Simpleks metoda - uvjeti jednakosti, slobodne varijable, dualna zadaća

https://web.math.pmf.unizg.hr/
∼petar/prezen/uopt/

11. studenoga 2018.

Zadatak 1

Dokažite da se sljedeći problemi linearnog programiranja mogu svesti jedan na drugi:

a) $\begin{cases} z^T x \to \max \\ Ax \leq b \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} z^T x \to \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} z^T x \to \max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

Napomena 1

Iz dokaza prethodnog zadatka jasno je kako se svaka linearna zadaća može prikazati u standardnom formatu. To nužno nije najbolji pristup ako koristimo simpleks metodu.

Slobodne varijable

Kažemo da je x_j slobodna varijabla ako nema uvjeta $x_j \geq 0$.

Postupak: Ako je $x_j \in \mathbb{R}$ slobodna varijabla prvo napravi GJT tako da x_j prebacimo u redak.
Redak s oznakom x_j zanemarujemo u daljnem simpleks algoritmu (vršimo GJT nad retkom, ali pivotni element ne smije biti odabran u tom retku). Čitanje optimalnog rješenja (ako takav postoji) ostaje isti.

Zadatak 2

Simpleks metodom riješite problem:

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \to \max \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 3 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 6 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 9 \\ \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

Zadatak 2

Simpleks metodom riješite problem:

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \to \max \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 3 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 6 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 9 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \in \mathbb{R} & \end{cases}$$

Zapišimo tablicu:

	x_1	x_2	$\overline{x}_3$	
w_1	-1	-2	-1	3
w_2	1	-1	1	6
w_3	-1	-1	1	9
	2	1	-1	0

	x_1	x_2	$\overline{x}_3$	
w_1	-1	-2	-1	3
w_2	1	-1	1	6
w_3	-1	-1	1	9
	2	1	-1	0

	x_1	x_2	$\overline{x}_3$	
w_1	-1	-2	-1	3
w_2	1	-1	1	6
w_3	-1	-1	1	9
	2	1	-1	0

	x_1	x_2	w_2	
w_1	0	-3	-1	9
$\overline{x}_3$	-1	1	1	-6
w_3	-2	0	1	3
	3	0	-1	6

	x_1	x_2	$\overline{x}_3$	
w_1	-1	-2	-1	3
w_2	1	-1	1	6
w_3	-1	-1	1	9
	2	1	-1	0

	x_1	x_2	w_2	
w_1	0	-3	-1	9
$\overline{x}_3$	-1	1	1	-6
w_3	-2	0	1	3
	3	0	-1	6

	w_3	x_2	w_2	
w_1	0	-3	-1	9
$\overline{x}_3$	1/2	1	1/2	-15/2
x_1	-1/2	0	1/2	3/2
	-3/2	0	1/2	21/2

	x_1	x_2	$\overline{x}_3$	
w_1	-1	-2	-1	3
w_2	1	-1	1	6
w_3	-1	-1	1	9
	2	1	-1	0

	x_1	x_2	w_2	
w_1	0	-3	-1	9
$\overline{x}_3$	-1	1	1	-6
w_3	-2	0	1	3
	3	0	-1	6

	w_3	x_2	w_2	
w_1	0	-3	-1	9
$\overline{x}_3$	1/2	1	1/2	-15/2
x_1	-1/2	0	1/2	3/2
	-3/2	0	1/2	21/2

	w_3	x_2	w_1	
w_2	0	-3	-1	9
$\overline{x}_3$	1/2	-1/2	-1/2	-3
x_1	-1/2	-3/2	-1/2	6
	-3/2	-3/2	-1/2	15

	x_1	x_2	$\overline{x}_3$	
w_1	-1	-2	-1	3
w_2	1	-1	1	6
w_3	-1	-1	1	9
	2	1	-1	0

	x_1	x_2	w_2	
w_1	0	-3	-1	9
$\overline{x}_3$	-1	1	1	-6
w_3	-2	0	1	3
	3	0	-1	6

	w_3	x_2	w_2	
w_1	0	-3	-1	9
$\overline{x}_3$	1/2	1	1/2	-15/2
x_1	-1/2	0	1/2	3/2
	-3/2	0	1/2	21/2

	w_3	x_2	w_1	
w_2	0	-3	-1	9
$\overline{x}_3$	1/2	-1/2	-1/2	-3
x_1	-1/2	-3/2	-1/2	6
	-3/2	-3/2	-1/2	15

