Simpleks metoda - optimalni plan, prvi plan

https://web.math.pmf.unizg.hr/
∼petar/prezen/uopt/

21. listopada 2019.

Zadatak 1

Simpleks metodom riješite problem:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & x_2 & +2x_3 & \rightarrow \max \\ x_1 & +x_2 & & \leq 7 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & \leq 5 \\ & x_i \geq 0 & & i = 1, 2, 3. \end{array}\right.$$

Zadatak 1

Simpleks metodom riješite problem:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & x_2 & +2x_3 & & \to \max \\ x_1 & +x_2 & & \leq 7 & \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 1 & \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & \leq 5 & \\ & x_i \geq 0 & & i = 1, 2, 3. & \end{array}\right.$$

Početna tablica:

	x_1	x_2	x_3	
w_1	-1	-1	0	7
w_2	1	-1	1	1
w_3	-1	1	1	5
	0	1	2	0

	x_1	x_2	x_3	
w_1	-1	-1	0	7
w_2	1	$\boxed{-1}$	1	1
w_3	-1	1	1	5
	0	1	2	0

	x_1	x_2	x_3	
w_1	-1	-1	0	7
w_2	1	$\boxed{-1}$	1	1
w_3	-1	1	1	5
	0	1	2	0

	x_1	w_2	x_3	
w_1	$\boxed{-2}$	1	-1	6
x_2	1	-1	1	1
w_3	0	-1	2	6
	1	-1	3	1

	x_1	x_2	x_3	
w_1	-1	-1	0	7
w_2	1	$\boxed{-1}$	1	1
w_3	-1	1	1	5
	0	1	2	0

	x_1	w_2	x_3	
w_1	$\boxed{-2}$	1	-1	6
x_2	1	-1	1	1
w_3	0	-1	2	6
	1	-1	3	1

	w_1	w_2	x_3	
x_1	-1/2	1/2	$\boxed{-1/2}$	3
x_2	-1/2	-1/2	1/2	4
w_3	0	-1	2	6
	-1/2	-1/2	5/2	4

	x_1	x_2	x_3	
w_1	-1	-1	0	7
w_2	1	$\boxed{-1}$	1	1
w_3	-1	1	1	5
	0	1	2	0

	x_1	w_2	x_3	
w_1	$\boxed{-2}$	1	-1	6
x_2	1	-1	1	1
w_3	0	-1	2	6
	1	-1	3	1

	w_1	w_2	x_3	
x_1	-1/2	1/2	$\boxed{-1/2}$	3
x_2	-1/2	-1/2	1/2	4
w_3	0	-1	2	6
	-1/2	-1/2	5/2	4

	w_1	w_2	x_1	
x_3	-1	1	-2	6
x_2	-1	0	-1	7
w_3	-2	1	-4	18
	-3	2	-5	19

	x_1	x_2	x_3	
w_1	-1	-1	0	7
w_2	1	$\boxed{-1}$	1	1
w_3	-1	1	1	5
	0	1	2	0

	x_1	w_2	x_3	
w_1	$\boxed{-2}$	1	-1	6
x_2	1	-1	1	1
w_3	0	-1	2	6
	1	-1	3	1

	w_1	w_2	x_3	
x_1	-1/2	1/2	$\boxed{-1/2}$	3
x_2	-1/2	-1/2	1/2	4
w_3	0	-1	2	6
	-1/2	-1/2	5/2	4

	w_1	w_2	x_1	
x_3	-1	1	-2	6
x_2	-1	0	-1	7
w_3	-2	1	-4	18
	-3	2	-5	19

Zaključak: problem nije ograničen odozgo, čime linearna zadaća nema rješenje. Zaista, pogledajte varijablu x_3. $(0, 0, x_3)$ je sadržan u dopustivom skupu za svaki $x_3 > 0$.

