Varijacijske zadaće i Lagrangeovi množitelji

P. Kunštek, M. Vrdoljak, 2025/26.

Literatura:

1. K. Ito, K. Kunisch. *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*, SIAM, 2008.
2. A. Henrot, M. Pierre. *Shape variation and optimization*, EMS, 2018.
3. V. Barbu, T. Precupanu. *Convexity and optimization in Banach spaces* (4th ed.), Springer, 2012.
4. M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich. *Optimization with PDE Constraints*, Springer, 2009.

Dodatna literatura:

5. I. Ekeland, R. Temam. *Convex analysis and variational problems*, SIAM, 1999.
6. D. Bertsekas. *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods,* Athena Scientific, 1996.
7. W. Schirotzek. *Nonsmooth analysis*, Springer, 2007.
8. D. Luenberger. *Optimization by vector space methods*, Wiley, 1969.
9. R.T. Rockafellar, R.J.-B. Wets. *Variational analysis*, Springer, 2009.

Uvod

Varijacijska zadaća:

$$\begin{cases} \min\limits_{y\in Y,\, u\in U} f(y,u) \\ e(y,u)=0 \\ g(y,u)\in K \end{cases}$$

$f: Y\times U\to\mathbb{R}$, $e: Y\times U\to W$, $g: Y\times U\to Z$

Y, U, W, Z Banachovi prostori

$K\subseteq Z$ zatvoren konveksan skup u Z

Pojednostavljeno:
uz $(y,u)=x$
$Y\times U = X$

$$\begin{cases} f(x)\to\min \\ e(x)=0 \\ g(x)\in K \end{cases}$$

Npr. za $X=\mathbb{R}^n$ zadaća nelinearnog programiranja

$$\begin{cases} f(x)\to\min \\ h_i(x)=0, \quad i=1\ldots m \\ g_j(x)\le 0, \quad j=1\ldots l \end{cases}$$

No ipak – prvenstveno se bavimo beskonačnodim. prostorima

Primjer: Osnovna zadaća varijacijskog računa

$$\int_a^b L(t,y(t),\dot y(t))\,dt \to \min \qquad \dot y = u \ \ldots\ldots\ e$$

$$y(a),\ y(b) \text{ fiksirani } \ldots\ldots\ g, K$$

Prirodno se nameću općenitije zadaće u kojima postavljamo dodatne uvjete na y tj. u ili pak y u zadaće optimalnog upravljanja.

<u>Primjer:</u> Optimalno gibanje rakete

$$\ddot{y} = u - g \quad , \quad 0 \leq u(t) \leq \beta$$

$$y(0) = 0, \quad y(T) = h$$

uz minimalnu potrošnju goriva $\int_0^T u(t)\,dt \to \min$

<u>Primjer</u>
$$\begin{cases} -\Delta y = 0 & u\ \Omega \quad (\text{stac. prov. topl.}) \\ k\dfrac{\partial y}{\partial \nu} + y = u & \text{na } \partial\Omega \quad (\text{Robinov. r.u.}) \end{cases}$$

$$a \leq u \leq b \quad \text{na } \partial\Omega$$

$$f(y,u) = \int_\Omega \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 dx + \alpha \int_{\partial\Omega} u^2\, dS$$

$\uparrow$
željena temperatura

<u>Primjer</u>
$$-\operatorname{div}(a \nabla y) = f \quad u\ \Omega, \quad y = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

$$\alpha \leq a \leq \beta \quad \dots \text{ upravljanje}$$

Topl. energija $\int_\Omega f y \to \min/\max$

Lagrangeovi multiplikatori u naslovu sugeriraju pristup preko dualnosti.

Ciljevi:

- postojanje rješenja
- uvjeti optimalnosti: nužni / dovoljni
- analiza osjetljivosti
- numeričke metode
- razne primjene, a posebno u optimizaciji oblika

1. Osnovni pojmovi

Na kolegiju ćemo standardno raditi s normiranim prostorima (najčešće Banachovim)

1.1. Separacija

⇝ separacija konveksnih skupova hiperravninom (zatvorenom)

X normiran (ili općenitije lokalno konveksan topološki vektorski prostor)

X' dual , $\langle \cdot , \cdot \rangle$ djelovanje f-la na X

$\varphi \in X'$ $\quad \langle \varphi, x \rangle = \varphi(x)$

Po potrebi pišemo $\langle \, , \, \rangle_{X', X}$

Hiperravnina $\{x \in X : \langle \varphi, x \rangle = \beta\}$, φ netriv. lin. funkcional

Zatvorena hiperravnina $\Leftrightarrow \varphi \in X'$

<u>Teorem 1.1</u> (Geometrijska verzija Hahn-Banachovog teorema) Neka su A i B disjunktni konveksni skupovi u X.

a) Ako je A otvoren onda postoji $\varphi \in X'$ i $\beta \in \mathbb{R}$ takvi da

$$\langle \varphi, a \rangle < \beta \leq \langle \varphi, b \rangle, \quad a \in A, b \in B$$

(A i B su separirani zatvorenom hiperravninom)

b) Ako je A kompaktan i B zatvoren onda postoji $\varphi \in X'$ i $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ takvi da

$$\langle \varphi, a \rangle < \beta_1 < \beta_2 < \langle \varphi, b \rangle \quad , a \in A, b \in B$$

(A i B su jako separirani)

<u>Dokaz</u>: a) Minkowskijev funkcional skupa S koji sadrži 0: za $x \in X$

$$p_S(x) = \inf \{ t > 0 : \tfrac{1}{t} x \in S \} \in [0, +\infty]$$

Svojstva:

i) $p_S(x) \geq 0$, $x \in X$; $S \subseteq \{ x \in X : p_S(x) \leq 1 \}$

ii) p_S je pozitivno homogena

iii) Ako je S konveksan, p_S je aditivna

Neka su $a_0 \in A$ i $b_0 \in B$, $x_0 := b_0 - a_0$

$$C = A - B + x_0$$

C je otvoren, konveksan, sadrži 0

p_C je konačna, $p_C(x_0) \geq 1$ jer $x_0 \notin C$ ($0 \notin A-B$)

Definiramo lin. funkcional na $\{ \lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R} \}$:

$$\langle \varphi_0, t x_0 \rangle = t$$

Vrijedi $\varphi_0 \leq p_C$. Prema Hahn-Banachovom teoremu, postoji $\varphi \in X'$, proširenje od φ_0 koje zadovoljava $\varphi \leq p_C$

Dakle,

$$\langle \varphi, a\rangle - \langle \varphi, b\rangle + 1 = \langle \varphi, a-b+x_0\rangle \leq p(a-b+x_0) \leq 1, \quad \begin{matrix} a\in A \\ b\in B \end{matrix}$$

$$\langle \varphi, a\rangle < \sup_{a\in A} \langle \varphi, a\rangle \leq \langle \varphi, b\rangle, \quad a\in A, b\in B$$

b) Kako je A kompaktan, a B zatvoren, $A\cap B = \emptyset$ to postoji $\varepsilon > 0$ t.da

$$\left(A + \overline{B}(0,\varepsilon)\right) \cap \left(B + \overline{B}(0,\varepsilon)\right) = \emptyset$$

Primijenimo tvrdnju a) na $A + B(0,\varepsilon)$ i B

$$\langle \varphi, a\rangle \leq \underset{\substack{a\in A \\ (\text{tj. max})}}{\sup} \langle \varphi, a\rangle < \sup_{x\in A+B(0,\varepsilon)} \langle \varphi, a\rangle \leq \langle \varphi, b\rangle, \quad a\in A, b\in B$$

<u>Korolar 1.2</u> Konveksan skup $K \subseteq X$ (LCTVS), $K \neq X$ je zatvoren ako i samo ako se podudara s presjekom zatvorenih poluprostora

<u>Dokaz</u>: $\boxed{\Leftarrow}$ triv.

$\boxed{\Rightarrow}$ $$K = \bigcap_{\substack{S \text{ zatv. polupr.} \\ K\subseteq S}} S$$

$\boxed{\subseteq}$ triv $\boxed{\supseteq}$ dokazujemo $K^c \subseteq (\cap S)^c = \cup S^c$

Za $x_0 \notin K$ postoji $\varphi \in X'$: $\langle \varphi, x_0\rangle > \beta = \sup_{x\in K} \langle \varphi, x\rangle$

Korolar 1.3 Neka je K zatvoren, konveksan skup u X (LCTVS). Tada je K slabo zatvoren.

Korolar 1.4. (Mazurova lema) Ako niz (x_n) u X (LCTVS, zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti) slabo konvergira prema x tada postoji niz (y_n) sačinjen od konveksnih kombinacija niza (x_n) koji konv. jako prema x.

Dokaz: $K = cl\ conv(x_n)$ sadrži x;

Korolar 1.5 U refleksivnom Banachovom prostoru, ako su A, B konveksni i zatvoreni, bar jedan ograničen, onda su A i B jako separirani zatvorenom hiperravninom.

Dokaz: Primijenimo Tm 1.1.b) uz slabu top. $\sigma(X, X')$. Ograničen i slabo zatvoren skup je u toj topologiji kompaktan (Eberlein-Šmulian tm)

1.2. Diferencijalni račun u normiranim prostorima

$A \subseteq X$ otvoren, X normiran, $f: A \to Y$, Y normir.

Derivacija u smjeru $d \in X$ u točki $x \in A$:

$$f'(x;d) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

Ako je f derivabilna u svakom smjeru u točki x preslikavanje

$$\underset{X}{d} \longmapsto f'(x;d)$$

nazivamo prvom varijacijom presl. f u točki x.

<u>Primjer</u> $f(x) = |x|$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(0;1) = 1 = f'(0;-1)$$

$f'(x;\cdot)$ je općenito pozitivno homogena

Ako je prva varijacija u x linearna i ograničena kažemo da je f Gateaux-diferencijabilna u x.

Pišemo $$D_G f(x) = f'(x;\cdot)$$

iz definicije: $D_G f(x)$ je linearan ogr. operator ($D_G f(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$) takav da

$$f(x+\lambda h) = f(x) + \lambda D_G f(x) h + r(\lambda, h)$$

pri čemu je $\quad r(\lambda,h) = o(\lambda)$ za neki $h \in X$

$$\left(\frac{o(\lambda)}{|\lambda|} \to 0 \text{ kad } \lambda \to 0 \right)$$

Ako vrijedi

$$f(x+h) = f(x) + \Lambda h + o(h)$$

za $\Lambda \in \mathcal{L}(X,Y)$ kažemo da je f Frechet diferencijabilna u x, oznaka $\Lambda = D_F f(x)$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall h \in X) \; \|h\|_X < \delta \Rightarrow$$

$$\|f(x+h) - f(x) - D_F f(x) h\|_Y < \varepsilon \|h\|$$

Jači pojam diferencijabilnosti: stroga diferencijabilnost u točki x

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in U) \; \|x_1 - x\|_X < \delta \;\&\; \|x_2 - x\|_X < \delta$$

$$\Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2) - \Lambda(x_1 - x_2)\|_Y < \varepsilon \|x_1 - x_2\|$$

Očite veze među pojmovima:

$$\begin{array}{ccccc} \text{stroga dif u } x & \Rightarrow & \text{Frechetova dif u } x & \Rightarrow & \text{Gateauxova dif u } x \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \text{Lipsch. neprekidnost na okolini od } x & & \text{neprekidnost u } x & & \end{array}$$

Obrati ne vrijede:

<u>Primjer</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 = x_2^2,\ x_2 > 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$

$D_G f(0,0)h = 0$, $h \in \mathbb{R}^2$, ima prekid u 0

<u>Primjer</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$

$f'(0) = 0$ (Frechetov dif. $h \mapsto f'(0)h$)

f nije neprekidna niti na jednoj okolini 0

Još malo zanimljivih primjera:

<u>Primjer</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

neprekidna, nema derivaciju u 0 niti u jednom smjeru (± 1)

<u>Primjer</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana u polarnim koordinatama $f(x) = r\cos 3\varphi$

$f'(0;h) = t\cos\alpha$ no $h \mapsto f'(0;h)$ nije linearno
(gdje su t i α pol. koor. za h)

te $A: U \to \mathcal{L}(Y,Z)$

Zadatak 1.6 Ako su $F_1, F_2 : U \to Y$, $U \subseteq X$ otv, X, Y normirani, diferencijabilna u x u nekom od 3 smisla (ili čak u smjeru h), onda je

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Phi = A F_1$$

diferencijabilno u istom smislu i

$$F'(x;h) = \alpha_1 F_1'(x;h) + \alpha_2 F_2'(x;h)$$

$$\Phi'(x;h) = A'(x;h) F_1(x) + A(x) F_1'(x;h)$$

Primjeri

1) Afino pres $A : X \to Y$, $A = \Lambda x + a$, $\Lambda \in \mathcal{L}(X,Y)$

$$D_F A(x) = \Lambda$$

2) X unitarni $\langle \, | \, \rangle$ skalarni produkt

$$Q(x) = \langle Ax \mid x \rangle$$

$$D_F Q(x) h = \langle Ax \mid h \rangle + \langle Ah \mid x \rangle =$$

$$= \langle (A + A^*) x \mid h \rangle$$

X realan $\qquad A^*$ adjungirani op

3) $U \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ - skup svih invertibilnih operatora

U je otvoren i $\Phi : U \to \mathcal{L}(Y,X)$, $\Phi(A) = A^{-1}$

$$D_F (A) H = -A^{-1} H A^{-1}$$

4) $f, g : \underbrace{C([0,1])}_{X} \to \mathbb{R}$, X Banachov uz max normu.

$f(x) = \int_0^1 x(t)\, dt$ linearno neprekidno

$g(x) = x(0)$ — " —

5) $f : C([0,1]) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \int_0^1 x^3(t)\, dt$ . . .

$D_F f(x)\, h = 3 \int_0^1 x^2(t)\, h(t)\, dt$

Teorem 1.7 (diferencijabilnost kompozicije)

Neka su X, Y, Z normirani, U okolina od $x \in X$, V okolina od $y \in Y$, $\varphi(x) = y$ za $\varphi : U \to V$ te $f = \psi \circ \varphi : U \to Z$ za $\psi : V \to Z$. Ako je ψ Frechet-diferencijabilna u y a φ F ili G-diferencijabilna u x (ili ima derivaciju u x u smjeru h) onda je f diferencijabilna u istom smislu kao i φ te:

$$f'(x; h) = D_F \psi(y)\, \varphi'(x; h)$$

Teorem 1.8 (srednje vrijednosti)

X, Y normirani, $U \subseteq X$ otvoren, $[a,b] \subseteq U$,

Ako je $f : U \to Y$ G-diferencijabilna u svakoj točki segmenta $[a,b]$ tada je

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq \sup_{c \in \langle a,b \rangle} \|D_G f(c)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|b-a\|_X$$

Dokaz: Za proizvoljan $y' \in Y'$ definiramo $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\phi(t) = \langle y', f(a+t(b-a)) \rangle_{Y',Y}, \quad t \in [0,1]$$

$$\phi'(t) = \langle y', D_G f(a+t(b-a))(b-a) \rangle$$

$$\Rightarrow \phi \text{ neprekidna} \overset{\text{Lagr.}}{\Longrightarrow} \exists \theta \in \langle 0,1 \rangle$$

$$\langle y', f(b) - f(a) \rangle = \phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta)$$

$$= \langle y', D_G f(a+\theta(b-a))(b-a) \rangle$$

Prema Hahn-Banachovom teoremu, za $y = f(b) - f(a)$ postoji $y' \in Y'$ t.d. je $\|y'\|_{Y'} = 1$ i $\langle y', y \rangle = \|y\|_Y$

Za takav y' imamo

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq \|y'\|_{Y'} \|D_G f(a+\theta(b-a))(b-a)\|_Y$$

$$\leq \sup_{\theta \in \langle 0,1 \rangle} \|D_G f(a+\theta(b-a))\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|b-a\|_X$$

Korolar 1.9: Uz pretp. preth. teorema, za $\Lambda \in \mathcal{L}(X,Y)$ vrijedi

$$\|f(b)-f(a)-\Lambda(b-a)\| \leq \sup_{c\in\langle a,b\rangle} \|D_G f(c)-\Lambda\| \|b-a\|$$

Dokaz: Primijeniti teorem na $g(x)=f(x)-\Lambda x$

Korolar 1.10: Neka su X, Y normirani, $U \subseteq X$ otv., $\hat{x} \in U$, $f: U \to Y$ G-dif na U. Ako je preslikavanje $x \longmapsto D_G f(x)$ neprekidno u $\hat{x}$ onda je f strogo diferencijabilna u $\hat{x}$.

Dokaz: Za $\varepsilon > 0$ neka je $\delta > 0$ t.da

$$\|x-\hat{x}\| < \delta \Rightarrow \|D_G f(x) - D_G f(\hat{x})\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$$

Ako su $x_1, x_2 \in U$, $\|x_1-\hat{x}\| < \delta$, $\|x_2 - \hat{x}\| < \delta$ onda za $\forall\, t\in[0,1]$: $x=(1-t)x_1+tx_2$ vrijedi ista ocjena

$$\Rightarrow \|D_G f(x) - D_G f(\hat{x})\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$$

Prema Kor 1.9 slijedi

$$\|f(x_1)-f(x_2)-D_G(\hat{x})(x_1-x_2)\|_Y \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\langle x_1,x_2\rangle} \|D_G f(x) - D_G f(\hat{x})\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon \|x_1-x_2\|_X$$

Za f koja zadovoljava pretp. Korolara 1.10 u svakoj točki $x \in U$ kažemo da je klase C^1 na U. (Zbog Korolara možemo pisati $D_p f(x)$ umjesto $D_q f(x)$)

Primjer Operator Nemitskog : C-verzija

$\mathcal{O}$ otvoren u $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$

$f, \frac{\partial f}{\partial x}$ (Jacobijeva matrica po x) neprekidne

$$\mathcal{U}=\{x\in C([a,b];\mathbb{R}^n) : (t,x(t))\in\mathcal{O}, t\in[a,b]\}$$

Operator Nemitskog: $N_f:\mathcal{U}\to C([a,b];\mathbb{R}^m)$

$$N_f(y)(t)=f(t,y(t))$$

(kompozicija neprekidnih funkcija)

$\mathcal{U}$ je otvoren u $C([a,b];\mathbb{R}^n)$, uz max normu.

Lema 1.11: Operator Nemitskog je klase C^1.

Dokaz (osnovne ideje) Krećemo od derivacije u njim:

$$N_f'(y;h)(t)=\lim_{\alpha\searrow 0}\frac{f(t,y(t)+\alpha h(t))-f(t,y(t))}{\alpha}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(t,y(t))h(t)=N_{\frac{\partial f}{\partial x}}(y)(t)h(t) \qquad h\in C([a,b];\mathbb{R}^n),\ t\in[a,b]$$

No moramo imati limes u prostoru $C([a,b];\mathbb{R}^m)$, dakle uniformno po t

Za dani $y\in\mathcal{U}$ uvedemo

norma na $\mathbb{R}^n$

$$K=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1} : |x-y(t)|\le\varepsilon,\ t\in[a,b]\}\subseteq\mathcal{O}$$

za dovoljno mali $\varepsilon>0$; K kompaktan

Na K je $\frac{\partial f}{\partial x}$ uniformno neprekidna: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t',x') - \frac{\partial f}{\partial x}(t'',x'')\right| < \varepsilon$$

čim je $|t'-t''|<\delta$ i $|x'-x''|<\delta$

$$\left\| \frac{N_f(y+\alpha h) - N_f(y)}{\alpha} - N_{\frac{\partial f}{\partial y}}(y)h \right\|_{C([a,b];\mathbb{R}^m)}$$

tm. sr. vr. (komočkasti -)

$$\leq \max_{t\in[a,b]} \max_{\theta\in[0,1]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, y(t)+\theta\alpha h(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,y(t))\right\| |h(t)|$$

↳ operatorska norma na $M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\leq \varepsilon \|h\|_{C([a,b];\mathbb{R}^n)}$$

↳ čim je $\alpha < \frac{\delta}{\|h\|_{C([a,b];\mathbb{R}^n)}}$ (obostrani limes) $\lim_{\alpha\downarrow 0} \rightsquigarrow \lim_{\alpha\to 0}$

Dakle,

$$N_f'(y;h) = N_{\frac{\partial f}{\partial x}}(y)h$$

Linearnost po h i ograničenost je očita:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,y(t))h(t)\right| \leq \left(\max_{t\in[a,b]} \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,y(t))\right\|\right)\|h\|_{C([a,b])}$$

$\rightsquigarrow$ Gateauxova diferencijabilnost

Još treba pokazati neprekidnost $y \longmapsto D_G N_f(y)$

$$\|D_a N_f(x) - D_a N_f(y)\| = \sup_{\|h\|_C \le 1} \left\|N_{\frac{\partial f}{\partial x}}(x)h - N_{\frac{\partial f}{\partial x}}(y)h\right\|_C$$

$$= \sup_{\|h\|_C \le 1} \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))h(t) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, y(t))h(t) \right|$$

$$\le \max_{t \in [a,b]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, y(t)) \right\|_{M_{n,n}(\mathbb{R})}$$

Ponovno koristimo K i unif neprekidnost od $\frac{\partial f}{\partial x}$ na K pa slijedi tvrdnja $\square$

<u>L^p verzija</u> Radi jednostavnosti uzmimo $n=m=1$, no umjesto $[a,b]$ uzmimo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ izmjeriv.