Optimalno rješenje $(x_1, x_2, \overline{x}_3) = (6, 0, -3), \quad \# = 15.$

Zadatak 3

Simpleks metodom riješite problem:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl}
9x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & \to \min \\
-x_1 & & & & \leq -1 \\
-x_1 & -x_2 & & & \leq -1 \\
-2x_1 & -x_2 & -x_3 & & \leq -1 \\
-3x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & \leq -1 \\
 & & x_3 & & \leq -1 \\
-6x_1 & -x_2 & -2x_3 & -x_4 & \leq -1 \\
x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \in \mathbb{R}, & x_4 \in \mathbb{R}. &
\end{array}\right.$$

Jednakosti

U i-tom uvjetu umjesto nejednakosti stoji jednakost.

Postupak: Pripadnu varijablu retka w_i prebacujemo GJT među stupce te brišemo stupac koji sadrži w_i.

Napomena 2

Tretiranje jednakosti i slobodnih varijabli radimo na samom početku prije nego što krećemo sa simpleks algoritmom. Redoslijed:

1. *Jednakosti i slobodne variijable*
2. *Prvi plan*
3. *Optimalni plan.*

Zadatak 4

Simpleks metodom riješite problem:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & \to \max \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 5 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & \leq 5 \\ -x_1 & & +x_3 & \leq 2 \\ & x_i \geq 0, & & i = 1, 2, 3. \end{array}\right.$$

Zadatak 4

Simpleks metodom riješite problem:

$$
\begin{cases}
-x_1 & +2x_2 & +x_3 & \rightarrow \max \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & = 5 \\
x_1 & +2x_2 & -3x_3 & \leq 5 \\
-x_1 & & +x_3 & \leq 2 \\
& x_i \geq 0, & & i = 1, 2, 3.
\end{cases}
$$

Početna tablica:

	x_1	x_2	x_3	
$\overline{w}_1$	-1	-1	-1	5
w_2	-1	-2	3	5
w_3	1	0	-1	2
	-1	2	1	0

	x_1	x_2	x_3	
$\overline{w}_1$	-1	-1	-1	5
w_2	-1	-2	3	5
w_3	1	0	-1	2
	-1	2	1	0

	x_1	x_2	x_3	
$\overline{w}_1$	-1	-1	-1	5
w_2	-1	-2	3	5
w_3	1	0	-1	2
	-1	2	1	0

	$\overline{w}_1$	x_2	x_3	
x_1	-1	-1	-1	5
w_2	1	-1	4	0
w_3	-1	-1	-2	7
	1	3	2	-5

	x_1	x_2	x_3	
$\overline{w}_1$	-1	-1	-1	5
w_2	-1	-2	3	5
w_3	1	0	-1	2
	-1	2	1	0

	$\overline{w}_1$	x_2	x_3	
x_1	-1	-1	-1	5
w_2	1	-1	4	0
w_3	-1	-1	-2	7
	1	3	2	-5

	w_2	x_3	
x_1	1	-5	5
x_2	-1	4	0
w_3	1	-6	7
	-3	14	-5

	x_1	x_2	x_3	
$\overline{w}_1$	-1	-1	-1	5
w_2	-1	-2	3	5
w_3	1	0	-1	2
	-1	2	1	0

	$\overline{w}_1$	x_2	x_3	
x_1	-1	-1	-1	5
w_2	1	-1	4	0
w_3	-1	-1	-2	7
	1	3	2	-5

	w_2	x_3	
x_1	1	-5	5
x_2	-1	4	0
w_3	1	-6	7
	-3	14	-5

	w_2	x_1	
x_3	1/5	-1/5	1
x_2	-1/5	-4/5	4
w_3	-1/5	6/5	1
	-1/5	-14/5	9

	x_1	x_2	x_3	
$\overline{w}_1$	-1	-1	-1	5
w_2	-1	-2	3	5
w_3	1	0	-1	2
	-1	2	1	0

	$\overline{w}_1$	x_2	x_3	
x_1	-1	-1	-1	5
w_2	1	-1	4	0
w_3	-1	-1	-2	7
	1	3	2	-5

	w_2	x_3	
x_1	1	-5	5
x_2	-1	4	0
w_3	1	-6	7
	-3	14	-5

	w_2	x_1	
x_3	1/5	-1/5	1
x_2	-1/5	-4/5	4
w_3	-1/5	6/5	1
	-1/5	-14/5	9

Optimalno rješenje $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 4, 1), \quad \# = 9.$

