# Simpleks metoda - GJT, optimalni plan

*https://web.math.pmf.unizg.hr/*
*$\sim$petar/prezen/uopt/*

14. listopada 2019.

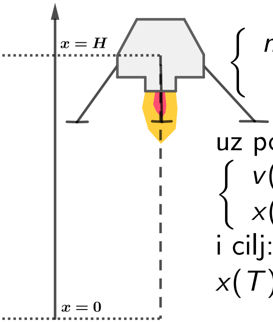
**Primjer 1**

*Neka je dana letjelica na visini $x = H$ iznad planetoida. Zbog nedostatka atmosfere potrebno je koristiti raketni pogon kako bi se letjelica sigurno spustila u trenutku $T$ (brzina mora biti 0), uz minimalnu potrošnju goriva. Pretpostavljamo da motorom možemo kontrolirati silu kojom se uzdže letjelica. Potrošnja goriva proporcionalna je*

$$\int_0^T F_m \, \mathrm{d}t$$

*gdje je $F_m(t)$ sila u trenutku $t$.*

Kontinuirani model:




$$\begin{cases} m\dot{v} &= -G + u \\ \dot{x} &= v \end{cases}$$

uz početni uvjet:

$$\begin{cases} v(0) = V \\ x(0) = H \end{cases}$$

i cilj:

$$x(T) = v(T) = 0.$$

**Problem:** Pronaći $u : [0, T\rangle \to \mathbb{R}^+$ tako da rješenje početne zadaće ima ostvareni cilj uz minimalnu potrošnju goriva.

Na ekvidistantnoj mreži, Eulerovom metodom diskretizacije dobivamo model (zadaća linearnog programiranja):

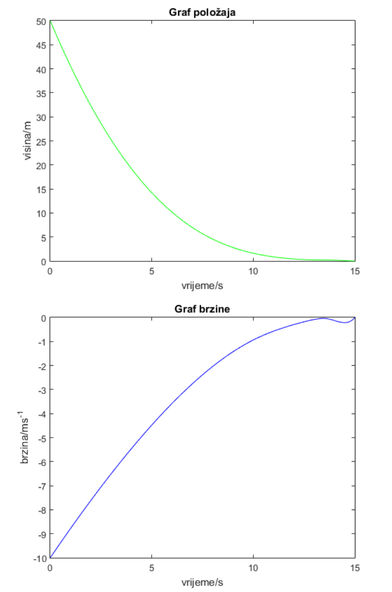
$$
\begin{cases}
u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} \to \min \\
v_{i+1} = v_i + \frac{\Delta t}{m}(-G + u_i), \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1, \\
x_{i+1} = x_i + \Delta t v_i, \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1, \\
v_0 = V, x_0 = H, v_n = 0, x_n = 0, \\
u_i \geq 0, x_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1.
\end{cases}
$$

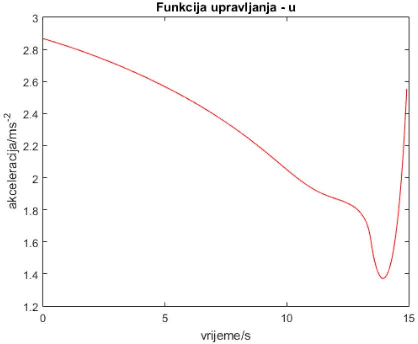
Uz supstituciju $w = (x_1, ..., x_{n-1}, v_1, ..., v_{n-1}, u_0, ...., u_{n-1})$ dobivamo novi zapis:

$$
\begin{cases}
c^T w \to \min \\
Aw \leq b \\
A_c w = b_c.
\end{cases}
$$

koji šaljemo solveru *linprog* u Matlab-u ili Octavi.