Prijašnji zaključak smo mogli napraviti odmah na početku bez ulaska u algoritam (ako napravimo zamjenu varijabli x_1 i x_3 algoritam završi na početku).

	x_1	x_2	x_3	
w_1	-1	-1	0	7
w_2	1	-1	1	1
w_3	-1	1	1	5
	0	1	2	0

Vrijedi i više:

Napomena 1

Ako se u nekoj iteraciji optimalnog plana pojavi stupac $l \in J$ takav da je

$$\zeta_l > 0,\ \gamma_{1l} \geq 0, \gamma_{2l} \geq 0, \ldots, \gamma_{ml} \geq 0$$

zaustavi algoritam. Funkcija cilja je neograničena odozgo te zadaća nema rješenje.

Zadatak 2

Simpleks metodom riješite problem:

$$
\left\{
\begin{array}{cccccccc}
-x_1 & -3x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & \rightarrow \min & \\
x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & -3x_5 & & \leq 1 & \\
x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & & \leq 1 & \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +5x_4 & -x_5 & & \leq 3 & \\
& & x_i \geq 0 & & & & i = 1, 2, 3, 4, 5. &
\end{array}
\right.
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
w_1	-1	1	-1	-3	3	1
w_2	-1	-1	1	-1	-1	1
w_3	-1	-1	-1	-5	1	3
	1	3	-1	-1	-1	0

	w_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	-1	1	-1	-3	3	1
w_2	1	-2	2	2	-4	0
w_3	1	-2	0	-2	-2	2
	-1	4	-2	-4	2	1

	w_1	w_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	-1/2	-1/2	0	-2	1	1
x_2	1/2	-1/2	1	1	-2	0
w_3	0	1	-2	-4	2	2
	1	-2	2	0	-6	1

	w_1	w_2	w_3	x_4	x_5	
x_1	-1/2	-1/2	0	−2	1	1
x_2	-1/2	0	-1/2	-1	-1	1
x_3	0	1/2	-1/2	-2	1	1
	1	-1	-1	-4	-4	3

	x_1	w_2	w_3	x_4	x_5	
w_1	-2	-1	0	-4	2	2
x_2	-1	-1/2	-1/2	-3	0	2
x_3	0	1/2	-1/2	-2	1	1
	-2	-2	-1	-8	-2	5

- Optimalno rješenje: $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (0, 2, 1, 0, 0)$
- Vrijednost f-je cilja $\# = 5$

Zadatak 3

Poljoprivrednik ima zemljište od 100 hektara na kojem uzgaja kukuruz i žito. Od kukuruza ostvaruje profit od 500 kuna po hektaru, a od žita profit od 350 kuna po hektaru. Troškovi žetve iznose 150 kuna po hektaru kukuruza i 90 kuna po hektaru žita, a poljoprivrednik može potrošiti najviše 10000 kuna za žetvu. Koliko kukuruza, a koliko žita treba posaditi da bi profit bio maksimalan?

Zadatak 3

Poljoprivrednik ima zemljište od 100 hektara na kojem uzgaja kukuruz i žito. Od kukuruza ostvaruje profit od 500 kuna po hektaru, a od žita profit od 350 kuna po hektaru. Troškovi žetve iznose 150 kuna po hektaru kukuruza i 90 kuna po hektaru žita, a poljoprivrednik može potrošiti najviše 10000 kuna za žetvu. Koliko kukuruza, a koliko žita treba posaditi da bi profit bio maksimalan?

x_1 ... količina kukuruza
x_2 ... količina žita

$$\left\{\begin{array}{cccc} 350x_1 & +260x_2 & \to \max \\ x_1 & +x_2 & \leq 100 \\ 150x_1 & +90x_2 & \leq 10000 \\ x_i \geq 0 & & i = 1, 2. \end{array}\right.$$

	x_1	x_2	
w_1	-1	-1	100
w_2	-150	-90	10 000
	350	260	0

	w_2	x_2	
w_1	1/150	-2/5	100/3
x_1	-1/150	-3/5	200/3
	-7/3	50	70 000/3

	w_2	w_1	
x_2	1/60	-5/2	250/3
x_1	-1/60	3/2	50/3
	-3/2	-125	27 500

- Optimalno rješenje: $(x_1^*, x_2^*) = (50/3, 250/3)$
- Vrijednost f-je cilja $\# = 27\,500$

Potrebno je posaditi 5 puta više žita od kukuruza kako bi se ostvario maksimalni profit od 27 500 kuna.