Zadatak 5

Simpleks metodom riješite problem:

$$\begin{cases}
3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 - 2x_5 \to \max \\
-x_1 + x_3 + x_5 = -1 \\
-x_2 + x_4 - x_5 \leq 1 \\
-3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\
x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.
\end{cases}$$

Zadaci za vježbu

Zadatak 6

1. *Koristeći GJT riješite sustav* $Ax = b$ *gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. *Ima li zadaća*

$$\begin{cases} z^\tau x \to \max \\ Ax = b \end{cases}$$

rješenje gdje je $z = (0, 3, 4, 1)^\tau$*? Je li jedinstveno?*

Zadatak 7

Kamionom nosivosti 5 tona treba iz Karlovca u Zagreb prebaciti 8 sanduka od 2 tone i 12 sanduka od 1.5 tone. Nađite raspored punjena kamiona uz koji je broj vožnji minimalan.

Zadatak 8

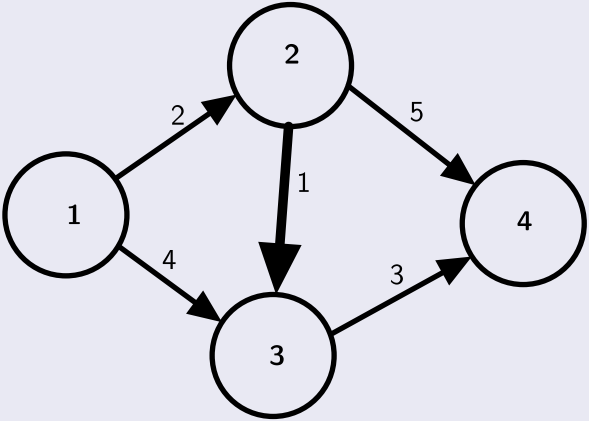
Investitor ima početni kapital od 50 000€ *koji povećava ulaganjem. Na početku svake godine može uložiti u neki dostupan fond čime je uložen novac nedostupan do isteka trajanja fonda. Ulaganjem u investicijski fond A na početku godine ostvaruje profit od* 40% *dvije godine kasnije. Fond B ima dobitak od* 70%, *s time da je novac dostupan tek nakon tri godine. Fond C je za razliku od prethodnih fondova dostupan tek u drugoj godini i ima profit od* 90% *te trajanje od četiri godine. U isti tip fonda može se ulagati svake godine (ako je isti dostupan te ima novaca). Investitor se želi povući na početku šeste godine s maksimalanim profitom. Zapišite problem kao zadaću linearnog programiranja.*

Zadatak 9

Tvornica sladoleda treba izraditi plan proizvodnje za iduću godinu. Njihovo predviđanje je da će i-tog mjeseca u godini prodati d_i tona sladoleda. Promjena u količini proizvodnje iz mjeseca u mjesec iznosi 350 *kn po toni, a trošak skladištenja za mjesec dana iznosi* 140 *kn po toni. Postavite optimalni plan proizvodnje kao problem linearnog programiranja.*

Zadatak 10

Serveri su dani kao na slici. Želimo poslati poruku od (1) do (4). Strelice predstavljaju mogućnost slanja poruke između dva servera, dok brojevi uz strelice označavaju vrijeme prijenosa jedinične poruke. Cilj je poslati što brže poruku. Zapišite zadaću linearnog programiranja i riješite problem.