$f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je Carathéodorijeva ako

(c)
$u \longmapsto f(x,u)$ je neprekidna za ss $x \in \Omega$
$x \longmapsto f(x,u)$ je izmjeriva za svaki u

Ako je $u: \Omega \to \mathbb{R}$ izmjeriva onda je i

$$x \longmapsto f(x, u(x)) = N_f(u)(x)$$

izmjeriva (ako je φ_n niz jednostavnih fja koji aproksimira u skoro svuda na Ω onda prema (c) je $N_f(\varphi_n)$ izmjeriva i konvergira skoro svuda prema $N_f(u)$)

Neka su $p, q \geq 1$ i

$$|f(x,u)| \leq a + b|u|^{\frac{p}{q}}$$

za neke konstante a, b. Pretp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ omeđen

Lema 1.12 N_f je neprekidan s $L^p(\Omega)$ u $L^q(\Omega)$.

Dokaz: Slika $N_f(L^p(\Omega))$ je sadržana u $L^q(\Omega)$ zbog gornje ocjene i Minkowskijeve nejednakosti:

$$\|f+g\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|_{L^q(\Omega)} + \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Za neprekidnost operatora, neka (u_n) konvergira prema u u $L^p(\Omega)$. Postoji podniz:

$$u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{s.s. } x \in \Omega$$

$$|u_{n_k}(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{—''—}$$

Lebesgueov tm o dominiranoj konv. povlači tvrdnju.

Lema 1.13: f i $\frac{\partial f}{\partial u}$ Carathéodoryjeve, $p > 2$, $f(\cdot, 0)$ omeđena i

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right| \leq a + b|u|^{p-2}$$

Tada je $N_f : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ Frechet diferencijabilna

Dokaz se može naći u Ambrosetti, Prodi: A primer of nonlinear analysis, CUP, 1995. (Tm 2.7)

Za $p = 2$, N_f je samo G-diferencijabilna.

2. Postojanje Lagrangeovih multiplikatora

Promatramo problem uvjetne minimizacije

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) \to \min \\ g(x) \in K \\ x \in C \end{cases}$$

$f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to Z$, $C \subseteq X$ zatvoren i konveksan, $K \subseteq Z$ zatvoren konveksan konus, X, Z Banachovi (realni). Pretpostavljamo da zadaća ima rješenje x^* (lokalni minimum) te

f je Frechet-diferencijabilna u x^*

g je klase C^1 u x^*.

(oznaka za diferencijale $f'(x^*)$, $g'(x^*)$)

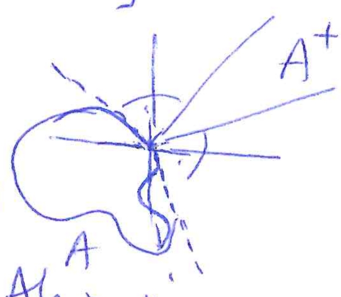
Dopustivi skup $M = \{x \in C : g(x) \in K\}$

Za $A \subseteq X$ definiramo dualni konus

$$A^+ = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dual}}}{z \in X^*} : \langle \underset{X^*}{z}, \underset{X}{a} \rangle \leq 0,\ a \in A \}$$

te za $x \in X$

$$A(x) = \{ \lambda(a - x) : a \in A, \lambda \geq 0 \}$$



(najmanji konus koji sadrži $A - x$) Ako je A konveksan to je ujedno i najmanji konv. konus koji sadrži $A-x$ ... $C(A-x)$ konus različitih smjerova iz x

Zadaći (1) pridružujemo Lagrangeov funkcional $\mathcal{L}: X \times Z^* \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle_{Z^*\, Z}$$

<u>Definicija 2.1</u> Funkcional $\lambda^* \in Z^*$ zovemo Lagrangeovim množiteljem za (1) u $x^* \in M$ (lokalna točka minimuma zadaće (1)) ako je

$$\lambda^* \in K^+$$

$$\langle \lambda^*, g(x^*) \rangle_{Z^*\, Z} = 0$$

$$f'(x^*) + \lambda^* \circ g'(x^*) \in -C(x^*)^+$$

Posebni slučajevi:

$K = \{0\}$ (uvjet tipa jednakosti) $\Rightarrow K^+ = Z^*$

$C = X$ (ili općenitije C otvorena okolina od x^*)

$\Rightarrow C(x^*)^+ = \{0\}$

Uvodimo sljedeće konuse koji aproksimiraju M u okolini x^*:

$$T(M,x^*) = \left\{ v \in X : v = \lim \frac{1}{t_n}(x_n - x^*),\ t_n \downarrow 0,\ (x_n) \subseteq M \right\}$$

~ (nitorni) tangencijalni konus na M u X

(Bouligandov tangencijalni konus; kontingentalni konus)

$$L(M,x^*) = \{ v\in X : v\in C(x^*),\ g'(x^*)v \in K_{g(x^*)} \}$$

– linearizirajući konus za M u x^*.

<u>Propozicija 2.2</u> Ako je x^* točka lokalnog minimuma zadaće (1) onda je

$$f'(x^*)v \geq 0, \quad v\in T(M,x^*)$$

<u>Dokaz</u> (Primijetimo zapis $f'(x^*)v = \langle f'(x^*), v\rangle_{X^* X}$)

Neka je $(x_n)\subseteq M$ i $v = \lim_n \frac{1}{t_n}(x_n - x^*)$, za neki $t_n \downarrow 0$. Posebno $x_n \to x$

$$f'(x^*)v = f'(x^*) \lim_n \frac{1}{t_n}(x_n-x^*) =$$

$$= \lim_n \frac{1}{t_n} f'(x^*)(x_n - x^*)$$

$$= \lim_n \frac{1}{t_n}\Big[\underbrace{f(x_n) - f(x^*)}_{\geq 0 \text{ za dovoljno velike } n} - \big(f(x_n) - f(x^*) - f'(x^*)(x_n-x^*)\big)\Big]$$

$$\geq \limsup_n \frac{-1}{t_n}\Big[f(x_n) - f(x^*) - f'(x^*)(x_n-x^*)\Big]$$

$$= -\lim_n \underbrace{\frac{1}{t_n}\|x_n - x^*\|}_{\to \|v\|} \underbrace{\frac{f(x_n)-f(x^*)-f'(x^*)(x_n-x^*)}{\|x_n-x^*\|}}_{\to 0}$$

$$= 0$$

Poseban slučaj : $C = X$ i $K = \{0\}$ tj.

$$M = \{x \in X : g(x) = 0\}$$

(u konačnodim. slučaju, $g = (g_1, \dots, g_m)$ klase C^1 – ako su $\nabla g_i(x^*)$ lin. nezavisni i x^* točka minimuma postoji $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \quad)$$

Općenito, može se pretpostavka

$$g'(x^*) : X \to Z \text{ je surjekcija}$$

Teorem 2.3 (Lyusternik) Neka su X i Z Banachovi prostori, $g : X \to Z$ i x^* iz

$$M = \{x \in X : g(x) = 0\}$$

Ako je g Frechet-diferencijabilna na okolini x^* uz g' neprekidno u x^* te $g'(x^*) \in \mathcal{L}(X, Z)$ surjekcija tada je

$$T(M, x^*) = \{x \in X : g'(x^*)x = 0\}$$

(Desna strana je upravo $L(M, x^*)$)

Za sljedeći zaključak koristimo samo $\boxed{\supseteq}$ (problematičnija inkluzija - obratno vrijedi uz slabije pretpostavke - Frechet-dif g u x^*)

Definiramo linearni konus

$$B=\{(f'(x^*)x+r,\ g'(x^*)x) : r\geq 0,\ x\in X\}\subseteq \mathbb{R}\times Z$$

$(0,0)\in B$. Zbog Propozicije 2.2, ako je $g'(x^*)x=0$ (tj. $x\in T(M,x^*)$) onda je $f'(x^*)x\geq 0$ pa je $(0,0)$ rubna točka od B.

$g'(x^*)$ surjekcija $\Rightarrow \operatorname{int} B\neq\emptyset$

Stoga postoji hiperravnina (zatvorena) koja razdvaja $(0,0)$ i $\operatorname{int} B$ (potporna hiperravnina za B u $(0,0)$): $\exists\,(\alpha,\lambda^*)\in\mathbb{R}\times Z^*$, netrivijalan takav da je $\forall (r,x)\in\mathbb{R}^+_0\times X$

$$\alpha(f'(x^*)x+r)+\langle\lambda^*, g'(x^*)x\rangle\geq 0,$$

(0,0) leži na hip.

Posebno, za $x=0$ slijedi $\alpha\geq 0$.

Ako je $\alpha=0$ onda je $\lambda^* g'(x^*)=0$ što bi povlačilo $\lambda^*=0$ što nije moguće.

Dakle $\alpha > 0$ pa dijeljenjem nejednakosti s α možemo uzeti $\alpha = 1$. Kako je $r \geq 0$ proizvoljan, za $r = 0$ imamo

$$f'(x^*) + \lambda^* \circ g'(x^*) = 0$$

tj. λ^* je Lagrangeov multiplikator.

Za egzistenciju Lagrangeovog multiplikatora u općem slučaju koristit ćemo

Teorem 2.4 (o otvorenom preslikavanju)

Neka su $\bar{x} \in C$ i $\bar{y} \in K$, $K \subseteq Z$ zatvoren konveksan skup, $C \subseteq X$ zatvoren konveksan skup, $T \in \mathcal{L}(X, Z)$. Ekvivalentno je

a) $Z = TC(\bar{x}) - K(\bar{y})$

b) Postoji $\rho > 0$ t.d.

$$Z_\rho \subseteq T\left((C - \bar{x}) \cap X_1\right) - (K - \bar{y}) \cap Z_1$$

$$(Z_\rho = \overline{B}(0, \rho) \subseteq Z, \ X_1 = \overline{B}(0,1) \subseteq X)$$

Dokaz:

$\boxed{b \Rightarrow a}$ očito

$\boxed{a \Rightarrow b}$ Pokažimo prvo da vrijedi

(2) $$C(\bar{x}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\left((C-\bar{x})\cap X_1\right)$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}_0^+(C-\bar{x})}$$

$\boxed{\supseteq}$ očito

$\boxed{\subseteq}$ Neka je $x\in C(\bar{x})$ tj. $x = \lambda y$, $\lambda\geq 0$, $y\in C-\bar{x}$

Za $\lambda = 0$ tvrdnja vrijedi, također i za $\|y\|_X\leq 1$

Uzmimo $\lambda > 0$ i $\|y\| > 1$. Zbog konveksnosti od C je $\frac{1}{\|y\|}y\in(C-\bar{x})\cap X_1$ pa zbog ... tvrdnja vrijedi.

Za $\alpha > 0$ def $A_\alpha = \alpha T\left((C-\bar{x})\cap X_1\right) - (K-\bar{y})\cap Z_1$.

Neka je $Z = TC(\bar{x}) - K(\bar{y})$, zbog (2) (za $C(\bar{x})$ i $K(\bar{y})$)

$$Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{nT\left((C-\bar{x})\cap X_1\right)} - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{n\left((K-\bar{y})\cap Z_1\right)}$$

↳ rastući nizovi skupova

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\left[T\left((C-\bar{x})\cap X_1\right) - (K-\bar{y})\cap Z_1\right]$$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \text{Posebno } Z = \bigcup_n \overline{A_n}$$

Dakle, Z je prebrojiva unija zatvorenih skupova

$\Rightarrow \exists\, m\in\mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{int}\overline{A_m}\neq\emptyset$

(Baireov teorem o kategoriji: Potpun metrizabilan prostor je Baireov.

Baireov prostor: svaki neprazan otvoren skup je skup druge kategorije

Skup druge kategorije: ne može se prikazati kao prebrojiva unija nigdje gustih skupova (skupovi praznog interiora)

Neka je $a \in \operatorname{int} \overline{A}_m$. Zbog $Z = \bigcup_n \overline{A}_n$ postoji $k \in \mathbb{N}$ t.da $-a \in \overline{A}_k$.

Kako je $\overline{A}_\alpha = \alpha \overline{A}_1$ slijedi $-\frac{m}{k} a \in \overline{A}_m$

$$\Rightarrow 0 \in \left\langle -\frac{m}{k} a, a \right] \subseteq \operatorname{int} \overline{A}_m = m \operatorname{int} \overline{A}_1$$

Dakle,
$$Z_\varrho \subseteq \frac{1}{2} \overline{A}_1 = \overline{A}_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}} + Z_{\frac{\varrho}{2}} \qquad (3)$$

$$Z_{(\frac{1}{2})^i \varrho} = \left(\frac{1}{2}\right)^i Z_\varrho \subseteq \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(A_{\frac{1}{2}} + Z_{\frac{\varrho}{2}}\right) =$$

$$= A_{(\frac{1}{2})^{i+1}} + Z_{(\frac{1}{2})^{i+1}\varrho} \qquad (4)$$

Neka je $y \in Z_\varrho$. Zbog (3) postoje $x_1 \in (C - \bar{x}) \cap X_1$, $y_1 \in (K - \bar{y}) \cap Z_1$ i $r_1 \in Z_{\frac{\varrho}{2}}$ t.da

$$y = T\left(\frac{1}{2} x_1\right) - \frac{1}{2} y_1 + r_1$$

Prema (4) uz $i = 1$, za r_1 postoje $x_2 \in (C - \bar{x}) \cap X_1$, $y_2 \in (K - \bar{y}) \cap Z_1$ i $r_2 \in Z_{(\frac{1}{2})^2 \varrho}$ takva da

$$r_1 = T\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 x_2\right) - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 y_2 + r_2$$

$$\Rightarrow \quad y = T\left(\tfrac{1}{2} x_1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 x_2\right) - \left(\tfrac{1}{2} y_1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 y_2\right) + r_2$$

Nastavimo dalje induktivno

$$y = T u_n - v_n + r_n \qquad (5)$$

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i x_i, \qquad x_i \in (C - \bar{x}) \cap X_1$$

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i y_i, \qquad y_i = (K - \bar{y}) \cap Y_1$$

$$r_n \in Z_{\left(\frac{1}{2}\right)^n \varrho} \qquad \text{tj.} \quad r_n \to 0 \ \text{u} \ Z$$

Zbog konveksnosti

$$u_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i x_i}_{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i < 1} + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i\right) 0 \in (C - \bar{x}) \cap X_1$$

Niz u_n je Cauchyjev:

$$\| u_n - u_{n+m} \|_X \le \sum_{i=m+1}^{n+m} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$\|x_i\|_X \le 1$

Stoga postoji $x \in (C - \bar{x}) \cap X_1$, limes niza (u_n)

Slično, postoji $y \in (K - \bar{y}) \cap Z_1$, $y = \lim v_n$

Prelaskom na limes u (5), zbog nepr. od T:

$$y = Tx - v$$

$\square$

Regularnost i postojanje Lagrangeovih multiplikatora

Definicija 2.5: Kažemo da je $\bar{x} \in M$ regularna ($\bar{x}$ zadovoljava uvjet točkovne regularnosti) ako

$$0 \in \operatorname{int} \{ g'(\bar{x})(C-\bar{x}) + g(\bar{x}) - K \} \qquad (6)$$

Posebno, vrijedi

$$0 \in \operatorname{int} \{ \underbrace{g'(\bar{x})\, C(\bar{x}) - K(g(\bar{x}))}_{\text{konus}} \} \qquad (7)$$

što pak povlači

$$Z = g'(\bar{x})C(\bar{x}) - K(g(\bar{x})) \qquad (8)$$

No (8) povlači (6) zbog Teorema 2.4. pa su uvjeti (6), (7) i (8) ekvivalentni.

(6) ... Robinsonov uvjet regularnosti

(8) ... Zowe-Kurcyusz —||—

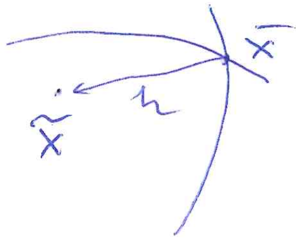
Napomena 2.6

$X = \mathbb{R}^n,\ Z = \mathbb{R}^m$

Konveksni prog. $\begin{cases} f(x) \to \min \\ g(x) \leq 0 \quad \dots M \end{cases}$

f, g_i konveksne, $K = -\mathbb{R}^n_+$

Slaterov uvjet $(\exists \tilde{x} \in M)\ g_i(\tilde{x}) < 0,\ i = 1..m$



$g_i(\bar{x}) = 0 \quad$ za $\quad i \in I(\bar{x})$

(skup aktivnih indeksa za $\bar{x}$)

$$0 > g_i(\tilde{x}) \geq \underbrace{g_i(\bar{x})}_{0} + g_i'(\bar{x})\underbrace{(\tilde{x} - \bar{x})}_{h}$$

$$\Leftrightarrow \quad g_i'(\bar{x})h < 0, \quad i \in I(\bar{x}) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Za neaktivne indekse nema uvjeta na h!

Stoga (9) zapisujemo u obliku

$$(\exists h \in X) \quad g'(\bar{x})h \in \operatorname{int} K(g(\bar{x})) \quad \ldots \text{ Slaterov uvjet } (C = X)$$

Uvjet (7) je posljedica

Zadaća nelin. prog. $C = X = \mathbb{R}^n$, $Z = \mathbb{R}^m$

$$K = \{0\}^k \times \mathbb{R}_+^{m-k}$$

$$M \ldots \quad g_i(x) = 0, \quad i = 1 \ldots k \quad \ldots \; g_= = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{bmatrix}$$

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = k+1 \ldots m$$

Promotrimo uvjet (8)

$$Z = g'(\bar{x})X - K(g(\bar{x}))$$

Za prvih k komponenti $g_='(\bar{x})$ je surjekcija

$\Leftrightarrow \quad \nabla g_i(\bar{x})$ linearno nezavisni $\quad i = 1..k \quad$ (a)

Za zadnjih $m-k$ komp.: $\exists$

$$(\exists x \in \mathbb{R}^n) \quad g_i'(\bar{x})x = 0 \quad i = 1..k$$

(b) $\quad g_i'(\bar{x})x < 0, \quad i = k+1, \ldots m, \; i \in I(\bar{x})$

(a) i (b) ... Mangasarian-Fromowitzer uvjet regularnosti

<u>Teorem 2.7.</u> Ako je x^* rješenje zadaće

$$f(x) \to \min$$
$$x \in C,\ g(x) \in K$$

i zadovoljava uvjet točkovne regularnosti onda postoji Lagrangeov množitelj (prema Def 2.1)

<u>Dokaz</u> Prema Propoziciji 2.2

$$f'(x^*)x \geq 0, \qquad x \in T(M, x^*)$$

Koristimo sljedeću Lemu

<u>Lema</u> $\qquad L(M, x^*) \subseteq T(M, x^*)$

<u>Dokaz</u>: Werner: Optimization theory and applications, Friedr. Vieweg & Sohn, 1984 (Theorem 5.2.5)

Dakle, $\quad f'(x^*)x \geq 0, \quad x \in L(M, x^*) \qquad$ (10)

$$L(M,x^*) = \{x \in X : x \in C(x^*),\ g'(x^*)x \in K(g(x^*))\}$$

Definiramo

$$B = \{(f'(x^*)x + r,\ g'(x^*)x - y) : r \geq 0,\ x \in C(x^*),$$
$$y \in K(g(x^*))\} \subseteq \mathbb{R} \times Z$$

(u posebnom slučaju $C = X$, $K = \{0\}$ smo imali isto)

$C(x^*)$, $K(g(x^*))$ konv. konusi $\Rightarrow$ B konveksni konus (linearna slika konv. konusa)

$(0,0) \in B \qquad (x = 0,\ y = 0,\ r = 0)$

Zbog (10) $(0,0)$ je rubna točka od B

jer je prva komponenta uvijek ≥ 0

Prema teoremu o otvorenom preslikavanju

(uz $T = g'(x^*)$ i $\bar{y} = g(x^*)$) postoji $\rho > 0$ t.da

$\{(\alpha, y) : \alpha \geq \max\{f'(x^*)x : x \in (C - x^*) \cap X_1\},\ y \in Z_\rho\} \subseteq B$

pa je $\operatorname{int} B \neq \emptyset$, stoga postoji potporna hiper. u $(0,0)$

tj. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \lambda^* \in Z^*$, bar jedan netrivijalan

$$\alpha(f'(x^*)x + r) + \lambda^*(g'(x^*)x - y) \geq 0, \quad \begin{array}{l} x \in C(x^*),\ r \geq 0 \\ y \in K(g(x^*)) \end{array}$$

Uz $(r, x) = (0,0)$ slijedi $\langle \lambda^*, y \rangle \leq 0$ za neki

$y \in K(g(x^*))$ tj. $\lambda^* \in K^+$ i $\lambda^* g(x^*) = 0$

Uz $(x, y) = (0,0)$ slijedi $\alpha \geq 0$

Ako je $\alpha = 0$, regularnost od x^* povlači $\lambda^* = 0$ ↯

Stoga možemo podijeliti s α i uz $(r, y) = (0,0)$

slijedi

$$f'(x^*) + \lambda^* g'(x^*) \in -C(x^*)^+$$

Primjer 2.8 (Jednostrani problem prepreke)

$$(11)\quad \begin{cases} J(y) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 dx - \int_\Omega f y \, dx \to \min \\ y \in H_0^1(\Omega), \quad y \le \psi \text{ ss na } \Omega \end{cases}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen otvoren povezan s Lipschitzovim rubom

$f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$ (J umjesto stanja f)

$\rightsquigarrow$ zadaća oblika (1)

$X = Z = H_0^1(\Omega)$, $C = X$

$K \subseteq Z$ ... $\varphi \le 0$, ss na Ω, $g(y) = y - \psi$

Zadaća (11) ima jedinstveno rješenje:

Teor 2.9 (Stampacchia) Neka je $a : H \times H \to \mathbb{R}$ neprekidna koercitivna bilinearna forma i $K \subseteq H$ neprazan zatvoren i konveksan skup. Tada za svaki $\varphi \in H^*$ postoji jedinstveni $u \in K$ t.da je

$$a(u, v-u) \ge \langle \varphi, v-u \rangle, \quad v \in K$$

Dodatno, ako je a simetrična rješenje u je jedinstveno rješenje zadaće

$$\begin{cases} \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \to \min \\ v \in K \end{cases}$$

Označimo rješenje zadaće (11) s y^*.