Zadatak 4

Kozmetička tvrtka proizvodi dva proizvoda iz linije "Aloe Vere", kremu i gel. Proizvodi sadrže tri aktivna sastojka, ekstrakt biljke aloe vera, smjesu vitamina i smjesu minerala. U tablici su zadane količine aktivnih sastojaka potrebnih za proizvodnju 1 kg kreme i gela, zarada po 1 kg gotovog proizvoda i raspoložive količine sastojaka na skladištu. Jedinica za količine sastojaka je kilogram, a zarada je izražena u eurima. Nađite optimalan plan proizvodnje i maksimalnu zaradu.

•	aloa vera	vitamin	mineral	Profit
Krema	0.02	0.005	0.01	25
Gel	0.03	0.007	0.006	30
Zaliha	190	20	25	•

$x_1 \ldots$ količina proizvoda u kremi
$x_2 \ldots$ količina proizvoda u gelu

$$\begin{cases} 25x_1 & +30x_2 & \to \max \\ 0.02x_1 & +0.03x_2 & \leq 190 \\ 0.005x_1 & +0.007x_2 & \leq 20 \\ 0.01x_1 & +0.006x_2 & \leq 25 \\ x_i \geq 0 & & i = 1, 2. \end{cases}$$

$x_1 \ldots$ količina proizvoda u kremi
$x_2 \ldots$ količina proizvoda u gelu

$$\begin{cases} 25x_1 + 30x_2 \to \max \\ 0.02x_1 + 0.03x_2 \leq 190 \\ 0.005x_1 + 0.007x_2 \leq 20 \\ 0.01x_1 + 0.006x_2 \leq 25 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2. \end{cases}$$

	x_1	x_2	
w_1	-0.02	-0.03	190
w_2	-0.005	-0.007	20
w_3	-0.01	-0.006	25
	25	30	0

	w_3	x_2	
w_1	2	-0.018	140
w_2	0.5	-0.004	7.5
x_1	-100	-0.6	2500
	-2500	15	62500

	w_3	w_2	
w_1	-0.25	4.5	106.25
x_2	125	-250	1875
x_1	-175	150	1375
	-655	-3750	90 625

Potrebno je proizvesti 1375 proizvoda od kreme i 1375 proizvoda od gela kako bi ostvario maksimalni profit od 90625 eura.

Što ako ne vrijedi $b \geq 0$?

Postoje dva puta do pronalaska zapisa za *optimalni plan*:

1) rješavanje pomoćne zadaće λ,
2) algoritam *prvog plana* izveden iz algoritma za razdvajajuću hiperravninu.

Neka je dana linearna zadaća:

$$(\mathrm{LZ}) \qquad \begin{cases} z^\tau x \to \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases},$$

te pomoćna zadaća:

$$(\mathrm{LZ}_\lambda) \qquad \begin{cases} \lambda \to \min \\ Ax \leq b + \lambda \mathbf{e} \\ x, \lambda \geq 0 \end{cases}, \qquad \mathbf{e} = (1, 1, ..., 1)^\tau.$$

Zadaća (LZ$_\lambda$)

Propozicija 1

Zadaća (LZ$_\lambda$) *uvijek ima rješenje.*

Propozicija 2

Dopustivi skup zadaće (LZ) *je neprazan ako i samo ako zadaća* (LZ$_\lambda$) *ima optimalno rješenje* $\lambda^* = 0$.

Prethodna propozicija daje jednostavan algoritam za rješavanje linearne zadaće (LZ).