Zadatak 11

Investitor ima portfelj (portfolio) od n različitih dionica. Kupio je s_i dionica pod cijenom od $p_i, i = 1, \ldots, n$. Trenutna cijena dionice i je q_i. Investitor očekuje da će cijena dionice sljedeće godine biti r_i. Ako proda dionicu investitor treba platiti cijenu transakcije u vrijednosti od 1% ukupne vrijednosti transakcije. Dodatno, investitor plaća porez u vrijednosti od 30% kapitalnog dobitka. Na primjer, neka investitor proda 1000 dionica po vrijednosti od 50kn koje je kupio po 30kn. Tada će dobiti 50 000kn, no duguje porez na kapitalni dobitak od $0.3 \cdot (50\,000 - 30\,000) = 6\,000$kn te cijenu transakcije od $0.01 \cdot 50\,000 = 500$ kn. Dakle, prodajući je dobio novac od $50\,000 - 6\,000 - 5\,00 = 43\,500$ kn. Formulirajte problem uz koji će investitor prodajom dionica zaraditi K novaca uz cilj maksimizacije očekivane vrijednosti portfelja.

Nap: *Vrijednost portfelja je suma umnoška broja i vrijednosti dionica u portfelju.*

Dualnost

Neka je

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \max c^\tau x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Primarnoj dualnoj zadaći odgovara dualna zadaća

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \min b^\tau y \\ A^\tau y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Označimo s $\mathcal{P}, \mathcal{D}$ dopustivi skup primarne odnosno dualne zadaće.
Svojstva dualne zadaće:

- dualna zadaća dualne zadaće je opet primarna zadaća
- slaba dualnost: $\max\limits_{x \in \mathcal{P}} c^\tau x \leq \min\limits_{y \in \mathcal{D}} b^\tau y$

Teorem 1

Ako oba problema (P) *i* (D) *imaju rješenja (funkcija cilja nije neograničena ili dopustivi skup prazan) tada za optimalni* x^* *od zadaće* (P) *te optimalni* y^* *od zadaće* (D) *vrijedi:*

$$c^T x^* = b^T y^* \quad \textit{(jaka dualnost)}.$$

Propozicija 1

Neka je $\mathcal{D}/\mathcal{P}$ *neprazan. Tada je* $\mathcal{P}/\mathcal{D} = \emptyset$ *ako i samo ako je dualna/primarna funkcija cilja neograničena.*

Napomena 3

Ako zadaće nemaju rješenje to znači da:

1. *obje zadaće imaju prazan dopustivi skup (kontradiktorne su)*
2. *zadaća* (P)/(D) *ima neograničenu f-ju cilja i zadaća* (D)/(P) *je kontradiktorna.*

Tablica prijelaza iz primarnog problema (P) u dualni problem (D)

		(P)	(D)
varijable		$x_1, \dots, x_n$	$y_1, \dots, y_m$
matrice		A	A^τ
desna strana		b	c
f-ja cilja		$c^\tau x \to \max$	$b^\tau y \to \min$
i-ti uvjet od (P)	i-ta varijabla od (D)	$(Ax)_i \left\{ \begin{matrix} \leq \\ = \end{matrix} \right\} b_i$	$y_i \geq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
j-ta varijabla od (P)	j-ti uvjet od (D)	$x_j \geq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	$(A^\tau x)_j \left\{ \begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} \right\} c_j$

Napomena 4

Prethodnu tablicu možemo čitati i tablicom prijelaza iz dualnog problema (D) *u primarni problem* (P).

Zadatak 12

Zadani su vektori $z \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ i matrica $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dokažite da je dual linearne zadaće $(*)$ sa slobodnim varijablama linearna zadaća (Δ) s jednakostima.

$$(*)\begin{cases} z^\tau x \to max \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (\Delta)\begin{cases} b^\tau y \to \min \\ A^\tau y = z \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Zadatak 13

Neka je dana zadaća:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \to \max \\ -x_1 - x_2 \leq -2 \\ x_1 - x_2 \leq -1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. *Riješite ju simpleks metodom. Možete li iz završne tablice simpleks metode zaključiti je li dobiveno rješenje jedinstveno? Odgovor obrazložite.*
2. *Zapišite dualnu zadaću i pomoću rješenja iz prijašnjeg dijela zapišite njeno rješenje.*

