5)$ i vektor čvorova $\tau = (0,0,0,0,1,2,3,3,3,3)$. Na Slici 1. prikazani su kontrolni poligon i odgovarajuća B–splajn krivulja f.*



Slika 1. *Kontrolni poligon P i odgovarajuća B-splajn krivulja f*

2 Diskretni splajn

Neka je

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i B_i^k(x), \tag{5}$$

zadana B–splajn krivulja.

Vektoru čvorova $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n+k})^T$ želimo dodati još jedan ili više čvorova $\tau^a = (\tau_1, \ldots, \tau_l)^T$ te vidjeti kako će to utjecaj imati na zadanu krivulju. Neka je $m = n + l$ te uvedimo novi vektor čvorova definiran s $t := \tau \cup \tau^a = (t_1, \ldots, t_{m+k})^T$. Sada krivulju (5) zapišimo na sljedeći način

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j N_j^k(x), \tag{6}$$

gdje su N_j^k B–splajn funkcije reda k definirane nad vektorom čvorova t,a d_j nepoznati koeficijenti. Prema tome za zadane brojeve k, n, m vektore τ i t te vrhove poligona $P_1, \ldots, P_n$ trebamo odrediti nepoznate koeficijente $d_1, \ldots, d_m$.

Ovakav se problem može riješiti na više načina. Ovdje ćemo taj problem riješiti primjenom jednog algoritma koji je u literaturi poznat kao *Oslo algoritam*.

U tu svrhu najprije ćemo definirati i dati osnovna svojstva tzv. *diskretnog splajna*.

Prirodno je pretpostaviti da je veza koeficijenata P_i i d_j linearna tj. da vrijedi

$$d_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}(j) P_i, \tag{7}$$

što ćemo korektno opravdati nakon Teorema 1. za neke brojeve $\alpha_{ik}(j)$.

Može se dokazati sljedeći teorem.

Teorem 1 *Za svaki x vrijedi*

$$B_i^k(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ik}(j) N_j^k(x) \quad i = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \alpha_{ik}(j) &= (\tau_{k+i} - \tau_i)[\tau_i, \ldots, \tau_{k+i}]\Phi_{jk}, \\ \Phi_{jk}(y) &= (y - a_j)_+^0 \Psi_{jk}(y), \quad \textit{gdje je } a_j \in [t_j, t_{j+1}\rangle \\ \Psi_{jk}(y) &= \prod_{r=1}^{k-1} (y - t_{j+r}) \end{aligned} \tag{9}$$

Za fiksni i realne brojeve $\alpha_{ik}(j)$ zovemo diskretni splajn reda k pridružen čvorovima $\tau_i, \ldots, \tau_{i+k}$.

Iz *Teorema 1* imamo

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i B_i^k(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ik}(j) N_j^k(s) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \alpha_{ik}(j) \right) N_j^k(s),$$

čime je opravdana pretpostavka (7).

Za diskretni splajn vrijedi rekurzija

$$\alpha_{i1}(j) = \begin{cases} 1 & \tau_i \leq t_j < \tau_{i+1} \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{10}$$

i za $k \geq 2$ i sve i, j

$$\alpha_{ik}(j) = (t_{j+k-1} - \tau_i)\beta_{i,k-1}(j) + (\tau_{j+k} - t_{j+k-1})\beta_{i+1,k-1}(j), \tag{11}$$

gdje je

$$\beta_{ik}(j) = \begin{cases} \alpha_{ik}(j)/(\tau_{i+k} - \tau_i) & \tau_{i+k} > \tau_i \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{12}$$

Navest ćemo još jedan teorem u kojemu su izrečena svojstva diskretnog splajna koji mu opravdava ime

Teorem 2 *Neka je $\alpha_{ik}(j)$ diskretni splajn. Tada vrijedi*

a) Za $1 \leq j \leq m$ neka je indeks μ takav da je $\tau_\mu \leq t_j < \tau_{\mu+1}$, tada je $\alpha_{ik}(j) = 0, \quad i \notin \{\mu - k + 1, \ldots, \mu\}$.

b) $\alpha_{ik}(j) \geq 0$ za sve i, j.

c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}(j) = 1,\ \tau_k \leq t_j < \tau_{n+1}$.