# Matlab

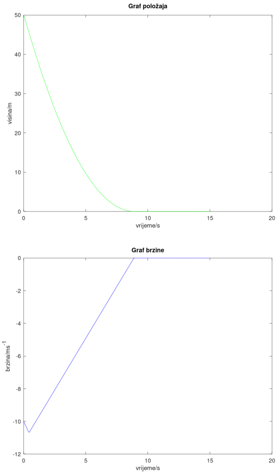


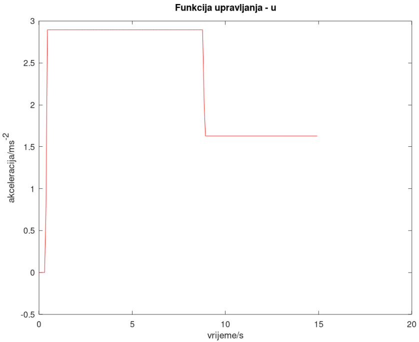




Primjer koda možete pronaći na SoftLandMatlab.m

Vrijednost funkcije cilja % = 459.03

# Octave




Primjer koda možete pronaći na SoftLandOctave.m

Vrijednost funkcije cilja $\% = 459.03$

# Gauss Jordanove transformacije

Neka je $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ baza za vektorski prostor $V$ te vektori $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Ako je $\alpha_l \neq 0$ tada je $(S \setminus \{e_l\}) \cup \{a\}$ baza za $V$. Novi raspis vektora dan je u sljedećoj tablici:

Originalni zapis:

| | $e_1$ | $\dots$ | $e_l$ | $\dots$ | $e_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $\alpha_1$ | $\dots$ | $\alpha_l$ | $\dots$ | $\alpha_n$ |
| $x$ | $x_1$ | $\dots$ | $x_l$ | $\dots$ | $x_n$ |

Novi zapis:

| | $e_1$ | $\dots$ | $a$ | $\dots$ | $e_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_l$ | $-\frac{\alpha_1}{\alpha_l}$ | $\dots$ | $\frac{1}{\alpha_l}$ | $\dots$ | $-\frac{\alpha_n}{\alpha_n}$ |
| $x$ | $\frac{x_1\alpha_l - x_l\alpha_1}{\alpha_l}$ | $\dots$ | $\frac{x_l}{\alpha_l}$ | $\dots$ | $\frac{x_n\alpha_l - x_l\alpha_n}{\alpha_l}$ |

## Zadatak 1

Neka su dani vektori

$$a = (1, -1, 1, 2),\ b = (-1, 2, 0, -1),\ x = (3, -2, 4, 7)$$

Dokažite pomoću GJT da vektor $x$ leži u potprostoru razapet vektorima $a$ i $b$.

## Zadatak 2

Pomoću Gauss-Jordanovih transformacija nađite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

## Zadatak 3

Odredite rang matrice $A$ u ovisnosti o parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Zadatak 4

Pomoću GJT riješite sustav $Ax = b$ gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

## Optimalni plan

Dio simpleks algoritma koji zovemo *optimalni plan* koristimo za rješavanje zadaće:

$$(LP_b) \qquad \left\{ \begin{array}{c} z^T x \to \max \\ \boldsymbol{A}x \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

uz dodatnu pretpostavku da je $b \geq 0$.

**Napomena 1**

*Ako zadaću linearnog programiranja nije moguće zapisati u obliku* $(LP_b)$ *tada je dopustivi skup zadaće prazan. Tada kažemo da je zadaća u kontradikciji.*

# Početna tablica

Kreiranje početne tablice iz $(LP_b)$:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & \ldots & x_n & \\
\hline
w_1 & & & & \\
\vdots & & -A & & b \\
w_m & & & & \\
\hline
 & & z^T & & 0
\end{array}
$$

Uvedimo oznake:

$$x_{n+i} := w_i, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Uvedimo skupove

$$J = \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$I = \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}.$$

Trenutna tablica:

$$
\begin{array}{c|c|c}
 & x_j, \, j \in J & \\
\hline
x_i, \; i \in I & \gamma_{ij} & \beta_i \\
\hline
 & \zeta_j & f
\end{array}
$$