Uvjet regularnosti za $u \in X$:

$$\underbrace{Z}_{=X} = \underbrace{g'(u)}_{id} X - K(g(u)) \quad \text{vrijedi za svaki } u.$$

Prema Teoremu 2.7 postoji Lagrangeov mult. $\lambda^* \in X^*$

$$\begin{cases} {}_{H^{-1}(\Omega)}\langle \lambda^*, \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)} \le 0, \quad \varphi \in K \\ {}_{H^{-1}(\Omega)}\langle \lambda^*, y^* - \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0 \\ -\Delta y^* + \lambda^* = f \quad \text{u } H^{-1}(\Omega) \end{cases}$$

Može se pokazati i dodatna regularnost: $\lambda^* \in L^2(\Omega)$

Općenitije, neka je U Hilbertov prostor, s parcijalnim uređajem izvedenim iz zatvorenog konveksnog konusa $L \subseteq U$:

$$u \le v \iff v - u \in L$$

(pored refleksivnosti, antisimetričnosti i tranzitivnosti zahtijevamo

$$u \le v, \ \lambda \ge 0 \Rightarrow \lambda u \le \lambda v$$

$$u \le v \Rightarrow u + z \le v + z \quad)$$

$\varrho^* \in U^*$ netrivijalan

$\pi : U \to \ker \varrho^*$ ortogonalna projekcija

Za $\varphi \in U$, $\mu \in \mathbb{R}$ i $\gamma \in \mathbb{R}^+$ definiramo

$$g : U \to Z := U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$g(u) = \left(u - \varphi,\ \|u\|^2 - \gamma,\ \ell^*(u) - \mu\right)$$

$$K = L \times \mathbb{R}^- \times \{0\} \subseteq Z$$

U gornjem primjeru imali smo samo 1. komp.

Propozicija 2.10 Neka $h_0 \in [\ker \ell^*]^\perp \cap L$ te $\ell^*(h_0) = 1$. Ako je $\ell^*(L) \subseteq \mathbb{R}^+$, $\ell^*(\varphi) < \mu$ i $\|\pi(\varphi)\|^2 + \mu^2 \|h_0\|^2 < \gamma^2$ onda je skup

$$M = \{u \in U : g(u) \in K\}$$

neprazan i svaka njegova točka u je regularna:

$$0 \in \operatorname{int}\{g(u) + g'(u)U - K\}$$

Dokaz: Kako je $\ell^*(h_0) = 1$ to je $U = \ker \ell^* \oplus \operatorname{span}\{h_0\}$

Ortog. proj: $\pi(u) = \ell^*(u) h_0$, $u \in U$.

M je neprazan:

$\varphi - \ell^*(\varphi) h_0 \in \ker \ell^*$

$\mu h_0 \in [\ \ ]^\perp$

$$\hat{u} := \varphi + (\mu - \ell^*(\varphi)) h_0$$

Zaista

$$\hat{u} - \varphi = \underbrace{(\mu - \ell^*(\varphi))}_{>0} h_0 \in L$$

$$\|\hat{u}\|^2 = \|\pi(\varphi)\|^2 + \mu^2 \|h_0\|^2 < \gamma^2$$

$$\ell^*(\hat{u}) = \mu$$

Za prirodje $u \in M$ tvrdimo

$$0 \in \operatorname{int}\{\, g(u) + g'(u)\,U - K \,\}$$

$$g'(u)h = (\,h\,,\, 2(u,h),\, \varrho^*(h)\,)$$

← ohodni produkt na U

Gornji uvjet:

$$0 \in \operatorname{int}\{\,(u - \varphi + h - L,\ \|u\|^2 - \gamma^2 + 2(u,h) - \mathbb{R}^-,\ \varrho^*(h)) : h \in U\,\}$$

$$\delta := \min\left\{ \frac{\gamma^2 - \|\pi(\varphi)\|^2 - \mu^2\|h_0\|^2}{1 + 2\gamma + 2\gamma\|h_0\|},\ \frac{\mu - \varrho^*(\varphi)}{\|\varrho^*\| + 1} \right\}$$

i $B = \bar{B}(0;\delta) \subseteq Z$ (norma na $Z \subseteq U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\|(a,b,c)\| = \max\{\|a\|, |b|, |c|\}$)

Tvrdimo $B \subseteq \{\,(u - \varphi + h_1 + \sigma h_0 - L,\ \|u\|^2 - \gamma^2 + 2(u, h_1 + \sigma h_0) - \mathbb{R}^-,\ \sigma \underbrace{\varrho^*(h_0)}_{1}) : h_1 \in \ker \varrho^*,\ \sigma \in \mathbb{R}\,\}$

što će povlačiti tvrdnju Propozicije.

Neka je $(\tilde{u}, \tilde{r}, \tilde{s}) \in B$, stavimo $\sigma = \tilde{s}$. Tvrdimo da postoji $(h_1, \ell, r^-) \in \ker \varrho^* \times L \times \mathbb{R}^-$ t.da

(12) $$(\,u - \varphi + h_1 + \tilde{s} h_0 - \ell,\ \|u\|^2 - \gamma^2 + 2(u, h_1 + \tilde{s} h_0) - r^-) = (\tilde{u}, \tilde{r})$$

Zbog odabira δ vrijedi

$$\mu - \varrho^*(\varphi) - \varrho^*(\tilde{u}) + \tilde{s} \geq 0$$

(usporedimo ϱ^* na prve komponente u (12))

Stoga uz $l := (\mu - g^*(\varphi) - g^*(\tilde{u}) + \tilde{s}) h_0 \in L$

$$h_1 = \Pi(\varphi - u + \tilde{u})$$

imamo jednakost prvih komponenti u (12).
Za jednakost drugih komponenti:

$$\|u\|^2 - \gamma^2 + 2(u, h_1 + \tilde{s} h_0) =$$

$$= \|\Pi u\|^2 + \mu^2 \|h_0\|^2 - \gamma^2 + \underbrace{2(u, \Pi(\varphi - u + \tilde{u}) + \tilde{s} h_0)}$$

$$\leq \|\Pi u\|^2 + \|\Pi \varphi\|^2 - 2\|\Pi u\|^2 + 2\gamma(\|\tilde{u}\|^2 + |\tilde{s}| \|h_0\|)$$

$$\leq \mu^2 \|h_0\|^2 - \gamma^2 + \|\Pi \varphi\|^2 + 2\delta\gamma(1 + \|h_0\|) \leq -\delta$$

tj. $L.S. - \tilde{r} = -\delta$ za neki $\tilde{r} \leq 0$ $\boxtimes$

Napomena 2.11: Ako uvjet $g^*(u) = \mu$ nije prisutan (u definiciji skupa M) onda zaključak propozicije vrijedi uz pretp. $\|\varphi\| < \gamma$

Primjer 2.12. (Inverzna zadaća)

Želimo odrediti potencijal c

$$(13) \quad \begin{cases} -\Delta y + cy = f & \text{u } \Omega \\ y = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

iz rezultata mjerenja $z \in L^2(\Omega)$. Uzmimo $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \leq 4$.

$$M = \{ c \in L^2(\Omega) : c(x) \geq 0,\ \|c\| \leq \gamma \}$$

i (uz parametar $\alpha > 0$) mjerimo

$$J(c) = \frac{1}{2}\|y(c) - z\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|c\|^2$$

$$c \in C, \quad y(c) \text{ rješenje zadaće (13)}$$

Zadaća (13) ima jedinstveno rješenje (Lax-Milgram)

Propozicija 2.10 uz

$$L = \{ c \in L^2(\Omega) : c \geq 0 \text{ ss na } \Omega \}$$

$$g(c) = (c, \|c\|^2 - \gamma^2)$$

je primjenjiva $\Rightarrow$ svaka točka je regularna.

Pokazuje se da je $c \mapsto y(c)$ Frechet dif.

Kreće od deriviranja u smjeru h : $y'(c)h = \phi$

$$\begin{cases} -\Delta \phi + c\phi = -h\,y(c) & \text{u } \Omega \\ \phi = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

slijedi egzistencija Lagrangeovih mult. (μ_1, μ_2):

$$\begin{cases} (y(c^*) - z, y'(c)h) + \alpha(c^*, h) - (\mu_1, h) + 2\mu_2(c^*, h) = 0 \\ -(\mu_1, c^*) + \mu_2(\|c^*\|^2 - \gamma) = 0 \\ (\mu_1, \mu_2) \in L \times \mathbb{R}^+ \qquad (-\mu_1 \in -L) \end{cases}$$

3. Analiza osjetljivosti

3.1. Uvod

Promatramo zadaću minimizacije s parametrom p:

(1)
$$f(x,p) \to \min$$
$$e(x,p)=0, \quad g(x,p)\leq 0, \quad l(x,p)\in K, \quad x\in C$$

$C\subseteq X$ zatvoren konveksan

$e: X\times P \to W$, $g: X\times P\to \mathbb{R}^m$, $l: X\times P \to Z$ afina u x

P normiran prostor, X, W, Z Banachovi

$K\subseteq Z$ zatvoren konveksan konus

Označimo s x_0 rješenje uz parametar p_0

Cilj: na okolini od p_0 dobiti jedinstveno rješenje zadaće (1) $x=x(p)$ i ispitati neprekidnost preslikavanja $p\mapsto x(p)$, ali i pripadnih Lagrangeovih multiplikatora.

Štoviše, zanima nas Lipschitz-neprekidnost, ali i derivabilnost po smjerovima, te diferencijabilnost minimalne vrijednosti

$$p\mapsto f(x(p),p)$$

u p_0

Osnovni pristup je analiza uvjeta optimalnosti (Def 2.1.) pa pretpostavljamo regularnost točke x_0 (2.6):

$$(H1) \quad 0 \in \operatorname{int} \left\{ \begin{pmatrix} e'(x_0,p_0) \\ g'(x_0,p_0) \\ \ell'(p_0) \end{pmatrix} (C-x_0) + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{R}^m_+ \\ -K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x_0,p_0) \\ \ell(x_0,p_0) \end{pmatrix} \right.$$

Prema Teoremu 2.7 postoje Lagrangeovi multiplikatori $(\lambda_0, \mu_0, \eta_0) \in W^* \times \mathbb{R}^m_+ \times K^+$ t.da

$$\langle \mathcal{L}'(x_0,p_0,\lambda_0,\mu_0,\eta_0), c-x_0 \rangle \geq 0, \quad c \in C$$

$$e(x_0,p_0) = 0$$

(2)

$$\langle \mu_0, g(x_0,p_0) \rangle = 0, \quad g(x_0,p_0) \leq 0$$

$$\langle \eta_0, \ell(x_0,p_0) \rangle = 0, \quad \ell(x_0,p_0) \leq 0$$

pri čemu je $\mathcal{L}$ Lagrangeova fja:

$$\mathcal{L}(x,p,\lambda,\mu,\eta) = f(x,p) + \langle \lambda, e(x,p) \rangle + $$
$$+ \langle \mu, g(x,p) \rangle + \langle \eta, \ell(x,p) \rangle$$

Radi jednostavnijeg zapisa uvodimo indikatorsku fju skupa $C \subseteq X$ (zatvoren i konveksan)

$$\psi_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C \end{cases}$$

i pripadni normalni konus $\partial \psi_C(x)$

(vidi se zbirka s konveksnom subdiferencijabilnošću - korisni)

$$\partial\psi_C(x) = \begin{cases} \emptyset, & x \notin C \\ \{y \in X^* : \langle y, c-x\rangle_{X^*,X} \leq 0,\ c \in C\}, & x \in C \end{cases}$$

uz stand. oznaka $C(x)^+$ (dualni konus konusa generiranog s $C-x$), ako je $x \in C$

Za $C' \subseteq Z^*$, konv. i zatvoren te $y \in Z^*$

$$\partial\psi_{C'}(y) = \begin{cases} \emptyset, & y \notin C' \\ \{z \in Z : \langle z^*-y, z\rangle_{Z^*,Z} \leq 0,\ z^* \in C'\}, & y \in C' \end{cases}$$

(normalni konus $\partial\psi_{C'}(y)$ nije u biдualu od Z, već u Z)

Stoga (2) zapisujemo u jednostavnijoj formi, koristeći:

<u>Lema 3.1</u>: Neka je K zatvoren, konveksan konus u Z. Tada je

$$z \in \partial\psi_{K^+}(y) \iff z \in K,\ y \in K^+,\ \langle y, z\rangle = 0$$

<u>Dokaz</u>: $\boxed{\Rightarrow}$ $z \in \partial\psi_{K^+}(y)$ neprazan $\Rightarrow y \in K^+$ te

$$\langle z^*-y, z\rangle \leq 0, \quad z^* \in K^+$$

Za $z^* = 2y$ imamo $\langle y, z\rangle \leq 0$

$z^* = y/2$ $\quad \langle y, z\rangle \geq 0$ $\Big\} \Rightarrow = 0$

Stoga $\langle z^*, z\rangle \leq 0$, $z^* \in K^+$

Želimo pokazati još da je $z \in K$. Tm 1.1.6

Pretp. suprotno: prema Hahn-Banachovom tmu $\{z\}$ i K se mogu jako separirati: $\exists z^* \in Z^*$

$$\langle z^*, y\rangle \underbrace{\leq \beta <}\langle z^*, z\rangle, \quad y \in K$$

K konus $\Rightarrow$ $\beta = 0$ $\Rightarrow$ $z^* \in K^+$, no

$\langle z^*, z\rangle > 0$ daje kontradikciju.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $z \in K$, $y \in K^+$, $\langle y, z\rangle = 0$ te $z^* \in K^+$

$$\langle z^* - y, z\rangle_{z^*\ z} = \langle z^*, z\rangle - \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} \leq 0$$

tj. $z \in \partial \psi_{K^+}(y)$. $\square$

Sad je (2) ekvivalentno s

$$(3)\quad \begin{aligned} 0 &\in \mathcal{L}'(x_0, p_0, \lambda_0, \mu_0, y_0) + \partial\psi_C(x_0) \\ 0 &= e(x_0, p_0) \\ 0 &\in -g(x_0, p_0) + \partial\psi_{\mathbb{R}^m_+}(\mu_0) \\ 0 &\in -\ell(x_0, p_0) + \partial\psi_{K^+}(y_0) \end{aligned}$$

npr. poopćene jednadžbe (inkluzije)

Cilj: primijeniti teorem o implicitnoj fji (poopćeni!)

(Robinson 1980)

Stoga ćemo pretpostavljati da su f, e, g dva puta diferencijabilne po x.

3.2. Teorem o implicitnoj funkciji

Promatramo poopćenu jdb

(4) $$0 \in F(x,p) + \partial\psi_C(x)$$

$F : X \times P \to X^*$, X, P normirani

$C \subseteq X$ zatvoren i konveksan (za $C = X$ imamo „klasičnu" jdb)

Neka je (x_0, p_0) rješenje zadaće te $x \mapsto F(x, p_0)$ Fréchet-diferencijabilna u x_0. Linearna aproksimacija će imati glavnu ulogu:

(5) $$Tx = F(x_0, p_0) + F'(x_0, p_0)(x - x_0) + \partial\psi_C(x)$$

(kao u klasičnom teoremu o implicitnoj fji)

<u>Def 3.2</u> (Jaka regularnost) Poopćena jednadžba (4) je jako regularna u x_0, uz Lipschitzovu konstantu ρ, ako postoje okoline V od $0 \in X^*$ i U od $x_0 \in X$ takve da poopćena jdb.

$$\delta \in Tx$$

ima jedinstveno rješenje x u skupu U, za svaki $\delta \in V$, i oznaci $x = x(\delta)$ t.d. je $\delta \mapsto x(\delta)$ Lipschitz neprekidno s konstantom ρ.

Teorem 3.3 (poopćeni teorem o implicitnoj f-ji)

Neka je P topološki prostor, F Frechet dif. o obzirom na x (F' diferencijal) te F i F' neprekidni u (x_0, p_0). Ako je (4) jako regularno u x_0, uz Lipschitzovu konstantu ϱ, tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okoline N_ε od p_0 i U_ε od x_0 i $x : N_\varepsilon \to U_\varepsilon$ takva da je za svaki $p \in N_\varepsilon$ $x(p)$ jedinstveno rješenje zadaće (4) u U_ε.

Nadalje

$$|x(p) - x(q)|_X \leq (\varrho + \varepsilon) \, |F(x(q), p) - F(x(q), q)|_{X^*}$$

Dokaz: Hollunisch

Korolar 3.4 Uz pretpostavke prethodnog teorema, ako je P normiran i

$$|F(x,p) - F(x,q)|_{X^*} \leq \nu \, |p-q|_P$$

za $p, q \in N_\varepsilon$, $x \in U_\varepsilon$, onda je $p \mapsto x(p)$ Lipschitzova na N_ε uz Lipschitzovu konstantu $\nu(\varrho + \varepsilon)$.

Također, kao posljedicu rezultata imamo da je dovoljno riješiti linearizirani zadatak

$$0 \in F(x_0, p) + F'(x_0, p_0)(x - x_0) + \partial \psi_C(x)$$

Ako je $\Phi_p(x_0)$ jedinstveno rješenje, onda je

$$|x(p) - \Phi_p(x_0)|_X \leq \alpha_\varepsilon(p)\, |p - p_0|_P$$

gdje je $\alpha_\varepsilon : N_\varepsilon \to \mathbb{R}_+$, $\lim_{p \to p_0} \alpha_\varepsilon(p) = 0$.

3.3. Rezultati stabilnosti

Zadaću (1) zapisujemo u općenitijoj formi

$$(6) \quad \begin{cases} f(x,p) \to \min \\ g(x,p) \in K, \; x \in C \end{cases}$$

X, Y Banachovi, P metrički – metrika δ, $f : X \times P \to \mathbb{R}$, $g : X \times P \to Y$, $K \subseteq Y$ zatv. konveksan, a $C \subseteq X$ zatv. i konveksan. Dopustivi skup

$$\Sigma(p) = \{ x \in C : g(x,p) \in K \}$$

Za dani $p_0 \in P$ neka je $x_0 \in \Sigma(p_0)$ lokalni minimizator (6).

$$\Sigma_r(p) = \Sigma(p) \cap \overline{B}(x_0, r)$$

$$\mu_r(p) = \inf \{ f(x,p) : x \in \Sigma_r(p) \}$$

Pretpostavljamo da su f i g klase C^1 na okolini (x_0, p_0) te da je x_0 regularna točka:

$$0 \in \operatorname{int} \{ g(x_0,p_0) + \underbrace{g'(x_0,p_0)}_{\text{der. po varijabli } x}(C - x_0) - K \}$$

Skupovna funkcija $F : X \rightrightarrows Y$: za $x \in X$ $F(x) \subseteq Y$
ili multi-funkcija ($F : X \to \mathcal{P}(Y)$)

Graf od F:

$$\operatorname{graph} F = \{(x,y) : x \in X,\ y \in F(x)\} \subseteq X \times Y$$

F je konveksna, ako je $\operatorname{graph} F$ konveksan

zatvorena, — " — zatvoren

$F(x)$ može biti $\emptyset$:

dom F i range F su projekcije grafa od F na X odn. Y. | $F^{-1}(y) := \{x \in X : y \in F(x)\}$

Teorem 3.5 (Poopćeni teorem o inverznoj f-ji)

Neka su X i Y normirani, F konveksna i zatvorena skupovna funkcija, $F : X \rightrightarrows Y$. Neka je $y_0 \in F(x_0)$ i pretpostavimo da za neki $\eta > 0$

$$y_0 + \eta B_Y \subset F(x_0 + B_X)$$

(B_X, B_Y otvorene jedinične kugle u X, Y)

Tada za $x \in x_0 + B_X$ i $y \in y_0 + \eta B_Y$

$$d(x, F^{-1}(y) \cap (x_0 + B_X)) \le (\eta - |y - y_0|)^{-1} \times$$
$$\times (1 + |x - x_0|)\, d(y, F(x))$$

gdje je $d(z, S) = \inf_{s \in S} |z - s|$ udaljenost točke z od skupa S.