Vratimo se početnom problemu tj. izračunajmo odgovarajuće koeficijente d_j u (7).

Imamo

$$d_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}(j) P_i.$$

Za zadani indeks j odredimo indeks μ takav da je $\tau_\mu \leq t_j < \tau_{\mu+1}$, pa sada zbog svojstva a) u Teoremu 2 te rekurzije (10) i (11) za diskretni splajn imamo

$$\begin{aligned} d(j) &= \sum_{i=\mu-k+1}^{\mu} \alpha_{ik}(j) P_i = \\ &= \sum_{i=\mu-k+1}^{\mu} P_i((t_{j+k-1} - \tau_i)\beta_{i,k-1}(j) + (\tau_{i+k} - t_{j+k-1})\beta_{i+1,k-1}(j)). \end{aligned}$$

Prema tvrdnji a) Teorema 2 je $\beta_{\mu-k+1,k-1}(j) = \beta_{\mu+1,k-1}(j) = 0$ pa sada imamo:

$$d_j = \sum_{i=\mu-k+2}^{\mu} P_i(t_{j+k-1} - \tau_i)\beta_{i,k-1}(j) + \sum_{i=\mu-k+1}^{\mu-1} P_i(\tau_{i+k} - t_{j+k-1})\beta_{i+1,k-1}(j).$$

U drugoj sumi napravimo zamjenu indeksa $i \mapsto i+1$ pa sada d_j izgleda ovako:

$$d_j = \sum_{i=\mu-k+2}^{\mu} P_i(t_{j+k-1} - \tau_i)\beta_{i,k-1}(j) + \sum_{i=\mu-k+2}^{\mu} P_{i-1}(\tau_{i-1+k} - t_{j+k-1})\beta_{i,k-1}(j).$$

Za sve $i \in \{\mu - k + 2, \ldots, \mu\}$ očito je $\beta_{i,k-1}(j)(\tau_{i+k-1} - \tau_i) = \alpha_{i,k-1}(j)$, pa dobivamo

$$d_j = \sum_{i=\mu-k+2}^{\mu} P_{i,j}^{[2]} \alpha_{i,k-1}(j),$$

gdje je

$$P_{i,j}^{[2]} = \frac{[(t_{j+k-1} - \tau_i)P_i + (\tau_{i+k-1} - t_{j+k-1})P_{i-1}]}{\tau_{i+k-1} - \tau_i}.$$

Općenito za $r = 1, 2, \ldots, k$ imamo

$$d_j = \sum_{i=\mu-k+r}^{\mu} P_{i,j}^{[r]} \alpha_{i,k-r+1}(j),$$

gdje je

$$P_{i,j}^{[1]} = P_i,$$

i

$$P_{i,j}^{[r+1]} = \frac{[(t_{j+k-r} - \tau_i)P_{i,j}^{[r]} + (\tau_{i+k-r} - t_{j+k-r}P_{i-1,j}^{[r-1]})]}{\tau_{i+k-r} - \tau_i}.$$

Uzmemo li konačno $r = k$ imamo

$$d_j = P_{\mu,j}^{[k]} \alpha_{\mu,1}(j) = P_{\mu,j}^{[k]}. \qquad (13)$$

3 Oslo algoritam

Konačno prema (13) izgradimo algoritam Racuna za računanje svake komponente vektora $d = (d_1, \ldots, d_m)$. Najprije za zadani $j \in \{1, \ldots, m\}$ odredimo $\mu \in \{1, \ldots, n-1\}$ takav da je $\tau_\mu \leq t_j \leq_{\mu+1}$.

To radi Algoritam Trazi.