1)

	x_1	x_2	
w_1	1	1	-2
w_2	-1	1	-1
w_3	0	-1	3
	1	-1	0

1)

	x_1	x_2	
w_1	1	1	-2
w_2	-1	1	-1
w_3	0	-1	3
	1	-1	0

	w_1	x_2	
x_1	1	-1	2
w_2	-1	2	-3
w_3	0	-1	3
	1	-2	2

1)

	x_1	x_2	
w_1	1	1	-2
w_2	-1	1	-1
w_3	0	-1	3
	1	-1	0

	w_1	x_2	
x_1	1	-1	2
w_2	-1	2	-3
w_3	0	-1	3
	1	-2	2

	w_1	w_2	
x_1	1/2	-1/2	1/2
x_2	1/2	1/2	3/2
w_3	-1/2	-1/2	3/2
	0	-1	-1

1)

	x_1	x_2	
w_1	1	1	-2
w_2	-1	1	-1
w_3	0	-1	3
	1	-1	0

	w_1	x_2	
x_1	1	-1	2
w_2	-1	2	-3
w_3	0	-1	3
	1	-2	2

	w_1	w_2	
x_1	1/2	-1/2	1/2
x_2	1/2	1/2	3/2
w_3	-1/2	-1/2	3/2
	0	-1	-1

Optimalno rješenje

$$(x_1^*, x_2^*) = (1/2, 3/2), \quad \# = -1.$$

1)

	x_1	x_2	
w_1	1	1	-2
w_2	-1	1	-1
w_3	0	-1	3
	1	-1	0

	w_1	x_2	
x_1	1	-1	2
w_2	-1	2	-3
w_3	0	-1	3
	1	-2	2

	w_1	w_2	
x_1	1/2	-1/2	1/2
x_2	1/2	1/2	3/2
w_3	-1/2	-1/2	3/2
	0	-1	-1

Optimalno rješenje
$$(x_1^*, x_2^*) = (1/2, 3/2), \quad \# = -1.$$

Rješenje nije jedinstveno jer GJT na poziciji (3,1) daje drugo optimalno rješenje $(x_1^*, x_2^*) = (2, 3)$.

2) pripadna dualna zadaća
$$\begin{cases} -2y_1 & -y_2 & +3y_3 & \to \min \\ -y_1 & +y_2 & & \geq 1 \\ -y_1 & -y_2 & +y_3 & \geq -1 \\ & y_i \geq 0, & & i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

	$w_1/-y_1$	$w_2/-y_2$	
x_1/u_1	1/2	-1/2	1/2
x_2/u_2	1/2	1/2	3/2
w_3/y_3	-1/2	-1/2	3/2
	0	-1	-1

Optimalno rješenje čitamo iz posljednje tablice iz 1) dijela zadatka.

$$(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0)$$

Uvjeti komplementarnosti

Za zadaću (P) definiramo pomoćni vektor

$$w := b - Ax, \quad w \geq 0.$$

Slično za zadaću (D) definiramo pomoćni vektor

$$u := A^\tau y - c, \quad u \geq 0$$

Iz jaku dualnosti za optimalna rješenja $c^\tau x^* = y^{*\tau} b$ dobivamo *uvjete komplementarnost*:

$$\begin{aligned} x_j^* u_j^* &= 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ y_i^* w_i^* &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

gdje je $w^* = b - Ax^*$ i $u^* = A^\tau y^* - c$.
Nap: Ako postoje x^*, y^* takvi da vrijede uvjeti komplementarnosti onda su x^*, y^* optimalna rješenja.

Zadatak 14

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \min \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

zapišite dualnu zadaću. Dualnu zadaću riješite grafički i pomoću uvjeta komplementarnosti odredite rješenje polazne zadaće.

Zadatak 15

Zadan je problem linearnog programiranja:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl}
x_1 & -2x_2 & +5x_3 & -7x_4 & +3x_5 & \to \max \\
x_1 & +x_2 & -3x_3 & +x_4 & -x_5 & \leq 10 \\
2x_1 & -x_2 & +5x_3 & +2x_4 & +6x_5 & \leq 8 \\
-x_1 & & +7x_3 & -2x_4 & -x_5 & \leq -2 \\
 & -x_2 & -2x_3 & & & \leq -6 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.}
\end{array}\right.$$

- *Zapišite dualni problem.*
- *Pokažite da je* $\boldsymbol{x}^* = (33/4, 6, 0, -7/2, 3/4)$ *iz dopustivog skupa primarne zadaće optimalno rješenje.*