Dokaz: Neka je $x \in x_0 + B_X$, $y \in y_0 + \eta B_Y$. Za $y \in F(x)$ tvrdnja vrijedi. Uzmimo $y \notin F(x)$.

Neka je $\delta > 0$ proizvoljan i $y_\delta \in F(x)$ takav da

$$0 < |y_\delta - y| < d(y, F(x)) + \delta$$

$\alpha := \eta - |y - y_0| > 0$ i $\varepsilon \in \langle 0, \alpha \rangle$

$$y_\varepsilon := y + (\alpha - \varepsilon) \frac{y - y_\delta}{|y - y_\delta|}$$

Stoga je $\quad |y_\varepsilon - y_0| \leq |y - y_0| + \alpha - \varepsilon < \eta$

tj. $\quad y_\varepsilon \in y_0 + \eta B_Y$ pa po pretpostavci postoji

$x_\varepsilon \in x_0 + B_X$ takav da je $y_\varepsilon \in F(x_\varepsilon)$

Za $\lambda = \dfrac{1}{1 + (\alpha - \varepsilon)|y - y_\delta|^{-1}} \in \langle 0, 1 \rangle$ imamo

$$y = (1-\lambda) y_\delta + \lambda y_\varepsilon \in (1-\lambda) F(x) + \lambda F(x_\varepsilon) \overset{F \text{ konv.}}{\subseteq}$$

$$\subseteq F((1-\lambda)x + \lambda x_\varepsilon)$$

Kako su x i x_ε sadržani u $x_0 + B_X$ to je i $(1-\lambda)x + \lambda x_\varepsilon$. Stoga je

$$d(x, F^{-1}(y) \cap (x_0 + B_X)) \leq \left| x - [(1-\lambda)x + \lambda x_\varepsilon] \right| = \lambda |x - x_\varepsilon|$$

No $\quad |x - x_\varepsilon| \leq |x - x_0| + |x_0 - x_\varepsilon| \leq |x - x_0| + 1$

$$\lambda = \frac{|y - y_\delta|}{|y - y_\delta| + \alpha - \varepsilon} < \frac{|y - y_\delta|}{\alpha - \varepsilon}$$

odakle slijedi

$$d(x, F^{-1}(y) \cap (x_0 + B_X)) \leq \frac{1 + |x - x_0|}{\eta - |y - y_0| - \varepsilon} \left(d(y, F(x)) + \delta \right)$$

pa tvrdnja slijedi na limes $\varepsilon \searrow 0$, $\delta \searrow 0$ $\square$

Hausdorffova udaljenost među skupovima

$$d_H(S,\bar S) = \max\{d(S,\bar S), d(\bar S,S)\}$$

gdje je $d(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B)$.

Lema 3.6 (Skupovna varijanta teorema fiksne točke)

Neka je (X,d) potpun metrički prostor i $\phi: X \rightrightarrows X$ t.da je $\phi(x)$ zatvoren u X za svaki $x\in X$.
Pretp. da postoji $x_0\in X$ te $r>0$, $\alpha\in\langle 0,1\rangle$, $\varepsilon\in\langle 0,r]$ t.da za svaki $x_1,x_2\in \bar B(x_0,r)$ su $\phi(x_1)$ i $\phi(x_2)$ neprazni,

$$d_H(\phi(x_1),\phi(x_2)) \le \alpha\, d(x_1,x_2) \quad \text{i}$$
$$d(x_0,\phi(x_0)) \le (1-\alpha)(r-\varepsilon)$$

Tada postoji $\bar x \in \bar B(x_0,r)$ t.da je $\bar x\in\phi(\bar x)$ i

$$d(x_0,\bar x) \le \frac{1}{1-\alpha} d(x_0,\phi(x_0)) + \varepsilon.$$

Ako je dodatno $d_H(\phi(S_1),\phi(S_2)) \le \alpha\, d_H(S_1,S_2)$ za sve neprazne zatvorene $S_1,S_2\subseteq \bar B(x_0,r)$ onda niz $S_k = \phi(S_{k-1})$, uz $S_0=\{x_0\}$ konvergira u Hausdorffovoj metrici prema fiksnoj točki za ϕ: $\bar S = \phi(\bar S)$

Dokaz Ito Kunisch

Teorem 3.7 Neka je $x_0 \in \Sigma(p_0)$ regularna točka. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina U_ε od x_0 i N_ε od p_0 takve da za svaki $p \in N_\varepsilon$ skup $\Sigma(p)$ je neprazan i za svaki $x \in U_\varepsilon \cap C$

$$d(x, \Sigma(p)) \leq (M+\varepsilon)\, d(0, \{g(x,p) - K ; x \in C\}),$$

gdje konstanta M ne ovisi o ε.

Dokaz: Posljedica Tm 3.5 i Lem 3.6 Ito-Kunisch.

Teorem 3.8 Neka je $K \subseteq Y$ zatv. konv. konus i $x_0 \in \Sigma(p_0)$ regularna točka te

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x, p_0) + \langle \lambda, g(x, p_0) \rangle_{Y^*, Y}$$

Lagrangeova fja zadaće (6) uz p_0. Ako postoji konstanta $\omega > 0$ i $\bar\beta > 0$ t.da

$$(7) \qquad \mathcal{L}''(x_0, \lambda_0, p_0)(h,h) \geq \omega |h|^2, \quad h \in S$$

gdje je

$$S = L(\Sigma(p_0), x_0) \cap \{h \in X : \langle \lambda_0, g'(x_0, p_0) h \rangle \geq -\bar\beta |h|\}$$

uz linearizirajući konus

$$L(\Sigma(p_0), x_0) = \{x \in C(x_0) : g'(x_0) x \in K(g(x_0))\}$$

tada $\exists \kappa > 0$ i okolina $\tilde{U}$ od x_0 t.da

$$f(x, p_0) \geq f(x_0, p_0) + \kappa |x - x_0|^2, \quad x \in \Sigma(p_0) \cap \tilde{U}$$

Primjer 3.9 : (drugi skup u definiciji od S je konusan) $\{h \in X : \langle \lambda_0, g'(x_0, p_0)h \rangle \geq -\bar{\beta}|h|\}$

$f(x) = -x^3 - x$, $g(x) = x$, $K = \mathbb{R}_-$, $C = \mathbb{R}$

Dakle, $\Sigma = \mathbb{R}_-$. $x_0 = 0$ je točka min

$f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = -1$, $f''(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 1$

$L(\Sigma, x_0) = \mathbb{R}_-$

$\Rightarrow$ za $\bar{\beta} \in \langle 0, 1 \rangle$ je $S = \{0\}$ pa je (7) zadovoljeno i primijetimo

$$f(x) \geq f(x_0) + \max\{|x|, 2|x|^2\}$$

Ako f zamijenimo s $f(x) = -x^3$ argument ne prolazi.

Teorem 3.10 Neka je $x_0 \in \Sigma(p_0)$ regularna točka i za neki $\beta > 0$ $f'(x_0)h \geq \beta|h|$, $h \in L(\Sigma(p_0), x_0)$

Tada postoji $\alpha > 0$ i okolina $\tilde{U}$ od x_0 tako da

$$f(x) \geq f(x_0) + \alpha|x - x_0| , \quad x \in \Sigma(p_0) \cap \tilde{U}$$

4. Proširena Lagrangeova metoda

– posebni slučaj: nelinearni uvjeti nejednakosti konačnog ranga

4.1. Uvod

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ e(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \\ \ell(x) \in K \end{cases} \qquad \text{stavi } C = X \; !$$

$f: X \to \mathbb{R}$, $e: X \to W$, $g: X \to \mathbb{R}^m$ (≤ std. uvj.)

$\ell: X \to Z$ afina, K zatv. konv. konus.

X, Z, W realni Hilbertovi prostori (poistovjećujemo duale sa samim prostorom)

⇝ Lagrangeovi multiplikatori

$$(\lambda^*, \mu^*, \eta^*) \in W \times \mathbb{R}^p \times Z$$

Dualni produkt $_{W^*}\langle \, , \, \rangle_W$ ⇝ skalarni produkt $(\, , \,)_W$

Prema Def. 2.1: $(\lambda^*, \mu^*, \eta^*)$ su Lagrangeovi multiplikatori pridruženi dopustivoj točki $x^* \in X$ ako vrijedi

$$f'(x^*)h + (\lambda^*, e'(x^*)h)_W + (\mu^*, g'(x^*)h)_{\mathbb{R}^m} + (\eta^*, \ell'(x^*)h)_Z = 0, \quad h \in X \tag{1}$$

uz uvjete na $(\lambda^*, \mu^*, \eta^*)$ te x^*;

$$e(x^*)=0$$

(2) $(\mu^*, g(x^*))_{\mathbb{R}^m}=0$, $\mu^*\geq 0$, $g(x^*)\leq 0$

$(\eta^*, \ell(x^*))_Z=0$, $\eta^*\in K^+$, $\ell(x^*)\in K$

Naravno, (1) zapisujemo ($C=X$)

$$\mathcal{L}'(x^*, \lambda^*, \mu^*, \eta^*)\,h=0, \quad h\in X$$

uz Lagrangeov funkcional ($'$ dif po x)

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu,\eta)=f(x)+(\lambda, e(x))_W+(\mu, g(x))_{\mathbb{R}^m}+(\eta, \ell(x))_Z$$

Za f, g, e pretpostavljamo da su klase C^2 oko x^*, a druge diferencijale zapisujemo kao simetrične bilinearne forme tj. za $h,k\in X$

$$\mathcal{L}''(x^*, \lambda^*, \mu^*, \eta^*)(h,k)=f''(x^*)(h,k)+$$
$$+(\lambda^*, e''(x^*)(h,k))_W+(\mu^*, g''(x^*)(h,k))_{\mathbb{R}^m}$$

Za x^* pretpostavljamo uvjet regularnosti (kako je $C=X$ to posebno znači da je $e'(x^*)$ surjekcija)

4.2. Konačnodimenzionalni slučaj

$X = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^k$, ne navodimo eksplicitno afine uvjete $\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_i \lambda_i e_i(x) + \sum_j \mu_j g_j(x)$

pišemo h_i

4.2.1. Uvjeti tipa jednakosti

$$(3) \quad \begin{cases} f(x) \to \min \\ h(x) = 0 \quad \ldots M \end{cases} \qquad h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

f, h klase C^2 Pretp: Uvjet regularnosti $\nabla h_i(x^*)$ lin. nez.

Propozicija 4.1 (dovoljni uvjet optimalnosti)

Neka je za $\lambda^* \in \mathbb{R}^k$ i reg. $x^* \in M$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$$

$$z^\tau \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) z > 0, \quad z \in L(M, x^*) \setminus \{0\}$$

$\{z \in \mathbb{R}^k : \underbrace{h'(x^*)}_{\nabla h(x^*)^\tau} z = 0\}$ $\parallel$

Tada je x^* točka strogog lokalnog minimuma za (3).

Lema 4.2 Neka je $P \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična i $Q \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična, pozitivno semidefinitna. Ako je

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \quad x^\tau Q x = 0 \Rightarrow x^\tau P x > 0$$

tada $\exists c \in \mathbb{R}$

$$P + cQ > 0$$

Dokaz (Leme) Pretp. supr. $\exists (x_k)$, $|x_k| = 1$

$$(4) \qquad x_k^\tau P x_k + k x_k^\tau Q x_k \leq 0$$

Na podnizu $x_k \to \bar{x}$. Prijeđemo na lim sup u (4)

$$\bar{x}^T P \bar{x} + \underbrace{\limsup \left(k\, x_k^T Q x_k\right)}_{\geq 0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad x_k^T Q x_k \to 0 \quad \text{tj.} \quad \bar{x}^T Q \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x}^T P \bar{x} > 0 \quad \text{⚡}$$

$\boxtimes$

Dokaz (Prop)

$$(5) \qquad z^T \underbrace{\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)}_{P} z > 0 \quad \text{čim je} \quad \underbrace{|\nabla h(x^*)^T z| = 0}_{z^T \underbrace{\nabla h(x^*) \nabla h(x^*)^T}_{Q} z}, \; z \neq 0$$

Prema Lemi $\exists \bar{c} \in \mathbb{R}$

$$(6) \qquad \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) + \bar{c}\, \nabla h(x^*) \nabla h(x^*)^T > 0$$

Proširena Lagr. fja:

$$\mathcal{L}_c(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x) + \frac{1}{2} c |h(x)|^2$$

$$\nabla_x \mathcal{L}_c(x, \lambda) = \nabla f(x) + \nabla h(x) \left[\lambda + c\, h(x)\right]$$

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}_c(x, \lambda) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{k} \left[\lambda_i + c\, h_i(x)\right] \nabla^2 h_i(x) +$$

$$+ c\, \nabla h(x) \nabla h(x)^T$$

Zbog (6) i pretpostavki Prop, za $c \geq \bar{c}$

$$\nabla_x \mathcal{L}_c(x^*, \lambda^*) = \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$$

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}_c(x^*, \lambda^*) = \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) + c\, \nabla h(x^*) \nabla h(x^*)^T > 0$$

Stoga $\exists \delta > 0$ t.d. (tm srednje vrijednosti)

$$\mathcal{L}_c(x, \lambda^*) \geq \mathcal{L}_c(x^*, \lambda^*) + \gamma |x - x^*|^2, \qquad |x - x^*| < \delta$$

tj. $x \mapsto \mathcal{L}_c(x,\lambda^*)$ poprima strogi lokalni minimum x^*, što povlači da f (na M) zadovoljava

$$f(x) \geq f(x^*) + \gamma |x-x^*|^2 , \quad \begin{array}{l} |x-x^*|<\delta \\ h(x)=0 \end{array}$$

∎

<u>Propozicija 4.3</u> Uz pretpostavke Prop 4.1 matrica

$$J = \begin{bmatrix} \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*,\lambda^*) & \nabla h(x^*) \\ \nabla h(x^*)^T & 0 \end{bmatrix}$$

je regularna.

<u>Dokaz:</u> Pretp. suprotno $\exists y \in \mathbb{R}^n$, $\exists z \in \mathbb{R}^k$, bar jedan različit od 0 t.d.

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*,\lambda^*) y + \nabla h(x^*) z = 0$$

$$\nabla h(x^*)^T y = 0$$

Množeći prvu jednakost slijeva s y^T, zbog druge,

$$y^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*,\lambda^*) y = 0$$

pa prema pretp Prop 4.1 slijedi $y=0$

stoga je $\nabla h(x^*) z = 0$, a kako je $\nabla h(x^*)$ ranga k ($\nabla h_i(x^*)$ lin. nez) to je $z=0$ ↯ ∎

Propozicija 4.4. Uz pretpostavke Prop 4.1 postoji $\delta > 0$ i neprekidno diferencijabilne fje $X : B(0,\delta) \to \mathbb{R}^n$, $\Lambda : B(0,\delta) \to \mathbb{R}^k$ ($B(0,\delta)$ kugla u $\mathbb{R}^k$) t.da je $X(0) = x^*$, $\Lambda(0) = \lambda^*$ te je za neki $u \in B(0,\delta)$, $X(u)$, $\Lambda(u)$ su točka lok. min i pripadni Lagrangeov multiplikator zadaće

$$f(x) \to \min$$
$$h(x) = u$$

Nadalje

$$\nabla_u f(x(u)) = -\lambda(u) \quad , u \in B(0,\delta)$$

Dokaz: Želimo zadovoljiti sustav (nep. x, λ, u)

$$\nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda = 0$$
$$h(x) = u$$

Po pretp Prop. 4.2 $(x^*, \lambda^*, 0)$ je jedno rješ. Jacobijeva matrica po (x, u) u (x^*, λ^*) je $\exists$ iz Prop 4.3 pa možemo iskoristiti tm o implicitno zadanoj fji: postoji $\delta > 0$ i fje $X : B(0,\delta) \to \mathbb{R}^n$, $\Lambda : B(0,\delta) \to \mathbb{R}^k$ klase C^1 t. da

$$(7) \quad \nabla f(X(u)) + \nabla h(X(u))\Lambda(u) = 0$$
$$h(X(u)) = u \quad , u \in B(0,\delta)$$

Također, zbog neprekidnosti $\nabla_x^2 \mathcal{L}(x, \lambda)$ na maloj okolini $0 = u$ je zadovoljen dovoljan uvjet min. pa slijedi prva tvrdnja

Nadalje, iz (7), množeći s $\nabla X(u)$ slijedi

$$\nabla_u X(u)\, \nabla_x f(X(u)) + \nabla_u X(u)\, \nabla_x h(X(u))\, \Lambda(u) = 0$$

tj.

$$\nabla_u f(X(u)) = -\nabla_u h(X(u))\Lambda(u) = -\Lambda(u)$$

zbog $h(X(u)) = u$ $\boxtimes$

4.2.2. Uvjeti tipa jednakosti i nejednakosti

$$f(x) \to \min$$

(8) $h(x) = 0$ $\qquad h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$$g(x) \le 0 \qquad g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Skup aktivnih indeksa

$$I(x^*) = \{ j \in \{1,\dots,m\} : g_j(x^*) = 0 \}$$

Radimo s uvjetom regularnosti (jači od Fromowitz-Mangasarian)

$\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_k(x^*)$, $\nabla g_j(x^*)$ za $j \in I(x^*)$

su linearno nezavisni

Lagrangeova fja

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x)$$

Stoga, prema Teoremu 2.7, ako je x^* regularna točka lok. min. zadaće (8) onda postoje Lagrangeovi multiplikatori $\lambda^* \in \mathbb{R}^k$, $\mu^* \in \mathbb{R}^m$ t.da

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

$$\mu^* \ge 0, \qquad \mu_j^* g_j(x^*) = 0 \qquad j = 1..r$$

(Uvjet regularnosti ---> multiplikatori su određeni jednoznačno)

Za precizan zapis dovoljnih uvjeta optimalnosti aktivni skup razdvajamo:

$$I(x^*) = I_1(x^*) \cup I_2(x^*)$$

$$g_j(x^*)=0 \quad , \quad \mu_j^*=0 \qquad \mu_j^*>0$$

<u>Propozicija 4.5.</u> Neka je x^* regularna dopustiva točka, $\lambda^* \in \mathbb{R}^k, \mu^* \in \mathbb{R}^m$ takvi da

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

$$\mu^* \geq 0, \quad \mu^{*T} g(x^*) = 0$$

te

$$z^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) z > 0 \quad , \quad z \in L'(M, x^*), \; z \neq 0$$

gdje je

$L(M,x^*)$

$$L'(M,x^*) = \{ z \in \mathbb{R}^n : \; h'(x^*) z = 0, \; g_j'(x^*) z \leq 0, \; j \in I(x^*), \; g_j'(x^*) z = 0, \; j \in I_2(x^*) \}$$

Tada je x^* točka strogog lokalnog minimuma.

<u>Dokaz</u> Pretpostavimo suprotno: $\exists (y_k) \subseteq M$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \; f(y_k) \leq f(x^*)$$

te $y_k \to x^*$. Zapišimo y_k u obliku

$$y_k = x^* + \delta_k z_k \quad , \quad |z_k| = 1, \; \delta_k > 0$$

Stoga $\delta_k \searrow 0$, te možemo prijeći na konv. podniz $z_k \to z$.

$$h(y_k) = h(x^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{h(x^* + \delta_k z_k) - h(x^*)}{\delta_k} = 0 \quad / \lim_k$$

$$h'(x^*) z = 0$$

$f(y_k) \leq f(x^*)$ slično pokaži $f'(x^*) z \leq 0$

Za $j \in I(x^*)$, slično

$$g_j(y_k) \leq g_j(x^*) = 0 \Rightarrow g_j'(x^*) z \leq 0$$

Vrijedi

$$(9) \quad f'(x^*) z = -\sum \lambda_j^* \underbrace{h_j'(x^*) z}_{=0} - \sum \overbrace{\mu_j^*}^{\geq 0} \underbrace{g_j'(x^*) z}_{\leq 0}$$

Tvrdimo $(\forall j \in I_2(x^*))\ g_j'(x^*) z = 0$

U suprotnom ($<$), u (9) imamo kontradikciju:

L.S ≤ 0, D.S > 0.