Početna tablica:

	x_1	$\dots$	x_n	λ	
w_1				1	b_1
$\vdots$		$-A$		$\vdots$	$\vdots$
w_m				1	b_m
z	z_1	$\dots$	z_n	0	0
$-\lambda$	0	$\dots$	0	-1	0

Algoritam pomoćne zadaće λ:

1) pronađi $i_0 \in \{1, 2, ..., m\}$ t.d.
   $b_{i_0} = \min\{b_j \mid j = 1, 2, ..., m\}$
2) napravi GJT na elementu $(i_0, n+1)$
3) riješi problem optimalnim planom (pritom z mora ostati nebazična varijabla, tj. **ne radimo** GJT u tom retku!). Postavi $r(\lambda) = n + m + 1$.
4)
   - ako je $\lambda^* > 0$ problem (LZ) nema rješenja (STOP)
   - ako je $\lambda^* = 0$ izbriši redak i stupac s oznakom λ. Riješi dobiveni problem optimalnim planom.

Primjer 1

Simpleks metodom riješite problem:

$$\left\{\begin{array}{ccc} -x_1 & -4x_2 & \to \max \\ \\ -2x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ -2x_1 & +4x_2 & \leq -8 \\ -x_1 & -3x_2 & \leq -7 \\ \\ & & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{array}\right.$$

Primjer 1

Simpleks metodom riješite problem:

$$\begin{cases} -x_1 & -4x_2 & \to \max \\ -2x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ -2x_1 & +4x_2 & \leq -8 \\ -x_1 & -3x_2 & \leq -7 \\ & x_i \geq 0, & i = 1, 2. \end{cases}$$

Rj: Početna tablica:

	x_1	x_2	λ	
w_1	2	-1	1	4
w_2	2	-4	1	-8
w_3	1	3	1	-7
z	-1	-4	0	0
$-\lambda$	0	0	-1	0

	x_1	x_2	λ	
w_1	2	-1	1	4
w_2	2	-4	1	-8
w_3	1	3	1	-7
z	-1	-4	0	0
$-\lambda$	0	0	-1	0

	x_1	x_2	λ	
w_1	2	-1	1	4
w_2	2	-4	1	-8
w_3	1	3	1	-7
z	-1	-4	0	0
$-\lambda$	0	0	-1	0

	x_1	x_2	w_2	
w_1	0	3	1	12
λ	-2	4	1	8
w_3	-1	7	1	1
z	-1	-4	0	0
$-\lambda$	2	-4	-1	-8

	x_1	x_2	λ	
w_1	2	-1	1	4
w_2	2	-4	1	-8
w_3	1	3	1	-7
z	-1	-4	0	0
$-\lambda$	0	0	-1	0

	x_1	x_2	w_2	
w_1	0	3	1	12
λ	-2	4	1	8
w_3	-1	7	1	1
z	-1	-4	0	0
$-\lambda$	2	-4	-1	-8

	w_3	x_2	w_2	
w_1	0	3	1	12
λ	2	-10	-1	6
x_1	-1	7	1	1
z	1	-11	-1	-1
$-\lambda$	-2	10	1	-6

	x_1	x_2	λ	
w_1	2	-1	1	4
w_2	2	-4	1	-8
w_3	1	3	1	-7
z	-1	-4	0	0
$-\lambda$	0	0	-1	0

	x_1	x_2	w_2	
w_1	0	3	1	12
λ	-2	4	1	8
w_3	-1	7	1	1
z	-1	-4	0	0
$-\lambda$	2	-4	-1	-8

	w_3	x_2	w_2	
w_1	0	3	1	12
λ	2	-10	-1	6
x_1	-1	7	1	1
z	1	-11	-1	-1
$-\lambda$	-2	10	1	-6

	w_3	λ	w_2	
w_1	3/5	-3/10	7/10	69/5
x_2	1/5	-1/10	-1/10	3/5
x_1	2/5	-7/10	3/10	26/5
z	-6/5	11/10	1/10	-38/5
$-\lambda$	0	-1	0	0

Optimalno rješenje je $\lambda^* = 0$. Zadaća nije kontradiktorna.

	w_3	w_2	
w_1	3/5	7/10	69/5
x_2	1/5	-1/10	3/5
x_1	2/5	3/10	26/5
	-6/5	1/10	-38/5

	w_3	x_2	
w_1	2	-7	18
w_2	2	-10	6
x_1	1	-3	7
	-1	-1	-7

Problem ima rješenje $(x_1^*, x_2^*) = (7, 0)$, $\quad \# = -7$.