# Optimalni plan

**Iteracija optimalnog plana:**

1) Ako je $\forall j \in J \;\; (\zeta_j \leq 0)$ onda
   za $i := 1$ do $n$ radi
   ako je $i \in I$ onda $x_i^* := \beta_i$
   inače $x_i^* := 0$
   Vrijednost funkcije cilja je $f$, optimalni $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$
   **STOP**
2) Inače, neka je $l := \min\{j \in J,\ \zeta_j > 0\}$
3) Ako je $\forall i \in I \;\; (\gamma_{il} \geq 0)$ onda **STOP**
   Problem nema rješenje jer funkcija cilja nije ograničena odozgo.
4) Inače, neka je $k \in I$ najmanji indeks u kojem se postiže
   $$\min\{-\beta_i/\gamma_{il} \; : \; \gamma_{il} < 0,\ i \in I\}$$
5) Napravi GJT na ključnom mjestu $\gamma_{kl}$ i vrati se na 1)

### Napomena 2

*Kreiranje skupova $I, J$ je suvišno uz sljedeći dogovor rangiranja:*

$$r(x_1) < r(x_2) < ... < r(x_n) < r(w_1) < ... < r(w_m),$$

*čime se biranje najmanjeg indeksa $k \in I$ ustvari interpretira kao biranje elementa retka $x_i$ ili $w_i$ za koji je vrijednost funkcije $r$ najmanja. Analogno, najmanji indeks $l \in J$ je element stupca $x_j$ ili $w_j$ za koji je vrijednost funkcije $r$ najmanja.*

### Napomena 3

*Gornja implementacija optimalnog plana koristi Blandovo pravilo odabira pivotnog elementa. To jamči konačnost algoritma (algoritam ne ulazi u cikluse).*

# Primjer 1

## Primjer 2

$$\begin{array}{rrl} x_1 & +x_2 & \rightarrow \quad \max \\ \\ x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ 2x_1 & -x_2 & \leq 3 \\ -x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ \\ \multicolumn{3}{l}{x_1,\ x_2 \geq 0} \end{array}$$

**Rj:**

# Primjer 1

## Primjer 2

$$
\begin{array}{rrcl}
x_1 & +x_2 & \rightarrow & \max \\
\\
x_1 & -x_2 & \leq 1 & \\
2x_1 & -x_2 & \leq 3 & \\
-x_1 & +x_2 & \leq 1 & \\
\\
\multicolumn{4}{l}{x_1,\ x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

**Rj:** Zapišimo početnu tablicu:

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & x_1 & x_2 & \\
\hline
w_1 & -1 & 1 & 1 \\
w_2 & -2 & 1 & 3 \\
w_3 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

# Primjer 1

| | $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $w_1$ | $\boxed{-1}$ | $1$ | $1$ |
| $w_2$ | $-2$ | $1$ | $3$ |
| $w_3$ | $1$ | $-1$ | $1$ |
| | $1$ | $1$ | $0$ |

# Primjer 1

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & x_1 & x_2 & \\
\hline
w_1 & \boxed{-1} & 1 & 1 \\
w_2 & -2 & 1 & 3 \\
w_3 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{c|cc|c}
 & w_1 & x_2 & \\
\hline
x_1 & -1 & 1 & 1 \\
w_2 & 2 & \boxed{-1} & 1 \\
w_3 & -1 & 0 & 2 \\
\hline
 & -1 & 2 & 1
\end{array}
$$

# Primjer 1

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & x_1 & x_2 & \\
\hline
w_1 & \boxed{-1} & 1 & 1 \\
w_2 & -2 & 1 & 3 \\
w_3 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{c|cc|c}
 & w_1 & x_2 & \\
\hline
x_1 & -1 & 1 & 1 \\
w_2 & 2 & \boxed{-1} & 1 \\
w_3 & -1 & 0 & 2 \\
\hline
 & -1 & 2 & 1
\end{array}
\quad \rightsquigarrow
$$

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & w_1 & w_2 & \\
\hline
x_1 & 1 & -1 & 2 \\
x_2 & 2 & -1 & 1 \\
w_3 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\
\hline
 & 3 & -2 & 3
\end{array}
$$