Zaključak: $z \in L'(M, x^*)$

Iz teorema srednje vrijednosti (η_k^j, ξ_k^j između y_k i x^*).

$$0 = h_j(y_k) = \underbrace{h_j(x^*)}_{0} + \delta_k h_j'(x^*) z_k + \frac{\delta_k^2}{2} z_k^T \nabla^2 h_j(\eta_k^j) z_k$$

$$0 \geq f(y_k) - f(x^*) = \delta_k f'(x^*) z_k + \frac{\delta_k^2}{2} z_k^T \nabla^2 f(\eta_k^0) z_k$$

$$j \in I(x^*): \quad 0 \geq g_j(y_k) - g_j(x^*) = \delta_k g_j'(x^*) z_k + \frac{\delta_k^2}{2} z_k^T \nabla^2 g_j(\xi_k^j) z_k$$

Prvu jednakost množimo s λ_j^*, treću nejednakost s μ_j^* (ostale μ_j^* su 0) i zbrojimo

$$0 \geq \delta_k \mathcal{L}'(x^*, \lambda^*, \mu^*) z_k + \frac{\delta_k^2}{2} z_k^T \left[\nabla^2 f(\eta_k^0) + \sum \lambda_j^* \nabla^2 h_j(\eta_k^j) + \sum \mu_j^* \nabla^2 g_j(\xi_k^j) \right] z_k$$

Na limesu $\lightning$

Zadaću (8) svodimo na minimizaciju uz uvjete tipa jednakosti, korištenjem pomoćnih varijabli z_j:

$$(10) \qquad \begin{aligned} & f(x) \to \min \\ & h_i(x) = 0 \qquad i = 1,..,k \\ & g_j(x) + z_j^2 = 0, \quad j = 1,..,m \end{aligned}$$

Zadaće (8) i (10) su ekvivalentne:

x^* je lok. min za (8) $\Leftrightarrow$ (x^*, z^*) je lok. min za (10)

uz $z_j^* = \sqrt{-g_j(x^*)}$

Ako je x^* regularna za (8) tvrdimo da je (x^*, z^*) (uz z^* kao gore) regularna za (10)

Zapišimo (10) u obliku

$$\begin{aligned} & \bar{f}(x,z) \to \min & \quad & \bar{f}(x,z) = f(x) \\ & \bar{h}(x,z) = 0 & & \bar{h}(x,z) = h(x) \\ & \bar{g}(x,z) = 0 & & \bar{g}_j(x,z) = g_j(x) + z_j^2 \end{aligned}$$

$$\nabla \bar{h}(x^*, z^*) = \begin{bmatrix} \nabla h(x^*) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla \bar{g}_j(x^*, z^*) = \begin{bmatrix} \nabla g_j(x^*) \\ 0 \\ \vdots \\ 2 z_j^* \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ m \end{matrix}$$

$z_j^* = 0 \Leftrightarrow j \in I(x^*)$ (akt. indeks)

Stoga, x^* reg. za (8) ($\nabla h_i(x^*)$, $\nabla g_j(x^*)$, $j \in I(x^*)$ lin. nez.) $\Leftrightarrow$ (x^*, z^*) reg. za (10) ($\nabla \bar{h}_i$, $\nabla \bar{g}_j$ lin. nez.)

Prema Teoremu 2.7, ako je (x^*, z^*) lokalni minimum i regularna točka, onda postoji $\lambda^* \in \mathbb{R}^k$, $\mu^* \in \mathbb{R}^m$ t.d.

$$(11) \qquad \nabla \bar{f}(x^*, z^*) + \nabla \bar{h}(x^*, z^*)\lambda^* + \nabla \bar{g}(x^*, z^*)\mu^* = 0$$

tj.

$$(12) \quad \begin{cases} \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda^* + \nabla g(x^*)\mu^* = 0 \\ 2\mu_j^* \underbrace{z_j^*}_{\sqrt{-g_j(x^*)}} = 0 \qquad j = 1..m \end{cases}$$

zadnji uvjet m ekv. s $\mu_j^* g_j(x^*) = 0 \quad j = 1..m$

Dakle, nužni uvjeti optimalnosti (11) su „slični" onima za zadaću (8) – nedostaje jedino uvjet nenegativnosti: $\mu_j^* \geq 0$.

To će slijediti tek iz nužnih uvjeta drugog reda. Za zadaću (13) imamo:

<u>Teorem 4.6</u> Ako je x^* regularna točka lok. min za

$$f(x) \to \min$$
$$h(x) = 0$$

te su f i h klase C^2 na okolini točke x^* onda je

$$(13) \qquad z^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) z \geq 0, \quad \text{čim je } \nabla h(x^*)^T z = 0$$
$$(\text{tj. } z \in L(M, x^*))$$

Dz: Za malu krivulju $x : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to M$, $x(0) = x^*$ vrijedi $\frac{d^2}{dt^2} f(x(t))\Big|_{t=0} \geq 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x(t))\Big|_{t=0} = \dot{x}(0)^T \nabla^2 f(x^*)\, \dot{x}(0) + \nabla f(x^*)^T \ddot{x}(0)$$

Deriviramo i $h(x(t))=0$ dva puta:

$$0 = \dot{x}(0)^T \nabla^2 h(x^*)\, \dot{x}(0) + \nabla h(x^*)^T \ddot{x}(0)$$

Zbrajanjem prve jedn. i druge nakon množenja skalarno s λ^*:

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x(t))\Big|_{t=0} = \dot{x}(0)^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)\, \dot{x}(0)$$

(jer je $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$). ∎

U zadaći (10) uvjet (13) glasi

$$(14) \qquad \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{c|ccc} \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) & & 0 & \\ \hline & 2\mu_1^* & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 2\mu_m^* \end{array}\right] \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \geq 0$$

za neki $y \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$ t.da

$$\nabla h(x^*)^T y = 0$$

$$\nabla g_j(x^*)^T y + 2 z_j v_j = 0 \qquad j = 1..m$$

Za μ_j^* znamo da imamo 0 za $j \notin I(x^*)$.

Uzmimo za $j \in I(x^*)$ $v_j = 0$ pa gornja nejednakost prelazi u $y^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)\, y \geq 0$

čim je $\nabla h(x^*)^T y = 0$, $\nabla g_j(x^*)^T y = 0$, $j \in I(x^*)$

Aktivni indeksi su oni $j \in \{1..m\}$ za koji je $z_j^* = 0$. Uzmimo u (14): $y = 0$, $v_j \neq 0$, $j \in I(x^*)$ i $v_j = 0$, $j \notin I(x^*)$:

$$\sum_{j \in I(x^*)} 2\mu_j^* v_j^2 \geq 0$$

iz čega slijedi $\mu_j \geq 0$, $j \in I(x^*)$.

Druga ideja svođenja uvjeta tipa nejednakosti na uvjete tipa jednakosti

$$g_j(x) \leq 0 \iff g_j(x) + u_j = 0$$
$$u_j \geq 0$$

uz dodatni uvjet $u \geq 0$ na pomoćne varijable, no linearna je pa analiza uvjeta optimalnosti nije preteška.

4.3 Beskonačnodimenzionalni slučaj

Vraćamo se na zadaću s početka poglavlja

$$(15) \begin{cases} f(x) \to \min \\ e(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \\ \ell(x) \in K \end{cases}$$

ℓ afina, $K \subseteq Z$ zatv. konv. konus

$g : X \to \mathbb{R}^m$

$e : X \to W$

X, W, Z Hilbertovi.

Zadaća je ekvivalentna s

$$(16)\quad \begin{cases} f_c(x,u) = f(x) + \frac{c}{2}|e(x)|_W^2 + \frac{c}{2}|g(x)+u|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min \\ e(x) = 0 \\ g(x)+u = 0, \quad u \geq 0 \\ \ell(x) \in K \end{cases}$$

c je pozitivna konstanta.

Slično kao prije: x^* je točka lok. min za (15)

$\Leftrightarrow$ $(x^*, -g(x^*))$ je točka lok. min za (16)

U (11) i (12) smo zapisali nužne uvjete optimalnosti za x^*, lokalnog rješenja od (15), uz multiplikatore

$$\begin{array}{ccc} \lambda^*, & \mu^*, & \eta^* \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ e & g & \ell \end{array}$$

Nije teško vidjeti da točka $(x^*, -g(x^*))$ zadovoljava uvjete optimalnosti uz mult $(\lambda^*, \mu^*, \mu^*, \eta^*)$:

$$\begin{array}{c} \mu^* \\ \updownarrow \\ -u \leq 0 \end{array}$$

$$f'_{c,x}(x^*, \underbrace{u^*}_{= -g(x^*)}) = f'(x^*)$$

$$f'_{c,u}(x^*, u^*) = 0$$

$$(g(x)+u)'_x = g'(x)$$

$$(g(x)+u)'_u = I \in M_m(\mathbb{R})$$

uz Dif po u ... $0 = I\mu^* - I\mu^*$ u

Proširena Lagrangeova fja je Lagr. fja pridružena zadaći (16):

$$\mathcal{L}_c(x, u, \lambda, \mu, \eta) = \mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \eta) + \frac{c}{2}|e(x)|_W^2 + \frac{c}{2}|g(x)+u|_{\mathbb{R}^m}^2$$

$$\mathcal{L}_c''(x^*, u^*, \lambda^*, \mu^*, \eta^*)((h,k),(h,k))$$

$$= \mathcal{L}''(x^*, \lambda^*, \mu^*, \eta^*)(h,h) + c|e'(x^*)h|_W^2 + \underbrace{c|g'(x^*)h+k|_{\mathbb{R}^m}^2}$$

$$c\sum_{j\in I_2(x^*)}|g_j'(x^*)h|^2 + \sum_{\substack{j\in I_1(x^*)\\ j\notin I(x^*)}} c\,|g_j'(x^*)h+k_j|^2 +$$

$$\left(I(x^*) = \underset{\substack{\uparrow\\ \mu_j^*=0}}{I_1(x^*)} \cup \underset{\substack{\uparrow\\ \mu_j^*>0}}{I_2(x^*)} \right)$$

$$+ \; c\sum_{j\in I_2(x^*)}\left(|k_j|^2 + 2k_j g_j'(x^*)h\right)$$

Radi jednostavnosti zapisa, renumeriramo uvjete tipa nejednakosti tako da je

$$I_1(x^*) = \{1, 2, \dots m_1\},\; I_2(x^*) = \{m_1+1, \dots m_1+m_2\}$$

$$I_3(x^*) = I(x^*)^c = \{m_1+m_2+1, \dots, m\}$$

Uvodimo lin. nepr. op $E: X \to W \times \mathbb{R}^{m_2}$

$$Eh = \big(e'(x^*)h, \underbrace{g'_{m_1+1}(x^*)h}, \dots, g'_{m_1+m_2}(x^*)h\big)$$

~~Ro~~ Rieszovim tm $(\ell_{m_1+1}, h)_X$ (shel. prod.)

$\hphantom{xx}\cap$
$\hphantom{xx}X$

<u>Propozicija 4.7</u> Ako su f, e, g klase C^2 u okolini x^*, $e'(x^*): X \to W$ surjekcija te vrijedi (1) i (2) (nužni uvjeti optimalnosti) i

$$\mathcal{L}''(x^*, \lambda^*, \mu^*, \eta^*)(h,h) \geq \gamma |h|_X^2$$

za sve $h \in C = \{h \in X : e'(x)h = 0, \ g_j'(x^*)h \leq 0 \text{ za } j \in I_1(x^*),$

$$g_j'(x^*)h = 0 \text{ za } j \in I_2(x^*)\}$$

tada postoji konstanta $\bar{c} > 0$ i $\tau \in \langle 0, \gamma]$ t.da

$$H((h,\hat{k}),(h,\hat{k})) := \mathcal{L}''(x^*, \lambda^*, \mu^*, \eta^*)(h,h) + c|Eh|^2$$
$$+ c\sum_{i=1}^{m_1} |(\ell_i, h)_X + \hat{k}_i|^2 \geq \tau\big(|h|_X^2 + |\hat{k}|^2_{\mathbb{R}^{m_1}}\big)$$

za sve $c \geq \bar{c}$, $h \in X$, $\hat{k} \in \mathbb{R}^{m_1}$

<u>Dokaz</u>: Ito Kunisch Prop 3.1

Propozicija 4.8 Uz pretpostavke Prop 4.7

postoji $\tilde{\sigma} > 0$ t. da

$$\mathcal{L}''_{\bar{c}}(x^*, u^*, \lambda^*, \mu^*, \eta^*)((h,k),(h,k)) + \sum_{j \in I_2(x^*)} \mu_j^* k_j$$

$$\geq \tilde{\sigma}\left(|h|_X^2 + |k|_{\mathbb{R}^m}^2 \right)$$

za sve $h \in X$ t. da $|h| \leq \dfrac{\tilde{\mu}}{2\bar{c} \sup\limits_{j \in I_2(x^*)} |\ell_j|}$,

$\tilde{\mu} = \min\limits_{j \in I_2(x^*)} \mu_j^*$ i za sve $k \in \mathbb{R}^m$ t. da

$k_j \geq 0$, $j \in I(x^*)$.

Dz: Ito Kunisch Prop 3.3

Teorem 4.9 Uz pretpostavke Prop 4.7

postoji $\bar{\sigma} > 0$, $\bar{c} > 0$ i okolina $U = U(x^*, u^*)$

točke $(x^*, u^*) = (x^*, -g(x^*))$ t. da

$$\mathcal{L}_c(x, u, \lambda^*, \mu^*, \eta^*) + (\mu^*, u)_{\mathbb{R}^m} =$$

$$= f(x) + (\lambda^*, e(x))_W + (\mu^*, g(x)+u)_{\mathbb{R}^m} + (\eta^*, \ell(x))_Z +$$

$$+ \frac{c}{2} |e(x)|_W^2 + \frac{c}{2} |g(x)+u|_{\mathbb{R}^m}^2$$

$$\geq f(x^*) + \bar{\sigma}\left(|x - x^*|_X^2 + |u - u^*|_{\mathbb{R}^m} \right)$$

za sve $c \geq \bar{c}$ i $(x,u) \in U$, $u_j \geq 0$ za $j \in I(x^*)$

Korolar 4.10 Uz pretpostavke Prop 4.7 postoji okolina $U(x^*)$ točke x^* t.da

$$f(x) \geq f(x^*) + \sigma |x-x^*|_X^2$$

za sve $x \in U(x^*)$ t.da $e(x)=0$, $g(x) \leq 0$ i $\ell(x) \in K$.

Dokaz: Iz Tma 4.9 čitamo da

$$(x,u) \mapsto \mathcal{L}_c(x,u,\lambda^*,\mu^*,\eta^*) + (\mu^*,u)_{\mathbb{R}^m}$$

poprima strogi lokalni minimum u (x^*,u^*)

jer je $\mathcal{L}_c(x^*,u^*,\lambda^*,\mu^*,\eta^*) = f(x^*) - (\mu^*,u^*)$.

Ako dodamo uvjete
$$e(x)=0$$
$$g(x)+u=0$$

$$\mathcal{L}_c(x,u,\lambda^*,\mu^*,\eta^*) + (\mu^*,u) = f(x)$$

pa slijedi tvrdnja ∎

Tm 4.9 želimo zapisati bez pomoćne var. u.

$$\tilde{g}(x) = \max\{g(x),0\} = g(x)^+ \in \mathbb{R}^m \quad \text{(po komp.)}$$

Korolar 4.11 Uz pretp. Prop 4.7 postoji okolina $U(x^*)$ točke x^* t.da

$$f(x) + (\lambda^*, e(x))_W + (\mu^*, \tilde{g}(x))_{\mathbb{R}^m} + (\eta^*, \ell(x))_Z +$$
$$+ \frac{c}{2}|e(x)|_W^2 + \frac{c}{2}|\tilde{g}(x)|_{\mathbb{R}^m}^2 \geq f(x^*) + \bar{\sigma}|x-x^*|^2$$

za sve $x \in U(x^*)$ i $c \geq \bar{c}$.

Dokaz: Iskoristimo Teorem 4.9 uz

(17) $$u = \max\{-g(x), 0\} \geq 0$$

Vrijedi $g(x) + u = \tilde{g}(x)$

Def. okolina $U(x^*)$ me način da

$$x \in U(x^*) \Rightarrow (x, -g(x)) \in U(x^*, u^*) \quad \text{(iz Tma)}$$

$$\text{te } g_j(x) \leq 0 \quad \text{za } j \notin I(x^*)$$

Vrijedi $(x, u) \in I(x^*, u^*)$ za $x \in U(x^*)$ i u dan sa (17) pa tražena tvrdnja slijedi iz Tma 4.9 ▨

Slično se postiže i za $\tilde{g}(x, \mu, c) = \max\{g(x), -\frac{\mu}{c}\}$

(Bertsekas)

Imali smo zadaću

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ e(x) = 0, \quad g(x) \leq 0, \quad l(x) \in K \end{cases}$$

Uvjete nejednakosti svodimo na jednakosti uvođenjem pomoćnih varijabli $u \in \mathbb{R}^m$, $u \geq 0$

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \eta) = f(x) + (\lambda, e(x))_W + (\mu, g(x))_{\mathbb{R}^n} + (\eta, l(x))_Z$$

$$\mathcal{L}_c(x, u, \lambda, \mu, \eta) = \mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \eta) + \frac{c}{2} |e(x)|_W^2 + \frac{c}{2} |g(x) + u|_{\mathbb{R}^m}^2$$

$\rightsquigarrow$ Tm 4.9: Ako f, e, g klase C^2 u okolini x^*, $e'(x^*)$ surjekcija, λ^*, μ^*, η^* pripadni multiplikatori te vrijedi nužni uvjet optimalnosti drugog reda tada

$$\mathcal{L}_c(x, u, \lambda^*, \mu^*, \eta^*) + (\mu^*, u)_{\mathbb{R}^n} \geq f(x^*) + \bar{\sigma}\left(|x - x^*|_X^2 + |u - u^*|_{\mathbb{R}^n}^2\right)$$

za neki $c \geq \bar{c}$ i $(x, u) \in \mathcal{U}(x^*, u^*)$ okolina, $\eta_j \geq 0$, $j \in I(x^*)$

Kako je $f(x^*) = \mathcal{L}_c(x^*, u^*, \lambda^*, \mu^*, \eta^*) + (\mu^*, u^*)_{\mathbb{R}^n}$

to znači da $(x, u) \longmapsto \mathcal{L}_c(x, u, \lambda^*, \mu^*, \eta^*) + (\mu^*, u)$ poprima strogi lokalni min u (x^*, u^*)

Varijabla u se u toj f-ji javlja samo u

$$(\mu^*, g(x) + u)_{\mathbb{R}^m} + \frac{c}{2} |g(x) + u|_{\mathbb{R}^m}^2$$

pa možemo minimizirati taj izraz po $u \geq 0$ i time eliminirati u

Ako zamemarimo uvjet $u \geq 0$ ova kvadratična fja poprima min u jedinstvenoj točki $(c>0)$:

$$\mu_j + c\left(g_j(x) + \hat{u}_j\right) = 0$$

tj. $\hat{u}_j = -\left(g_j(x) + \frac{\mu_j}{c}\right)$, što znači da je jedinstvena točka min uz uvjet $u \geq 0$

$$u_j^* = \max\left\{0, -\left(g_j(x) + \frac{\mu_j}{c}\right)\right\}$$

čime je

$$\underbrace{g_j(x) + u_j^*}_{\text{uvodimo } \hat{g}_j(x,\mu,c)} = \max\left\{g_j(x), -\frac{\mu_j}{c}\right\}$$

$$\hat{g}(x,\mu,c) = \max\left\{g(x), -\frac{\mu}{c}\right\}$$

što opravdava uvođenje fje ...

$$\mathcal{L}_c(x,\lambda,\mu,y) = f(x) + (\lambda, e(x))_W + (\mu, \hat{g}(x,\mu,c))_{\mathbb{R}^m} + (y, l(x))_Z$$

eliminirali smo u

$$+ \frac{c}{2}|e(x)|_W^2 + \frac{c}{2}|\hat{g}(x,\mu,c)|_{\mathbb{R}^m}^2$$

$\Rightarrow$ Tm 4.9 kaže da ova fja (uz $\lambda = \lambda^*, \mu = \mu^*, y = y^*$) poprima strogi lokalni min u x^*:

<u>Korolar 4.12</u>: Uz pretpostavke Tma 4.9 postoji $\delta > 0$, $\bar{\sigma} > 0$ i $\tilde{c} = \tilde{c}(r) \geq \bar{c}$, $r > 0$ zadan

$$f(x) + (\lambda^*, e(x))_W + (\mu^*, \hat{g}(x,\mu,c))_{\mathbb{R}^m} + (y, l(x))_Z + \frac{c}{2}|e(x)| + \frac{c}{2}|\hat{g}(x,\mu,c)|$$

$$\geq f(x^*) + \bar{\sigma}|x - x^*|^2$$

za svaki $c > \tilde{c}$, $x \in \overline{B}(x^*, \delta)$, $\mu \in \overline{B}(\mu^*, r) \cap \mathbb{R}^m_+$

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$ takav da

$$g_i(x^*) \leq -\varepsilon, \qquad i \notin I(x^*) \quad (tj.\ i \in I_3(x^*))$$

te $|x - x^*| < \varepsilon$, $|u - u^*| < \varepsilon \Rightarrow (x, u) \in U(x^*, u^*)$

(okolina iz Teorema 4.9)

Neka je $\delta \in \langle 0, \varepsilon \rangle$ t.da

$$|x - x^*| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

te $\tilde{c} \geq \frac{2r}{\varepsilon}$

Za $c \geq \tilde{c}$ i $\mu \in \overline{B}(\mu^*, r) \cap \mathbb{R}^m_+$ definiramo

(18) $$u = \max\left(0, g(x) + \frac{\mu}{c}\right)$$

tj. $g(x) + u = \hat{g}(x; \mu, c)$ te $u \geq 0$

Tvrdnja Korolara sada slijedi iz Tm 4.9, ako pokažemo da

$$x \in \overline{B}(x^*, \delta), \mu \in \overline{B}(\mu^*, r) \cap \mathbb{R}^m_+ \Rightarrow |u - u^*| < \varepsilon$$

gdje je u def. u (18)

Za $i \in I(x^*)$ imamo

(19) $$|u_i - u_i^*| \leq |\underbrace{g_i(x^*)}_{0} - g_i(x)| + \frac{\mu_i}{c} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Za $i \notin I(x^*)$

$$i \quad \frac{\mu_i}{c} + g_i(x) \leq \frac{\mu_i}{c} + |g_i(x^*) - g_i(x)| + g_i(x^*) <$$

$$< \frac{r}{c} + \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon < 0$$

pa je $|u_i - \underset{-g_i(x^*)}{\underset{\|}{u_i^*}}| = |-g_i(x) - \frac{\mu_i}{c} + g_i(x^*)| \leq |g_i(x^*) - g_i(x)| + \frac{\mu_i}{c}$

(kao i za $i \in I(x^*)$)

Kvadriranjem i zbrajanjem po i

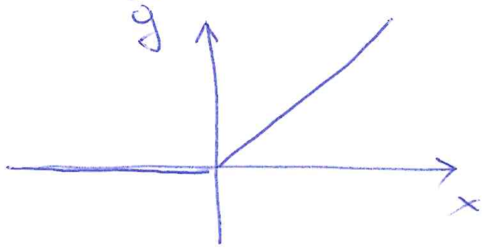
$$|u-u^*|^2 \le 2\,|g(x^*)-g(x)|^2 + 2\,\frac{|\mu|^2}{c^2} < \varepsilon^2 \qquad \blacksquare$$

Napomena 4.13: Prednost korištenja fje $\hat{g}$ umjesto $\tilde{g}(x) = \max(g(x), 0)$ je što je

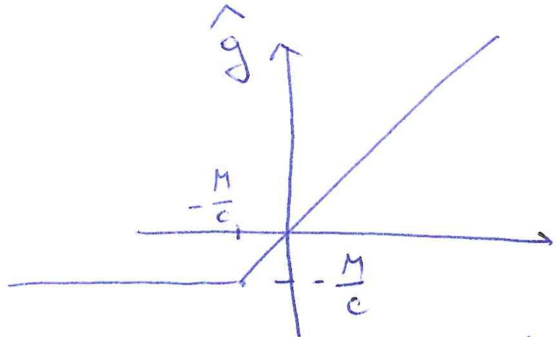
$$x \longmapsto (\mu, \hat{g}(x,\mu,c)) + \frac{c}{2}\,|\hat{g}(x,\mu,c)|^2$$

klase C^1, ako je g klase C^1.