Prethodni pristup rješavanju ima očitu manu. Zahtijeva se dodavanje stupca i retka u zadaću što nužno povećava broj operacija. Postoji i bolji način, a to je primjena algoritma za razdvajajuće hiperravnine.

PRVI PLAN

Kreiranje početne tablice iz (LZ):

	$x_1 \quad \dots \quad x_n$	
x_{n+1}		
$\vdots$	$-\boldsymbol{A}$	b
x_{n+m}		
	z^T	0

$I = \{1, 2, ..., n\}$
$J = \{n+1, n+2, ..., n+m\}$

	$x_j,\ j \in J$	
$x_i,\ i \in I$	γ_{ij}	β_i
	ζ_j	f

1) Ako je $\forall i \in I\ (\beta_i \geq 0)$ onda kreni s **optimalnim planom**
2) Inače, neka je $k := \min\{i \in I,\ \beta_i < 0\}$
3) Ako je $\forall j \in J\ (\gamma_{kj} \leq 0)$ onda **STOP**
   Zadaća je u kontradikciji (dopustivi skup je prazan).
4) Inače, neka je $l := \min\{j \in J,\ \gamma_{kj} > 0\}$
5) Napravi GJT na ključnom mjestu γ_{kl} i vrati se na 1)

Zadatak 5

Simpleks metodom riješite problem:

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & -3x_3 & \to \max \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 7 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & \leq -10 \\ -2x_1 & +x_2 & & \leq 2 \\ & x_i \geq 0, & & i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Zadatak 5

Simpleks metodom riješite problem:

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & -3x_3 & \to \max \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 7 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & \leq -10 \\ -2x_1 & +x_2 & & \leq 2 \\ & x_i \geq 0, & & i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Rj:

	x_1	x_2	x_3	
w_1	-1	-1	-1	7
w_2	-1	2	1	-10
w_3	2	-1	0	2
	-1	1	-3	0

	x_1	x_2	x_3	
w_1	-1	-1	-1	7
w_2	-1	2	1	-10
w_3	2	-1	0	2
	-1	1	-3	0

	x_1	w_2	x_3	
w_1	-3/2	-1/2	-1/2	2
x_2	1/2	1/2	-1/2	5
w_3	3/2	-1/2	1/2	-3
	-1/2	1/2	-7/2	5

	w_3	w_2	x_3	
w_1	-1	-1	0	-1
x_2	1/3	2/3	-2/3	6
x_1	2/3	1/3	-1/3	2
	-1/3	1/3	-10/3	4

Problem nema rješenje, tj. dopustivi skup zadaće je prazan.

Napomena 2

Ako se u nekoj iteraciji prvog plana pojavi redak k takav da je

$$\beta_k < 0,\ \xi_{k1} \leq 0, \xi_{k2} \leq 0, \ldots, \xi_{kn} \leq 0$$

zaustavi algoritam. Dopustivi skup zadaće je prazan, tj. zadaća je u kontradikciji.