## Primjer 1

| | $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $w_1$ | $\boxed{-1}$ | $1$ | $1$ |
| $w_2$ | $-2$ | $1$ | $3$ |
| $w_3$ | $1$ | $-1$ | $1$ |
| | $1$ | $1$ | $0$ |

$\rightsquigarrow$

| | $w_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $-1$ | $1$ | $1$ |
| $w_2$ | $2$ | $\boxed{-1}$ | $1$ |
| $w_3$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
| | $-1$ | $2$ | $1$ |

$\rightsquigarrow$

| | $w_1$ | $w_2$ | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $1$ | $-1$ | $2$ |
| $x_2$ | $2$ | $-1$ | $1$ |
| $w_3$ | $\boxed{-1}$ | $0$ | $2$ |
| | $3$ | $-2$ | $3$ |

$\rightsquigarrow$

| | $w_3$ | $w_2$ | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $-1$ | $-1$ | $4$ |
| $x_2$ | $-2$ | $-1$ | $5$ |
| $w_1$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
| | $-3$ | $-2$ | $9$ |

Optimalno rješenje je $(x_1^*, x_2^*) = (4, 5)$ s vrijednosti f-je cilja $\# = 9$.

# Primjer 2

## Primjer 3

Simpleks metodom riješite problem:

$$\begin{cases} -x_1 \quad +2x_2 \quad +4x_3 \quad \to \max \\ x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 \quad \leq 1 \\ x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad \leq 3 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

# Primjer 2

## Primjer 3

Simpleks metodom riješite problem:

$$\begin{cases} -x_1 \quad +2x_2 \quad +4x_3 \quad \to \max \\ x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 \quad \leq 1 \\ x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad \leq 3 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Zapišimo početnu tablicu:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | -1 | 1 | 1 | 1 |
| $w_2$ | -1 | -1 | -1 | 3 |
| $z$ | -1 | 2 | 4 | 0 |

# Primjer 2

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | -1 | 1 | 1 | 1 |
| $w_2$ | -1 | $\boxed{-1}$ | -1 | 3 |
| $z$ | -1 | 2 | 4 | 0 |

# Primjer 2

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
w_1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
w_2 & -1 & \boxed{-1} & -1 & 3 \\
\hline
z & -1 & 2 & 4 & 0
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & w_2 & x_3 & \\
\hline
w_1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\
x_2 & -1 & -1 & \boxed{-1} & 3 \\
\hline
z & -3 & -2 & 2 & 6
\end{array}
$$

# Primjer 2

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | -1 | 1 | 1 | 1 |
| $w_2$ | -1 | $\boxed{-1}$ | -1 | 3 |
| $z$ | -1 | 2 | 4 | 0 |

$\rightsquigarrow$

| | $x_1$ | $w_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | -2 | -1 | 0 | 4 |
| $x_2$ | -1 | -1 | $\boxed{-1}$ | 3 |
| $z$ | -3 | -2 | 2 | 6 |

$\rightsquigarrow$

| | $x_1$ | $w_2$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | -2 | -1 | 0 | 4 |
| $x_3$ | -1 | -1 | -1 | 3 |
| $z$ | -5 | -4 | -2 | 12 |

# Primjer 2

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | -1 | 1 | 1 | 1 |
| $w_2$ | -1 | $\boxed{-1}$ | -1 | 3 |
| $z$ | -1 | 2 | 4 | 0 |

$\rightsquigarrow$

| | $x_1$ | $w_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | -2 | -1 | 0 | 4 |
| $x_2$ | -1 | -1 | $\boxed{-1}$ | 3 |
| $z$ | -3 | -2 | 2 | 6 |

$\rightsquigarrow$

| | $x_1$ | $w_2$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | -2 | -1 | 0 | 4 |
| $x_3$ | -1 | -1 | -1 | 3 |
| $z$ | -5 | -4 | -2 | 12 |

- Rješenje $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 0, 3)$
- Vrijednost f-je cilja #=12