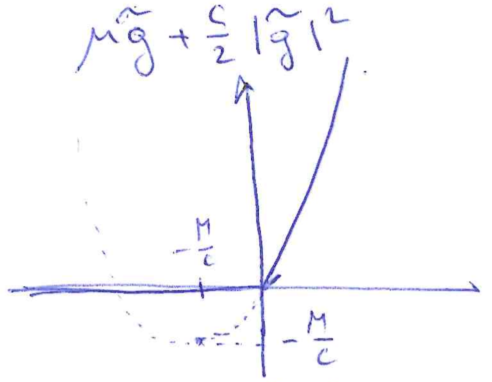
Npr $m=1$, $g(x)=x$, $\mu, c>0$



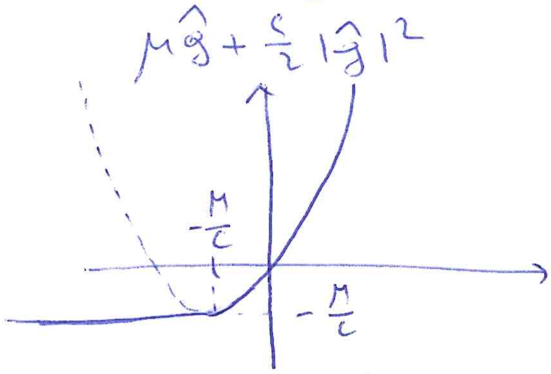
$$\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x, & x>-\frac{\mu}{c} \\ -\frac{\mu}{c}, & \text{inače} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mu x + \frac{c}{2}x^2, & x>0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mu x + \frac{c}{2}x^2, & x>-\frac{\mu}{c} \\ -\frac{\mu}{c}, & \text{inače} \end{cases}$$

4.4. Algoritam proširene Lagrangeove metode

Odaberemo $(\lambda_0, \mu_0) \in W \times \mathbb{R}^m_+$ i iterativno želimo definirati niz $x_n, \lambda_n, \mu_n, y_n$ koji će konvergirati prema $x^*, \lambda^*, \mu^*, y^*$.

Prema prethodnim rezultatima, definiramo

$$\mathcal{L}_n(x) = f(x) + (\lambda_{n-1}, e(x))_W + (\mu_{n-1}, \hat{g}(x, \mu_{n-1}, c_n))_{\mathbb{R}^n} + \frac{c_n}{2} |e(x)|^2_W + \frac{c_n}{2} |\hat{g}(x, \mu_{n-1}, c_n)|^2$$

gdje je (c_n) neopadajući niz u $[\bar{c}, +\infty\rangle$ – za razliku od klasičnog kaznenog parametra, niz c_n ne mora nužno težiti u $+\infty$. Definiramo $\sigma_n = c_n - \bar{c}$.

Algoritam (ALM)

1. $(\lambda_0, \mu_0) \in W \times \mathbb{R}^m_+$

2. x_n je točka min zadaće

$$(20) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_n(x) \to \min \\ \ell(x) \in K \end{cases}$$

te je y_n pripadni multiplikator

3. Definiramo nove multiplikatore

$$(21) \quad \begin{aligned} \lambda_n &= \lambda_{n-1} + \sigma_n e(x_n) \\ \mu_n &= \mu_{n-1} + \sigma_n \hat{g}(x_n, \mu_{n-1}, c_n) \end{aligned}$$

Vrati se na 1 (ako nije zadovoljen kriterij zaustavljanja)

Pokazuje se da vrijedi (za detalje Ito Kunisch Section 3.4)

1. $\mu_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Za dovoljno velike n x_n pripada $B(x^*, \delta)$ (δ iz Korolara 4.12)

3. $x_n \to x^*$, $\lambda_n \to \lambda^*$, $\mu_n \to \mu^*$, $\eta_n \to \eta^*$

Formule (21) su izvedene iz činjenica da x^*, (λ^*, μ^*) predstavlja sedlastu točku za $L_c(\cdot, \cdot, \cdot; \eta^*)$ – kasnije.

Brzina konvergencije u 3. je linearna.

5. Proširenje Lagrangeove metode u (neglatkoj) konveksnoj optimizaciji

5.1. Konveksna analiza

X – Banachov

Funkcional $F: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ je konveksan ako

$$F((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)F(x_1) + \lambda F(x_2)$$

za svaki $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in [0,1]$. Kažemo da je pravilan ako nije identički jednak $+\infty$ tj. ako je domena

$$D(F) = \{x \in X : F(x) < +\infty\}$$

neprazna.

Vrijedi: $F: X \to \overbrace{\mathbb{R} \cup \{+\infty\}}^{\overline{\mathbb{R}}}$ je konveksna $\iff$

$D(F)$ je konveksan i $F: D(F) \to \mathbb{R}$ je konveksna.

Nadgraf $\quad \mathrm{epi}\, F = \{(x,c) \in X \times \mathbb{R} : c \geq F(x)\}$

$F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ je odozdo poluneprekidna u $x \in X$ ako

$$F(x) \leq \liminf_{y \to x} F(y)$$

ili – X normiran: $\liminf_n F(x_n)$, čk $x_n \to x$

odn. slabo odozdo poluneprekidna u $x \in X$ ako

$$F(x) \leq \liminf_{n \to \infty} F(x_n)$$

za svaki niz (x_n) u X koji slabo konv. prema x.

F je (slabo) odozdo poluneprekidna ako je takva u svakoj točki $x \in X$.

Lema 5.1 $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ je odozdo poluneprekidna ako i samo ako je epi F zatvoren u $X \times \mathbb{R}$.

Dokaz: iz ekvivalencije

$$f \text{ je odozdo poluneprekidna} \iff (\forall \alpha \in \mathbb{R}) \ f^{-1}(\langle \alpha, +\infty \rangle) \text{ je otvoren}$$

Lema 5.2. $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ je poluneprekidna odozdo ako i samo ako je nivo skup

$$S_c = \{ x \in X : F(x) \leq c \}$$

zatvoren za neki $c \in \mathbb{R}$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $x_n \to x$, $F(x_n) \leq c \Rightarrow$

$$F(x) \leq \liminf_n F(x_n) \leq c \quad \text{tj. } S_c \text{ zatvoren}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka $x_n \to x$. Uzmimo podniz x_{n_k} tako da

$$F(x_{n_k}) \to \liminf_n F(x_n)$$

Pretp. suprotno $F(x) > \liminf_n F(x_n)$. Stoga, za dovoljno veliki n i c između $F(x)$ i $\liminf_n F(x_n)$ imamo

$$F(x_{n_k}) \leq c$$

pa je $x_{n_k} \in S_c$, $x_{n_k} \to x$, S_c zatvoren $\Rightarrow$

$$F(x) \leq c \quad \lightning.$$

Lema 5.3. $F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ je konveksna $\iff$ epi F konv.

$F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ konveksna $\Rightarrow$ Nivo-skup S_c je konveksan za neki $c \in \mathbb{R}$

(obrat vrijedi za F t.d.

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) \le \max\{F(x), F(y)\}$$
)

Lema 5.4 Neka je $F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ takva da je neki nivo skup S_c konveksan. Tada je F poluneprekidna odozdo ako i samo ako je slabo poluneprekidna odozdo.

Dokaz: Kor 1.3: K zatvoren i konveksan $\Rightarrow$ slabo zatvoren.

Teorem 5.5 Neka je F pravilna, konveksna, poluneprekidna odozdo. Tada je F omeđena odozdo s afinim f-lom tj. postoji $x^* \in X^*$ i $c \in \mathbb{R}$ t.d.

$$F(x) \ge \langle x^*, x \rangle_{X^*, X} + c, \quad x \in X$$

Nadalje, $F(x)$ je supremum svih takvih D.S.

Dokaz: epi F je konveksna – iskoristimo Kor 1.2.

Teorem 5.6 Ako je $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konveksna i omeđena odozgo na otvorenom skupu $U \subseteq X$ onda je F neprekidna na $\operatorname{int}\operatorname{dom} F$.

Dk: Neka je $x_0 \in U$ i $V := B(x_0, \delta) \subseteq U$ te

$$F(x) \leq k, \quad x \in V$$

$$F \text{ nepr u } x_0 \iff \underbrace{F(x+x_0) - F(x_0)}_{\text{konv.}} \text{ nepr u } 0$$

Stoga BSOMP $x_0 = 0$ i $F(0) = 0$

Dokažimo da je F nepr. u 0.

$$F(x) = F\left(\varepsilon \frac{x}{\varepsilon} + (1-\varepsilon)0\right) \leq \varepsilon F\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon k$$

za neki $x \in \varepsilon V$, $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$. S druge strane

$$0 = F(0) \leq \frac{1}{2}\left(F(x) + F(-x)\right)$$

pa je

$$-F(x) \leq F(-x) \leq \varepsilon k, \quad x \in -\varepsilon V = \varepsilon V$$

tj. $|F(x)| \leq \varepsilon k$, $x \in \varepsilon V$

tj. F je neprekidna u 0.

Neka je sada $z \in \operatorname{int}\operatorname{dom} F$ i $\varrho > 0$ t.d. je $z_0 = \varrho z \in \operatorname{dom} F$. Prema prvom dijelu dokaza, dovoljno je pokazati da je F omeđena odozgo na nekoj okolini točke z. Def

$$V(z) = B\left(z, \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)\delta\right) = z + \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)V$$

Za $u \in V(z)$ i $x \in V$

$$F(u) = F\left(\frac{1}{\rho} z_0 + \left(1-\frac{1}{\rho}\right)x\right) \le \frac{1}{\rho} F(z_0) + \left(1-\frac{1}{\rho}\right)F(x)$$

$$\le \frac{1}{\rho} F(z_0) + \left(1-\frac{1}{\rho}\right)k .$$

■

Posebno, ako je pravilna konveksna fja F odozgo poluneprekidna u točki iz int dom F, onda je F neprekidna na int dom F.

Teorem 5.7: Ako je $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konveksna, omeđena odozgo na (konveksnoj) δ-okolini U omeđenog konveksnog skupa C onda je F Lipschitz neprekidna na C.

Dokaz: Zbog Tma 5.5, F je i omeđena odozdo na U:

$$m \le F(x) \le M \quad , \quad x \in U$$

Neka su x i $\hat{x}$ iz C, $|x-\hat{x}|_X \le \frac{\delta}{M-m}$, $x \ne \hat{x}$.

Def $\theta = \frac{2|x-\hat{x}|}{\delta} > 0$

BSOMP $\frac{2}{M-m} < 1 \Rightarrow \theta < 1$. Tada je

$$y := \frac{x-\hat{x}}{\theta} + \hat{x} \in U \qquad \left(|y-\hat{x}| \le \frac{\delta}{2}\right)$$

$$F(x) \le (1-\theta) F(\hat{x}) + \theta F\Big(\underbrace{\frac{x-\hat{x}}{\theta} + \hat{x}}_{y}\Big) \le (1-\theta)F(\hat{x}) + \theta M$$

Slijedi:

$$F(x)-F(\hat{x}) \leq \theta(M-F(\hat{x})) \leq \frac{2}{\delta}(M-m)|x-\hat{x}|$$

Slično $\frac{\hat{x}-x}{\theta}+\hat{x} \in U$ i

$$F(\hat{x}) \leq \frac{\theta}{1+\theta} F\left(\frac{\hat{x}-x}{\theta}+\hat{x}\right)+\frac{1}{1+\theta}F(x) \leq \frac{\theta M}{1+\theta}+\frac{F(x)}{1+\theta}$$

što povlači

$$-\theta(M-m) \leq -\theta(M-F(\hat{x})) \leq F(x)-F(\hat{x})$$

Dakle

$$|F(x)-F(\hat{x})| \leq \frac{2}{\theta}(M-m)|x-\hat{x}|,$$ čim je

$|x-\hat{x}| \leq \frac{\delta}{M-m}$. Zbog omeđenosti i konveksnosti od C slijedi tvrdnja. ∎

5.2.1 Konjugirani funkcional

Definicija 5.8: Za $F: X \to [-\infty, +\infty]$ (X normiran) definiramo konjugirani funkcional (u smislu Fenchela / Legendre-Fenchela / Young-Fenchela) $F^*: X^* \to \langle -\infty, \infty]$ s

$$F^*(x^*) = \sup \{ \langle x^*, x \rangle_{X', X} - F(x) : x \in X \}$$

Primjer 5.9: a) $A \subseteq X$, I_A indikatorska fja

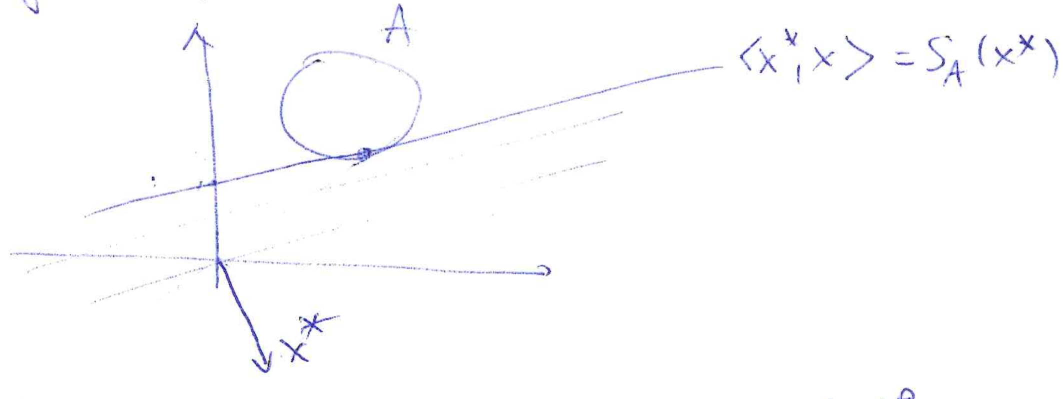
$$I_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ +\infty, & x \notin A \end{cases}$$

$$I_A^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle - I_A(x)$$

$$= \sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle \qquad (A \text{ neprazan})$$

$$=: S_A(x^*) \qquad \text{potporna fja skupa } A$$

(Ako je A prazan: $I_A \equiv +\infty \Rightarrow I_A^* \equiv -\infty$)



b) Neka je $p \in \langle 1, +\infty \rangle$, $f(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $x \in \mathbb{R}$.

Za fiksni $x^* \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\varphi(x) = x^* x - \frac{|x|^p}{p}$$

f konveksna $\Rightarrow \varphi$ konkavna, glatka

$$\varphi'(x) = x^* - (\operatorname{sgn} x)|x|^{p-1} = 0 \iff x_0 = (\operatorname{sgn} x^*)|x^*|^{\frac{1}{p-1}}$$

(točka maksimuma!)

$$f^*(x^*) = \sup_x \varphi(x) = \varphi(x_0) = |x^*|^{\frac{1}{p-1}+1} - \frac{|x^*|^{\frac{p}{p-1}}}{p}$$

$$= |x^*|^{\frac{p}{p-1}}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{|x^*|^q}{q}$$

gdje je q dualni indeks $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

c) $f(x) = \|x\|_X$

i) Neka je $x^* \in X^*$, $\|x^*\|_{X^*} \leq 1 \Rightarrow$

$$\langle x^*, x\rangle_{X^*, X} \leq \|x^*\|_{X^*}\|x\|_X \leq \|x\|$$

$$\Rightarrow f^*(x^*) = \sup_{x\in X} (\underbrace{\langle x^*, x\rangle - \|x\|}_{\leq 0}) = 0$$

$= 0$ za $x=0$

ii) Ako je $\|x^*\|_{X^*} > 1 \Rightarrow$ (po def. norme $\|\;\|_{X^*}$)

postoji $x_0 \in X$ t.da $\alpha := \langle x^*, x_0\rangle - \|x_0\| > 0$

$$\Rightarrow \langle x^*, \varrho x_0\rangle - \|\varrho x_0\| \to +\infty \text{ kad } \varrho \to +\infty$$

$$\Rightarrow f^*(x^*) = +\infty.$$

Dakle $f^* = I_{B_{X^*}}$ indikatorska fja jedinične kugle u X^*.

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^\tau Q x$, $x \in \mathbb{R}^n$

gdje je $Q \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična, pozitivno def.

Slično kao u b), za $x^* \in \mathbb{R}^n$ lako se računa

točka max za $\varphi(x) = x^{*\tau}x - \frac{1}{2}x^\tau Q x$

$x_0 = Q^{-1}x^*$ i slijedi

$$f^*(x^*) = \frac{1}{2} x^{*T} Q^{-1} x^*$$

Def: $f: X \to [-\infty, \infty]$ je pravilna ako se vrijednost $-\infty$ ne poprima te je $\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$.

Ako je $f: X \to \langle -\infty, +\infty]$ onda vrijedi Young-Fenchelova nejednakost

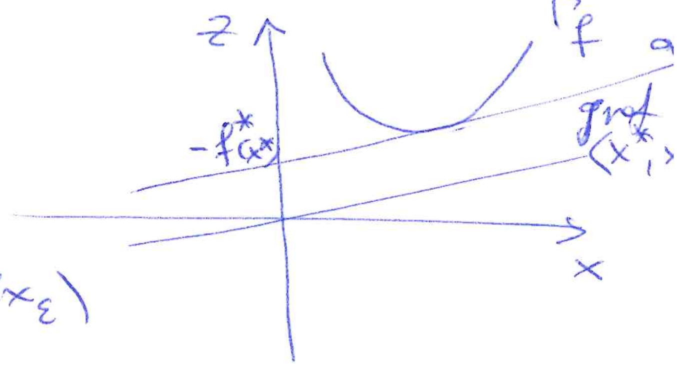
$$f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x \rangle$$

Ako za neki x $f(x) = -\infty$ imamo $f^*(x^*) = +\infty$ za svaki x^*

Ako je $f^*(x^*) \in \mathbb{R}$, onda afina fja

$$a(x) = \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*)$$

zadovoljava $a \leq f$.



Nadalje, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon \in X)$

$$f^*(x^*) - \varepsilon < \langle x^*, x_\varepsilon \rangle - f(x_\varepsilon)$$

ili ekv.

$$a(x_\varepsilon) > f(x_\varepsilon) - \varepsilon$$

(tj. a možemo interpretirati kao tangentu na graf od f)

Teorem 5.10 Za $f: X \to [-\infty, \infty]$

a) f^* je konveksna i odozdo poluneprekidna

b) Ako je $\mathrm{dom}\, f = \{x \in X : f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$, onda je $f^*(x^*) > -\infty$, $x^* \in X^*$.

c) Ako je f pravilna, konveksna i odozdo poluneprekidna, onda je f^* pravilna.