Zadatak 6

Dvije tvornice namještaja opskrbljuju se drvom iz dvije pilane. Prva tvornica mjesečno treba barem 150 kubika drva, a druga barem 60. Prva pilana u stanju je proizvesti najviše 100 kubika mjesečno, a druga najviše 120. Troškovi transporta proporcionalni su količini drva koje se prevozi pomnoženoj s odgovarajućom udaljenosti iz sljedeće tablice:

	1. tvornica	2. tvornica
1. pilana	15km	21km
2. pilana	18km	12km

Rj:

Varijable:

$$\begin{aligned}
x_1 \ldots &\quad \text{količina kubika iz pilane 1 u tvornicu 1}\\
x_2 \ldots &\quad \text{količina kubika iz pilane 1 u tvornicu 2}\\
x_3 \ldots &\quad \text{količina kubika iz pilane 2 u tvornicu 1}\\
x_4 \ldots &\quad \text{količina kubika iz pilane 2 u tvornicu 2}
\end{aligned}$$

Linearna zadaća:

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
15x_1 & +21x_2 & +18x_3 & +12x_4 & \to \min \\
x_1 & +x_2 & & & \leq 100 \\
 & & x_3 & +x_4 & \leq 120 \\
x_1 & & +x_3 & & \geq 150 \\
 & x_2 & & +x_4 & \geq 60 \\
 & & x_i \geq 0, & & i = 1, 2, 3, 4.
\end{array}\right.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
w_1	-1	-1	0	0	100
w_2	0	0	-1	-1	120
w_3	1	0	1	0	-150
w_4	0	1	0	1	-60
	-15	-21	-18	-12	0

	w_3	x_2	x_3	x_4	
w_1	-1	-1	1	0	-50
w_2	0	0	-1	-1	120
x_1	1	0	-1	0	150
w_4	0	1	0	1	-60
	-15	-21	-3	-12	-2250

	w_3	x_2	w_1	x_4	
x_3	1	1	1	0	50
w_2	-1	-1	-1	-1	70
x_1	0	-1	-1	0	100
w_4	0	1	0	1	-60
	-18	-24	-3	-12	-2400

	w_3	w_4	w_1	x_4	
x_3	1	1	1	-1	110
w_2	-1	-1	-1	0	10
x_1	0	-1	-1	1	40
x_2	0	1	0	-1	60
	-18	-24	-3	12	-3840

	w_3	w_4	w_1	x_2	
x_3	1	0	1	1	50
w_2	-1	-1	-1	0	10
x_1	0	0	-1	-1	100
x_4	0	1	0	-1	60
	-18	-12	-3	-12	-3120

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (100, 0, 50, 60)$$

Treba poslati 100 kubika iz pilane 1 u tvornicu 1, zatim 50 kubika iz pilane 2 u tvornicu 1 te 60 kubika iz pilane 2 u tvornicu 2 za minimalni trošak.

Zadaci za vježbu

Zadatak 7

U proizvodnji čokolade s lješnjacima koristi se mlijeko u prahu čija cijena i dostupnost variraju sezonski. Cijena, dostupnost i potražnja dane su za svaki kvartal godine u sljedećoj tablici:

Kvartal	1	2	3	4
Cijena po toni u €	110	100	120	130
Dostupnost (tona)	1000	1700	800	400
Potražnja (tona)	750	900	1000	850

Zbog kratkog roka trajanja mlijeko u prahu možemo čuvati samo za sljedeći kvartal. Prilikom čuvanja jedne tone javlja se dodatan trošak od 4 €+ 10% kupovne cijene. Skladište je prazno na početku 1. kvartala, a neiskorištena roba iz 4. kvartala se baca. Cilj je minimizirati trošak.
Zapišite gornji problem kao zadaću linearnog programiranja (nije potrebno riješiti).

Zadatak 8

Neka je dan problem

$$\begin{cases} \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \to \min \\ Ax \leq b \\ \gamma x + \delta > 0 \end{cases}$$

Zapišite gornji problem kao zadaću linearnog programiranja ako znate da su vrijednosti funkcije cilja strogo pozitivne.

Zadatak 9

Neka je dana slučajna varijabla

$$Z \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix}.$$

Ako je poznata vrijednost prvog momenta $\mathbb{E}(Z) = \mu_1$ *te drugog momenta* $\mathbb{E}\left(Z^2\right) = \mu_2$, *odredite gornju ogradu na vrijednost* $\mathbb{P}(Z = 2)$.