Algoritam 1. (Trazi)

For $j = 1, \ldots, m-1$

Ako je $t_j \geq \tau_i$ tada je $\mu = i$

Algoritam 2. (Racuna)

1) $\mu_2 = \mu - k + 1$

2) For $i = \mu_2, \mu_2 + 1, \ldots, \mu$

    i) $P_i^{[1]} = P_i$

3) For $r = 1, 2 \ldots, k-1$

i) $\mu_2 = \mu_2 - 1$

ii) For $i = \mu, \mu-1, \dots \mu_2$

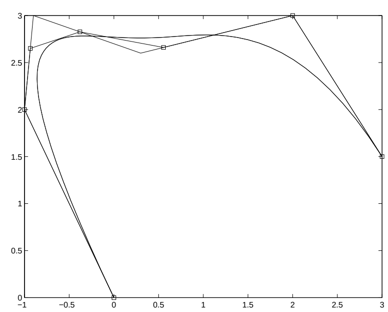
a) $d_1 = t_{i+k-r} - \tau_i$, $d_2 = \tau_{i+k-r} - t_{j-k+r}$

b) $P_i^{r+1} = (d_1 \cdot P_i^{[r]} + d_2 \cdot P_{i-1}^{[r]})/(d_1 + d_2)$

4) $d_j = P_\mu^{[k]}$

3.1 Numerički primjeri

Primjer 2 *(Ubacivanje novog čvora) Neka su kontrolni poligon P te vektor čvorova zadani kao u Primjeru 1. Dodajmo još jedan čvor i neka je on* 1.3. *To znači da novi vektor čvorova glasi $t = (0,0,0,0,1,1.3,2,3,3,3,3)^T$. Treba odrediti novi odgovarajući kontrolni poligon $d = d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ kao i odgovarajuću B–splajn krivulju. Na* Slici 2 *prikazani su novi i stari kontrolni poligoni kao i odgovarajuće krivulje. Primjenom algoritma dobiva se* $d_1 = (0,0) = P_1, d_2 = (-1,2), d_3 = (-0.9, 2.65), d_4 = (-0.38, 2.867), d_5 = (0.5550, 2.6600), d_6 = (2,3), d_7 = (3,1.5) = P_6$.



Slika 2. Novi i stari kontrolni poligoni te odgovarajuće krivulja

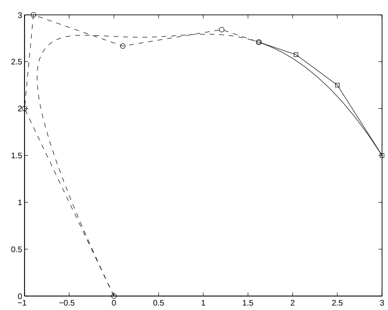
Primjer 3 *(Podjela B-splajn krivulje) Zadana je B–splajn krivulja*

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i B_i^k(s).$$

Treba odrediti kontrolne poligone $Q = Q_1 \dots Q_a$ i $R = R_1 \dots R_b$ koji definiraju zadanu krivulju podijeljenu u dva dijela. Problem se može riješiti primjenom Oslo algoritma. Defiramo mrežu čvorova

$$t = (\tau_1, \dots, \tau_u, \tau_s, \tau_s, \dots, \tau_s, \tau_{u+1}, \dots, \tau_{n+k}),$$

gdje se srednji τ_s–ovi javljaju k puta. Pri tome τ_s nije bio u originalnoj mreži čvorova. Na ovako dobivenu mrežu primijenimo Oslo algoritam, te smo na taj način dobili dvije disjunktne krivulje (prva je određena čvorovima $\tau_1, \ldots, \tau_u, \tau_s, \ldots \tau_s$, a druga čvorovima $\tau_s, \ldots, \tau_s, \tau_{u+1}, \ldots \tau_{n+k}$) koje su podijelile našu polaznu krivulju. Neka je originalna krivulja, krivulja iz Primjera 1, te je podijelimo s čvorom $\tau_s = 2.5$. Dobivamo rezultat kao na Slici 3.



Slika 3. Dva disjunktna kontrolna poligona i odgovarajuće krivulje dijele zadanu krivulju u dva dijela