Dokaz: a) f^* je konveksna kao supremum konveksnih (afinih) $x^* \longmapsto \langle x^*, x\rangle - f(x)$.
Slično, ako su g_i poluneprekidne odozdo za $i \in I$, onda je i $\sup\limits_{i\in I} g_i$ poluneprekidna odozdo:

$$\{x \in X : \sup_{i \in I} g_i(x) \le \lambda\} = \bigcap_{i\in I} \{x \in X : g_i(x) \le \lambda\}$$

Prema Lemi 5.2. slijedi tvrdnja
(Primijetimo, ako je I konačan, onda je i $\min\limits_{i\in I} g_i$ odozdo poluneprekidna:

$$\{x \in X : \min_{i\in I} g_i(x) \le \lambda\} = \bigcup_{i\in I} \{x\in X : g_i(x) \le \lambda\}$$

b) Za $x \in \operatorname{dom} f \neq \emptyset$

$$f^*(x^*) \ge \langle x^*, x\rangle - f(x) > -\infty$$

Općenito: $f^*(x^*) = \sup\limits_{\underbrace{x \in \operatorname{dom} f}_{\text{umjesto } X}} \langle x^*, x\rangle - f(x)$

$\boxed{\operatorname{dom} f = \emptyset \Rightarrow f^* = -\infty}$

c) Ako je $x_0 \in \operatorname{dom} f \Rightarrow (x_0, f(x_0)-1) \in \operatorname{epi} f$
$\operatorname{epi} f$ je zatvoren i konveksan pa ga možemo jako separirati od gornje točke:

$$\sup_{(x,\alpha)\in \operatorname{epi} f} \langle y_0^*, x\rangle + \beta_0 \alpha < \langle y_0^*, x_0\rangle + \beta_0 (f(x_0) - 1)$$

za neki $\beta_0 \in \mathbb{R}$ i $y_0^* \in X^*$, bar jedan netrivijalan
Očito je $\beta_0 \neq 0$. Nadalje, $\beta_0 < 0$ jer bi inače L.S bila $+\infty$. Dijeleći s $|\beta_0|$ imamo

$$\sup_{(x,\alpha)\in \operatorname{epi} f} \left\langle \frac{y_0^*}{|\beta_0|}, x\right\rangle - \alpha < 1 - \underbrace{f(x_0)}_{>-\infty} + \left\langle \frac{y_0^*}{|\beta_0|}, x_0\right\rangle$$

$\alpha \geq f(x)$ pa se sup zapisuje jednostavnije:

$$\underbrace{\sup_{x\in \operatorname{dom} f} \left\langle \frac{y_0^*}{|\beta_0|}, x\right\rangle - f(x)}_{f^*\left(\frac{y_0^*}{|\beta_0|}\right)} < +\infty$$

$$f^*\left(\frac{y_0^*}{|\beta_0|}\right) < +\infty$$

(Primijetimo; tvrdnja c) direktno slijedi iz Teorema 5.5) ☐

Primjer 5.11. $f = p_A$ funkcional Minkowskog, za $A \subseteq X$ koji sadrži 0

$$f(x) = \inf\{\lambda \in \langle 0,+\infty] : x \in \lambda A\}$$

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\left(\langle x^*, x\rangle - \inf\{\lambda\in\langle 0,+\infty] : x\in\lambda A\}\right)$$

$$= \sup\{\langle x^*, x\rangle - \lambda : \lambda\in\langle 0,+\infty],\ x\in\lambda A\}$$

$$= \sup_{\lambda>0}\left[\left(\sup_{x\in\lambda A}\langle x^*, x\rangle\right) - \lambda\right]$$

$$= \sup_{\lambda>0} \lambda\left[\underbrace{\left(\sup_{x\in A}\langle x^*, x\rangle\right)}_{S_A(x^*) \text{ potporna fja}} - 1\right] = I_{A^\circ}(x)$$

gdje je A° polara skupa A:

$$A^\circ = \{x^*\in X^* : \underbrace{\langle \underset{x^*}{x^*}, \underset{X}{x}\rangle}_{\substack{\text{ekv.}\\ S_A(x)\leq 1}} \leq 1,\ x\in A\}$$

K konus $\Rightarrow K^\circ \ldots \langle x^*, x\rangle \leq 0,\ x\in K.$

Za $g: X^* \to [-\infty, \infty]$ definiramo konjugat $g^*: X \to [-\infty, \infty]$ s

$$g^*(x) = \sup_{x^* \in X^*} \left(\langle x^*, x \rangle_{X^*\, X} - g(x^*) \right)$$

te $(f^*)^*: X \to [-\infty, \infty]$ zovemo bikonjugatom fje $f: X \to [-\infty, \infty]$. Pišemo f^{**}.

Teorem 5.12

i) Za $f: X \to [-\infty, +\infty]$ vrijedi $f \geq f^{**}$

ii) (Fenchel - Moreau) Neka je $f: X \to \langle -\infty, +\infty]$ Tada je $f = f^{**}$ ako i samo ako je f konveksna i odozdo poluneprekidna

Dokaz: i) $$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*} \underbrace{\left(\langle x^*, x \rangle - f^*(x^*) \right)}_{\leq f(x) \text{ Young-Fenchel-ova nej.}} \leq f(x)$$

(vrijedi i ako je $f(x) = -\infty$)

ii) $\boxed{\Rightarrow}$ Zbog Tm 5.10.a $(f^*)^*$ je konveksna i odozdo poluneprekidna

(Primijetimo, ako f poprima vrijednost $-\infty$ u nekoj točki onda je $f^* \equiv +\infty \Rightarrow f^{**} \equiv -\infty = f$, inače za konveksne fje imamo iste zaključke)

$\boxed{\Leftarrow}$ $f \equiv +\infty \Rightarrow f^* \equiv -\infty \Rightarrow f^{**} \equiv +\infty$. Stoga možemo uzeti da je f pravilna konveksna i odozdo poluneprekidna

17 Tm 5.5. čitamo: za neki $x_0 \in X$

$$f(x_0) = \sup\{ \langle x^*, x_0\rangle - c : x^* \in X, c \in \mathbb{R}, \langle x^*, x\rangle - c \le f(x), x \in X\}$$

afina minoranta

Za $x^* \in X^*$ definiramo

$$c(x^*) = \inf\{ c \in \mathbb{R} : c \geq \langle x^*, x\rangle - f(x), x \in X\}$$

$c \geq \sup_x (\ )$

pa vrijedi

$$f(x_0) = \sup_{x^* \in X^*} \left(\langle x^*, x_0\rangle - c(x^*)\right)$$

S druge strane

$$c(x^*) = \sup_{x \in X} \left(\langle x^*, x\rangle - f(x)\right) = f^*(x^*)$$

tj.

$$f(x_0) = \underbrace{\sup_{x^* \in X^*} \left(\langle x^*, x_0\rangle - f^*(x^*)\right)}_{f^{**}(x_0)}$$

$\boxtimes$

<u>Napomena</u> 5.13: Ako je $f : X \to \langle -\infty, +\infty]$ konveksna i odozdo poluneprekidna u $\bar{x}$ te $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, onda je $F(\bar{x}) = F^{**}(\bar{x})$

<u>Primjer</u> 5.14 Za $f(x) = \|x\|_X$ imali smo u Primjeru 5.9.c: $f^* = I_{B_{X^*}}$ pa je po prethodnom Tm

$$\|x\| = I^*_{B_{X^*}}(x) = S_{B_{X^*}}(x) = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \langle x', x\rangle \overset{HB}{=} \max_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \langle x^*, x\rangle$$

Definicija 5.15. Neka su f_0 i f_1 pravilne na normiranom X. Funkcional $f_0 \oplus f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$

$$(f_0 \oplus f_1)(x) = \inf_{y \in X} (f_0(x-y) + f_1(y))$$

nazivamo infimalna konvolucija fje f_0 i f_1

Teorem 5.16 Neka su $f_0, f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ pravilne

a) Vrijedi

$$f_0^* + f_1^* = (f_0 \oplus f_1)^*$$

$$(f_0 + f_1)^* \leq f_0^* \oplus f_1^*$$

b) Ako su još f_0 i f_1 konveksne te postoji $\bar{x} \in \operatorname{dom} f_0 \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} f_1$ takav da je f_1 neprekidna u $\bar{x}$ tada je

$$(f_0 + f_1)^* = f_0^* + f_1^*$$

Dokaz a) jednakost slijedi iz definicije

$$(f_0 \oplus f_1)^*(x^*) = \sup_{x \in X} \left(\langle x^*, x \rangle - \inf_{x_0 + x_1 = x} f_0(x_0) + f_1(x_1) \right)$$

$$= \sup_{\substack{x \in X \\ x_0 + x_1 = x}} \langle x^*, x_0 + x_1 \rangle - f_0(x_0) - f_1(x_1) = f_0^*(x^*) + f_1^*(x^*)$$

Za dokaz nejednakosti, iz Young-Fenchelove nejed:

$$f_0^*(x^* - y^*) + f_1^*(y^*) \geq \langle x^*, x \rangle - f_0(x) - f_1(x), \quad x \in X$$

$/\sup$

b) Neka je $x^* \in X^*$ i $\alpha = (f_0 + f_1)^*(x^*)$.

Ako je $\alpha = +\infty$, onda nejednakost u a) povlači tvrdnju. Uzmimo da je $\alpha < +\infty$ i dokažimo $(f_0^* \oplus f_1^*)(x^*) \le \alpha$.

Kako je $\mathrm{dom}(f_1+f_2) \neq \emptyset$ vrijedi $\alpha > -\infty$ (Tm 5.10b)

Definiramo $A = \{(x,t) \in \underset{\text{ekv. dom } f_0}{X} \times \mathbb{R} \,;\, t \le \langle x^*, x\rangle - f_0(x) - \alpha\}$

Očito je A konveksan te $A \cap \mathrm{int}\,\mathrm{epi}\, f_1 = \emptyset$.

Zaista, kad bi postojao $(x,t) \in A \cap \mathrm{int}\,\mathrm{epi}\, f_1$ onda bi vrijedilo
$$f_1(x) < t \le \langle x^*, x\rangle - f_0(x) - \alpha$$
tj.
$$\alpha < \langle x^*, x\rangle - f_0(x) - f_1(x) \le (f_1+f_2)^*(x^*) = \alpha$$

Prema Teoremu separacije (1.1.a) postoji netrivijalni par $(y^*, \beta) \in X^* \times \mathbb{R}$ koji ih separira:
$$\sup\{\beta t + \langle y^*, x\rangle : (x,t) \in \mathrm{epi}\, f_1\} \le \inf\{\beta t + \langle y^*, x\rangle : (x,t) \in A\}$$

Očito je $\beta \le 0$. $\beta = 0$ vodi također na kontradikciju. (y^* bi tada separirao $\mathrm{dom}\, f_0$ i $\mathrm{dom}\, f_1$).

Dakle, $\beta < 0$. Podijelimo nejednakost s $|\beta|$ i $x_1^* := \dfrac{y^*}{|\beta|}$
$$\begin{aligned}
f_1^*(x_1^*) &= \sup\{\langle x_1^*, x\rangle - f_1(x) : x \in X\} \\
&= \sup\{\langle x_1^*, x\rangle - t : (x,t) \in \mathrm{epi}\, f_1\} \\
&\le \inf\{\langle x_1^*, x\rangle - t : (x,t) \in A\} \\
&= \inf\{\langle x_1^* - x^*, x\rangle + f_0(x) : x \in \mathrm{dom}\, f_0\} + \alpha \\
&= -f_0^*(x^* - x_1^*) + \alpha
\end{aligned}$$

tj. $\underset{(f_0^* \oplus f_1^*)(x^*) \le}{f_1^*(x_1^*) + f_0^*(x^* - x_1^*)} \le \alpha$ ∎

Primjer 5.17 $\quad f_0(x) = \|x\|$, $\quad f_1(x) = I_A(x)$ indikat. $A \subseteq X$

$$(f_0 \oplus f_1)(x) = \inf_{y \in X} \left(\|x-y\| + I_A(y) \right) = \inf_{y \in A} \|x-y\|$$

$$= d_A(x) : \quad \text{udaljenost točke od skupa - Lipschitz neprek.}$$

Ako je A neprazan i konveksan, onda je d_A konveksna i pravilna.

$$\Rightarrow d_A(x) = (f_0 \oplus f_1)^{**}(x) = (f_0^* + f_1^*)^*(x)$$

$$= \sup_{x^* \in X^*} \left(\langle x^*, x \rangle - \left(I_{B_{X^*}}(x^*) + \sup_{y \in A} \langle x^*, y \rangle \right) \right)$$

$$= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \underbrace{\left(\langle x^*, x \rangle - \underbrace{\sup_{y \in A} \langle x^*, y \rangle}_{\text{odozdo poluneprek., konveksna (Dokaz Tm 5.10a)}} \right)}_{\text{odozgo poluneprek.}}$$

Alaoglu

Kompakt u slaboj $*$ topologiji na X^*

$\Rightarrow$ (Weierstrass) sup se postiže

$$= \max_{\|x^*\| \leq 1} \left(\langle x^*, x \rangle - \sup_{y \in A} \langle x^*, y \rangle \right), \quad x \in X$$

5.2.2. Subdiferencijal

Definicija 5.18: Neka je $F : X \to \langle -\infty, +\infty]$. Subdiferencijal funkcionala F u točki $x \in X$ je skup

$$\partial F(x) = \{ x^* \in X^* : F(y) - F(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle,\ y \in X \}.$$

Ako je $\partial F(x)$ neprazan kažemo da je F subdiferencijabilna u x. Svaki funkcional iz $\partial F(x)$ zovemo subgradijent za F u x.

Primjer 5.19: Neka je $F : X \to \mathbb{R}$ Gateaux-diferencijabilna u $x \in X$: postoji $w^* \in X^*$ t.d.

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{F(x+tv) - F(x)}{t} = \langle w^*, v \rangle, \quad v \in X$$

Neka je F dodatno konveksna. Tada je

$$\frac{F(x + t(y-x)) - F(x)}{t} \leq F(y) - F(x) \quad \Big/ \lim_{t \searrow 0}$$

$$\langle w^*, y - x \rangle \leq F(y) - F(x)$$

$\Rightarrow$ $w^* \in \partial F(x)$. Pokažimo da je to jedini subgradijent za F u x. Ako je $z^* \in \partial F(x)$:

$$\frac{F(x+ty) - F(x)}{t} \geq \langle z^*, y \rangle \quad \Big/ \lim_{t \searrow 0}$$

$$\langle w^* - z^*, y \rangle \geq 0, \quad y \in X$$

$\Leftrightarrow$ $z^* = w^*$. Dakle, $\partial F(x) = \{ w^* \}$

Primjer 5.20 $\quad F(x) = \|x\|, \; x \in X$

Dualno preslikavanje $S : X \rightrightarrows X^*$ (multifunkcija - skupovna fja)

$$S(x) = \{x^* \in X^* : \|x^*\|_{X^*} \le 1, \langle x^*, x\rangle = \|x\|\}$$

Prema Hahn-Banachovom teoremu $S(x)$ je neprazan za svaki $x \in X$ te vrijedi

$$S(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1, \langle x^*, x\rangle = \|x\|\}, & x \neq 0 \\ \overline{B}_{X^*}, & x = 0 \quad \text{(jedinična kugla)} \end{cases}$$

(često se zove normalizirano dualno preslikavanje)

Tvrdimo: $\partial F(x) = S(x)$

$\boxed{\supseteq}$ $\quad x^* \in S(x) \Rightarrow \|y\| - \|x\| \underset{\|x^*\| \le 1}{\ge} \langle x^*, y\rangle - \|x\|$

$= \langle x^*, y - x\rangle, \quad y \in X$

$\boxed{\subseteq}$ Neka je $\quad \|y\| - \|x\| \ge \langle x^*, y - x\rangle, \quad y \in X$

1. $x = 0 \qquad \langle x^*, y\rangle \le \|y\| \quad$ tj. $\|x^*\| \le 1$
2. $x \neq 0 \quad$ Za $w \in X$ uzmimo $y = x + w$

$\langle x^*, w\rangle \le \|x + w\| - \|x\| \le \|x\| + \|w\| - \|x\| = \|w\|$

$\Rightarrow \|x^*\| \le 1$.

Za $y = 0$: $\quad \langle x^*, x\rangle \ge \|x\|$ no kako je $\|x^*\| \le 1$ vrijedi i obratna nejednakost.

Za $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|_X^2$ vrijedi $\partial F(x) = \|x\|_X S(x)$

$= \{x^* \in X^* : \|x^*\|_{X^*} = \|x\|_X, \; \langle x^*, x\rangle = \|x\|_X^2\}$

$\|x\| S(x)$ - dualno preslikavanje)

Primjer 5.21 Neka je $K \subseteq X$ zatvoren i konveksan

Računamo $\partial I_K(x)$ (indikatorska fja)

Ako $x \notin K$: $\partial I_K(x) = \emptyset$ (U definiciji je $f(x) = +\infty$, pa je dovoljno uzeti bilo koji $y \in \operatorname{dom} f = K$ $(f = I_K)$)

Ako je $x \in K$: $x^* \in \partial I_K(x) \iff$

$$I_K(y) \geq I_K(x) + \langle x^*, y - x \rangle \quad , y \in X$$

Za $y \notin K$ nejednakost je zadovoljena, a za $y \in K$

$$0 \geq \langle x^*, y - x \rangle$$

Dakle

$$\partial I_K(x) = \{ x^* \in X^* : \langle x^*, y - x \rangle \leq 0, y \in K \}$$

$$= C(x)^+$$ - normalni konus na K u x

Teorem 5.22 Neka je $F : X \to \langle -\infty, \infty]$ . . .

a) Vrijedi

$$x^* \in \partial F(\bar{x}) \iff F(\bar{x}) + F^*(x^*) \overset{\text{Young-Fenchel}}{=} \langle x^*, \bar{x} \rangle$$

b) Ako je X refleksivan onda $x^* \in \partial F(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \in \partial F^*(x^*)$

Ako je dodatno F konveksna i odozdo poluneprek.

onda $x^* \in \partial F(\bar{x}) \iff \bar{x} \in \partial F^*(x^*)$

Dokaz a) Po definiciji $x^* \in \partial F(\bar{x})$:

(1) $$\langle x^*, x \rangle - F(x) \leq \langle x^*, \bar{x} \rangle - F(\bar{x}) \quad , x \in X$$

Stoga je $\quad F^*(x^*) = \langle x^*, \bar{x} \rangle - F(\bar{x})$,

po definiciji $F^*(x^*)$.

Obratno, ako je $\quad F^*(x^*) + F(\bar{x}) = \langle x^*, \bar{x} \rangle$,

onda vrijedi (1).

b) Prema Teoremu 5.12 : $F^{**} \leq F$ pa zbog a)

$$F^{**}(\bar{x}) \leq F(\bar{x}) = \langle x^*, \bar{x} \rangle - F^*(x^*)$$

S druge strane, prema def $F^{**}(\bar{x})$ vrijedi

$$F^{**}(\bar{x}) \geq \langle x^*, \bar{x} \rangle - F^*(x^*)$$

pa imamo jednakost

$$F^*(x^*) + F^{**}(\bar{x}) = \langle x^*, \bar{x} \rangle$$

Primjenjujući a) za F^* umjesto F, ako je X refleksivan (možemo F^{**} shvatiti kao konjugiranu fl od $F^*: X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ tj.

$$F^{**}: X^{**} \to \overline{\mathbb{R}}$$

i elemente iz X^{**} shvatiti kao $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle$)

čitamo $\bar{x} \in \partial F^*(x^*)$.

Ako je F odozdo konveksna i odozdo poluneprek., onda je $F^{**} = F$. Stoga, za $\bar{x} \in \partial F^*(x^*)$ slijedi

$$F^*(x^*) + F(\bar{x}) = \langle x^*, \bar{x} \rangle$$

pa iz a) slijedi $x^* \in \partial F(\bar{x})$ $\quad \blacksquare$

<u>Propozicija 5.23</u> Za $F : X \to \langle -\infty, \infty]$ skup $\partial F(x)$ je zatvoren i konveksan, za svaki $x \in X$.

<u>Dokaz:</u> Za $x \notin \operatorname{dom} F$ vrijedi $\partial F(x) = \emptyset$.

Uzmimo $x \in \operatorname{dom} f$ tj. $F(x) < +\infty$. Young-Fenchelova nejednakost:

$$F^*(x^*) \geq \langle x^*, x \rangle - f(x)$$

pa po prethodnom teoremu za $x^* \in \partial f(\bar{x}) \Leftrightarrow$ vrijedi obratna nejednakost.

$$\partial F(x) = \{x^* \in X^* ; \underbrace{F^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle}_{x^* \mapsto \text{ je konveksna i odozdo poluneprekidna. (Tm 5.10 a.)}} \leq -f(x)\}$$

Tvrdnja slijedi iz Leme 5.2 i 5.3.

(gornji nivo skup je konveksan i zatvoren)

<u>Teorem 5.24</u> Ako je f konveksna i neprekidna u $\bar{x}$ onda je $\partial f(\bar{x})$ neprazan.

<u>Dokaz.</u> Definiramo $g : X \to \langle -\infty, \infty]$,

$$g(x) = f(x + \bar{x}) - f(\bar{x}) \quad \dots g \text{ konveksna}$$

f neprekidna u $\bar{x} \Leftrightarrow g$ neprekidna u 0. Definiramo $V := \{0\}$ i $\ell(0) = 0$. Prema Hahn-Banachovom teoremu postoji $x^* \in X^*$, proširenje od ℓ t.d. je

$$\langle x^*, x \rangle \leq g(x) \quad , x \in X$$

Neka je $x = x_1 - \bar{x}$, $x_1 \in X$ proizvoljan. Slijedi

$$\langle x^*, x_1 - \bar{x} \rangle \leq f(x_1) - f(\bar{x}) \quad , x_1 \in X.$$

tj. $x^* \in \partial f(\bar{x})$

Teorem 5.25 Neka je f pravilna konveksna na X. Tada je multifunkcija $\partial f : X \rightrightarrows X^*$ monotona:

$$(\forall \varphi_x \in \partial f(x))(\forall \varphi_y \in \partial f(y)) \quad \langle \varphi_x - \varphi_y, x - y \rangle \geq 0$$

Dokaz: Iz definicije subgradijenta

$$\langle \varphi_x, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \quad /(-1)$$

$$\langle \varphi_y, x - y \rangle \leq f(x) - f(y) \quad /(-1) \quad +$$

■

Propozicija 5.26 Neka je S kompaktan Hausdorffov te za svaki $s \in S$ neka je $f_s : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konveksna i neprekidna u $\bar{x} \in X$. Pretpostavimo da postoji okolina U točke $\bar{x}$ t.d. je f-ja $s \mapsto f_s(z)$ odozgo poluneprekidna na S. Tada za

$$f(x) := \max_{s \in S} f_s(x), \quad x \in X$$

vrijedi

$$f'(\bar{x}; y) = \sup_{s \in S} f_s'(\bar{x}; y)$$

$$\partial f(\bar{x}) = \mathrm{cl}^* \mathrm{conv} \Big(\bigcup_{s \in S(\bar{x})} \partial f_s(\bar{x}) \Big)$$

gdje je cl^* zatvarač u slaboj $*$ topologiji na X^* i

$$S(\bar{x}) = \{ s \in S : f_s(\bar{x}) = f(\bar{x}) \}$$

skup aktivnih indeksa.

5.2.3 Subdiferencijal i derivacije

Prisjetimo se derivacije duž vektora ($f: D \to Y$, $D \subseteq X$ otv. X, Y N.P.)

$$f'(\bar{x}; y) = \lim_{\tau \downarrow 0} \underbrace{\frac{f(\bar{x}+\tau y) - f(\bar{x})}{\tau}}_{\frac{1}{\tau}\Delta f(\bar{x}, \tau y)}$$

, odnosno $\Delta f(\bar{x}, y) = f(\bar{x}+y) - f(\bar{x})$

Hadamardova derivacija duž vektora

$$f_H'(\bar{x}, y) = \lim_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ z \to y}} \frac{f(\bar{x}+\tau z) - f(\bar{x})}{\tau}$$

U obe slučaja, uvode se i strože derivacije uzimajući limes također i po $x \to \bar{x}$.

Lema 5.27 a) Ako postoji $f_H'(\bar{x}, y)$, onda postoji i $f'(\bar{x}, y)$ i jednaki su

b) Ako je f lokalno Lipschitzova oko $\bar{x}$ tada $f_H'(\bar{x}, y)$ postoji ako i samo ako $f'(\bar{x}, y)$ postoji.

Dokaz: v. Schirotzek

Schirotzek: Nonsmooth analysis, Springer 2007.

Lema 5.28. Ako postoji Hadamardova derivacija $f_H'(\bar{x}, \cdot)$ na nekoj okolini točke $y_0 \in E$, onda je ona neprekidna u y_0

Teorem 5.29: Neka je $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ prava i konveksna.

a) Ako je $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ i $y \in X$ onda je fja

$$\tau \longmapsto \frac{f(\bar{x}+\tau y) - f(\bar{x})}{\tau}$$

neopadajuća na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posebno, postoji $f'(\bar{x}, y) \in \overline{\mathbb{R}}$

i vrijedi

$$(*) \quad f(\bar{x}) - f(\bar{x}-y) \leq f'(\bar{x},y) = \inf_{\tau>0} \frac{f(\bar{x}+\tau y) - f(\bar{x})}{\tau} \leq f(\bar{x}+y) - f(\bar{x})$$

b) Ako je $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ onda je $f'(\bar{x},\cdot)$ subliearen funkcional sa X u $\overline{\mathbb{R}}$

c) Ako je $\bar{x} \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$ i $y \in E$ onda je $f'(\bar{x},y) \in \mathbb{R}$

d) Ako je $\bar{x} \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$ i f neprekidna u $\bar{x}$ onda $f'_H(\bar{x},\cdot)$ postoji, neprekidna je na X i jednaka $f'(x,\cdot)$.

Dokaz: Restrikcija f je f na pravac određen točkama x i $x+y$ je funkcija realne varijable, pa možemo iskoristiti Teorem 2.2.4 (Sch.)

$$g(t) = f(\bar{x}+ty) \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \in \operatorname{dom} f \iff 0 \in \operatorname{dom} g \qquad (t_0 = 0 \text{ u Tm } 2.11)$$

$$g'_+(0) = f'(\bar{x},y)$$

Dakle, imamo a). Za c) uočimo $\bar{x} \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f \Rightarrow 0 \in \operatorname{int} \operatorname{dom} g$.

b) $y, z \in X$:

$$f(\bar{x} + \tau(y+z)) = f\left(\tfrac{1}{2}(\bar{x}+2\tau y) + \tfrac{1}{2}(\bar{x}+2\tau z)\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} f(\bar{x}+2\tau y) + \frac{1}{2} f(\bar{x}+2\tau z) \qquad / - f(\bar{x}) \quad / \lim_{\tau \downarrow 0}$$

$$f'(\bar{x},y+z) \leq f'(\bar{x},y) + f'(\bar{x},z).$$ Poz. hom. vrijedi općenito.

d) Neprekidnost u $\bar{x} \Rightarrow$ postoji otvorena okolina U nule u E t.d.

$$f(\bar{x}+y) - f(\bar{x}) \leq 1 \quad , \; y \in U$$

Prema $(*)$ slijedi $f'(\bar{x},\cdot)$ je omeđena odozgo na U

c) $\Rightarrow$ $f'(\bar{x},\cdot)$ je konveksna $\Rightarrow$ $f'(\bar{x},\cdot)$ je neprekidna na $\operatorname{int} \operatorname{dom} f'(\bar{x},\cdot) = X$, jer $\bar{x} \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$ (prema c).

Štoviše, kako je f lokalno Lipschitzova na $\operatorname{int} \operatorname{dom} f$, prema Lemi 2.2.1 b) postoji $f'_H(\bar{x}, y)$ $(= f'(\bar{x}, y))$.

<u>Propozicija 5.30</u> Neka je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ pravilna konveksna.

a) Ako je $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ onda

$$\partial f(\bar{x}) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, y \rangle \leq f'(\bar{x}, y),\ y \in X\}$$

b) Ako je $\bar{x} \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$ i f je neprekidna u $\bar{x}$ onda je $\partial f(\bar{x})$ neprazan i slabo * kompaktan i

$$f'_H(\bar{x}, y) = f'(\bar{x}, y) = \max\{\langle x^*, y \rangle : x^* \in \partial f(\bar{x})\},\ y \in X$$

<u>Napomena</u>: 1. Prop. 5.23 $\bar{x} \in \operatorname{dom} f \Rightarrow \partial f(x_0)$ konv. i slabo * zatvoren (eventualno $\emptyset$) - lako slijedi iz a)

2. $X = \mathbb{R}$ $\quad \partial f(\bar{x}) = [f'_-(\bar{x}), f'_+(\bar{x})]$

$$f'_-(\bar{x}) = -f'(\bar{x}, -1) = -\max\{-x^* : x^* \in \partial f(\bar{x})\} = \min\{x^* : x^* \in \partial f(\bar{x})\}$$

$$f'_+(\bar{x}) = f'(\bar{x}, 1) = \max\{x^* : x^* \in \partial f(\bar{x})\}$$

3. U b) dovoljno je uzeti max po ekstremnim točkama skupa $\partial f(\bar{x})$

<u>Propozicija 5.31</u> Neka je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ pravilna i konveksna te $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$

a) Ako je f G-diferencijabilna u $\bar{x}$ onda $\partial f(\bar{x}) = \{D_G f(\bar{x})\}$

b) Ako je f neprekidna u $\bar{x}$ i $\partial f(\bar{x}) = \{x^*\}$ jednočlan onda je f G-diferencijabilna i $D_G f(\bar{x}) = x^*$. Štoviše, postoji $f'_H(\bar{x}, y)$, $y \in X$.

5.2.4. Fenchelova teorija dualnosti

Primarna zadaća

(P) $$\inf_{x\in X} F(x)$$

gdje je $F: X \to (-\infty, +\infty]$ pravilna, konveksna, odozdo poluneprekidna na Banachovom prostoru.

Teorem 5.32: Neka je X refleksivan i $F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ odozdo poluneprekidna, pravilna, konveksna te koercitivna:

$$\lim_{|x|\to+\infty} F(x) = +\infty$$

Tada postoji $\bar{x} \in X$, minimizator za F na X.

Dokaz: Neka je (x_n) minimizirajući niz:

$$F(x_n) \to \inf_X F$$

Zbog koercitivnosti, (x_n) je omeđen.

X refleksivan $\Rightarrow$ x_n slabo konvergira: $x_n \to x$

Lema 5.3 $\Rightarrow$ $F(x) \leq \liminf F(x_n) = \inf F$ $\boxtimes$

Zadaću (P) uložimo u familiju zadaća

(P_y) $$\inf_{x\in X} \Phi(x,y)$$

kjer je $y \in Y$, Banachov prostor, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ pravilna, odspodaj polzvezna in konveksna, ter

$$\Phi(x, 0) = F(x)$$

(tj. (P_0) je enako (P))

Npr. za nalogo

$$\min_{x \in X} f(x) + \varphi(\Lambda x)$$

$$\Phi(x, y) = f(x) + \varphi(\Lambda x + y)$$

<u>Definicija 5.33</u>: Dualna naloga naloge (P) je

$$(P^*) \qquad \sup_{y^* \in Y^*} \left(-\phi^*(0, y^*) \right)$$

Označimo s $h(y) = \inf_{x \in X} \Phi(x, y)$ funkcijo vrednosti (value function).

V nadaljevanju predpostavljamo $h(y) > -\infty$, $y \in Y$.

<u>Teorem 5.34</u> (šibka dualnost) $\sup(P^*) \leq \inf(P)$

Dokaz: Za $x \in X$, $y \in Y$ ter $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$

$$\langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle - \Phi(x, y) \leq \Phi^*(x^*, y^*)$$

Vstavimo $x^* = 0$, $y = 0$:

$$0 = \langle 0, x \rangle + \langle y^*, 0 \rangle \leq F(x) + \Phi^*(0, y^*)$$

$$\Rightarrow \sup_{y^* \in Y^*} (-\phi^*(0,y^*)) = \sup(P^*) \leq \inf(P)$$

Lema 5.35. h je konveksna

Dokaz: Pretp. suprotno: postoje $y_1, y_2 \in Y$, $\theta \in \langle 0,1\rangle$

$$\underbrace{\theta h(y_1) + (1-\theta) h(y_2)}_{< c - \varepsilon < c} < h(\theta y_1 + (1-\theta) y_2)$$

$\Rightarrow$ postoje $c \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$

Definiramo $a_1 = h(y_1) + \frac{\theta}{\varepsilon}$ i

$$a_2 = \frac{c - \theta a_1}{1-\theta} = \frac{c - \varepsilon - \theta h(y_1)}{1-\theta} > h(y_2)$$

Prema definiciji od h, postoje $x_1, x_2 \in X$ t.da

$$h(y_1) \leq \phi(x_1, y_1) \leq a_1 \ , \quad h(y_2) \leq \phi(x_2, y_2) \leq a_2$$

Stoga

$$h(\theta y_1 + (1-\theta) y_2) \leq \phi(\theta x_1 + (1-\theta) x_2, \theta y_1 + (1-\theta) y_2)$$

$$\leq \theta \phi(x_1, y_1) + (1-\theta) \phi(x_2, y_2) \leq \theta a_1 + (1-\theta) a_2 = c \quad \lightning \quad \blacksquare$$

Lema 5.36: Za svaki $y^* \in Y^*$ vrijedi $h^*(y^*) = \phi^*(0, y^*)$

Dokaz: $h^*(y^*) = \sup_{y \in Y} (\langle y^*, y\rangle - h(y)) =$

$$= \sup_{y \in Y} (\langle y^*, y\rangle - \inf \phi(x,y)) = \sup_{\substack{y \in Y \\ x \in X}} (\langle y^*, y\rangle - \phi(x,y))$$

$$= \sup_{\substack{y \in Y \\ x \in X}} (\langle 0, x\rangle + \langle y^*, y\rangle - \phi(x,y)) = \phi^*(0, y^*)$$

$\blacksquare$

Teorem 5.37: Ako je h odozdo poluneprekidna u 0

$$\inf(P) = \sup(P^*)$$

Dokaz: Kako je F pravilna, to je $h(0) = \inf_{x\in X} F(x) < +\infty$

Prema Napomeni 5.13 vrijedi $h(0) = h^{**}(0)$

(Ne možemo iskoristiti Teorem 5.12 jer h ne mora biti $>-\infty$). Prema preth. Lemi

$$\sup(P^*) = \sup_{y^*\in Y^*}(-\phi^*(0,y^*)) = \sup_{y^*}(\langle y^*,0\rangle - h^*(y^*))$$
$$= h^{**}(0) = h(0) = \inf(P)$$

Teorem 5.38: Ako je h subdiferencijabilna u 0 onda $\inf(P) = \sup(P^*)$ i $\partial h(0)$ je skup svih rješenja zadaće (P^*).

Dokaz: Prema Lemi 5.36, $\bar{y}^*$ je rješenje zadaće (P^*) ako i samo ako

$$-h^*(\bar{y}^*) = -\phi^*(0,\bar{y}^*) = \sup_{y^*\in Y^*}(-\phi^*(0,y^*))$$
$$= \sup_{y^*}(\langle y^*,0\rangle - h^*(y^*)) = h^{**}(0)$$

Prema Teoremu 5.22

(2) $$h^{**}(0) + h^{***}(\bar{y}^*) = \langle \bar{y}^*, 0\rangle = 0$$

ako i samo ako $\bar{y}^* \in \partial h^{**}(0)$.

Za $F: X \to \langle -\infty, \infty]$ vrijedi $F^{***} = F^*$

Sada (2) zapišimo kao:

$$h^{**}(0) + h^*(\bar{y}^*) = \langle \bar{y}^*, 0 \rangle = 0$$

pa prema Teorem 5.22a, $\bar{y}^* \in \partial h^{**}(0)$

$\Leftrightarrow \quad -h^*(\bar{y}^*) = h^{**}(0)$

Dakle, $\bar{y}^*$ rješenje $(P^*) \Leftrightarrow \bar{y}^* \in \partial h^{**}(0)$

Vrijedi (Tm 4.17. Ito-Kunisch): $F: X \to (-\infty, \infty]$, $\partial F(\bar{x})$ neprazan $\Rightarrow F^{**}(\bar{x}) = F(\bar{x})$.

Zaista, kako je $\partial F(x)$ neprazan, postoji l afini f-l na X t.d. je $l \leq F$ uz $l(\bar{x}) = F(\bar{x})$. Slično kao u dokazu Fenchel-Moreauovog tma, iz Tm 5.5

$$F(\bar{x}) = \sup \{ \langle x^*, \bar{x} \rangle - c : x^* \in X, c \in \mathbb{R}, \langle x^*, x \rangle - c \leq F(x), x \in X \}$$

$$F(\bar{x}) = \sup_{x^* \in X^*} (\langle x^*, \bar{x} \rangle - c(x^*))$$

gdje je $c(x^*) = \inf \{ c \in \mathbb{R} : c \geq \langle x^*, x \rangle - F(x), x \in X \}$

$$= \sup_{x \in X} (\langle x^*, x \rangle - F(x)) = F^*(x^*)$$

pa je $F(\bar{x}) = F^{**}(\bar{x})$ te $\partial F(\bar{x}) = \partial F^{**}(\bar{x})$

Dakle, (P^*) poprima max u $\bar{y}^* \in \partial h^{**}(0) = \partial h(0) \neq \emptyset$

Neka je $y^* \in \partial h(0)$:

$$\langle y^*, x \rangle + h(0) \leq h(x)$$

Za niz (x_n) u X, $x_n \to 0$ slijedi

$$\liminf_n h(x_n) \geq \lim_n \langle y^*, x_n \rangle + h(0) = h(0)$$

pa je h odozdo poluneprekidna u 0. Tvrdnja sada slijedi iz Tm 5.37.

<u>Korolar 5.39.</u> Ako postoji $\bar{x} \in X$ t.d. je $\phi(\bar{x}, \cdot)$ konačna i neprekidna u 0, onda je h neprekidna na nekoj otvorenoj okolini U nule te $h = h^{**}$. Štoviše

$$\inf(P) = \sup(P^*)$$

i $\partial h(0)$ je skup svih rješenja zadaće (P^*).

Dokaz: Kako je $\phi(\bar{x}, \cdot)$ konveksno, to je omeđena odozgo na otvorenoj okolini U nule. Po definiciji $h(y) \leq \phi(\bar{x}, y)$ za svaki y, to je i h omeđeno odozgo na U, pa je i neprekidna (Tm 5.6) te je $\partial h(0)$ neprazan (Tm 5.24) i $h = h^{**}$ (na U kao u preth. dokazu)
Tm 5.38. daje jednakost $\inf(P) = \sup(P^*)$. $\boxtimes$

<u>Primjer 5.40</u> Neka je

$$\phi(x, y) = f(x) + \varphi(\Lambda x + y)$$

gdje su $f: X \to \langle -\infty, +\infty]$, $\varphi: Y \to \langle -\infty, +\infty]$ odozdo poluneprekidne i konveksne i $\Lambda: X \to Y$ neprekidan lin. operator.

$$\Phi^*(x^*, y^*) = \sup_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} \left(\langle x^*, x\rangle + \langle y^*, y\rangle - \phi(x,y) \right)$$

$$= \sup_{x\in X} \left(\langle x^*, x\rangle - f(x) \right) + \sup_{y\in Y} \left[\langle y^*, y\rangle - \varphi(\Lambda x + y) \right] \Big)$$

Za fiksni $x \in X$

$$\sup_{y\in Y} \left(\langle y^*, y\rangle - \varphi(\Lambda x + y) \right) = \sup_{y\in Y} \Big(\langle y^*, \Lambda x + y\rangle - \varphi(\Lambda x + y) - \langle y^*, \Lambda x\rangle \Big)$$

$$= \varphi^*(y^*) - \langle y^*, \Lambda x\rangle$$

Konačno, $\Phi^*(x^*, y^*) = \sup_{x\in X} \Big(\underbrace{\langle x^*, x\rangle - \langle y^*, \Lambda x\rangle}_{\langle x^* - \Lambda^* y^*, x\rangle} - f(x) + \varphi^*(y^*) \Big)$

$$= f^*(x^* - \Lambda^* y^*) + \varphi^*(y^*)$$

<u>Teorem 5.41</u> Za $\bar{x} \in X$ i $\bar{y}^* \in Y^*$, sljedeće je ekvivalentno:

a) $\bar{x}$ je rješenje za (P), $\bar{y}^*$ je rješenje za (P^*) i
$$\min(P) = \max(P^*)$$

b) $\Phi(\bar{x}, 0) + \Phi^*(0, \bar{y}^*) = 0$

c) $(0, \bar{y}^*) \in \partial\Phi(\bar{x}, 0)$

<u>Dokaz</u> a) $\Rightarrow$ b) očito

b) $\Rightarrow$ a) slijedi iz slabe dualnosti:

$$\Phi(\bar{x}, 0) = F(\bar{x}) \geq \inf(P) \geq \sup(P^*) \geq -\Phi^*(0, \bar{y}^*)$$

Kako je L.S = D.S (krajnji) onda između vrijedi = umjesto $\geq$

b) $\Leftrightarrow$ c) slijedi iz Tm 5.22.a jer je $\langle (0, \bar{y}^*), (\bar{x}, 0)\rangle = 0$

$\blacksquare$

Nastavimo sad s Primjerom 5.40.

Rješenje $\bar{y}^*$ zadaće (P^*) nazivamo Lagrangeovim multiplikatorima. Jedn. (b) iz prethodnog teorema glasi

$$0 = \phi(\bar{x}, 0) + \phi^*(0, \bar{y}^*) = f(\bar{x}) + f^*(-\Lambda^*\bar{y}^*) + \varphi(\Lambda\bar{x}) + \varphi(\bar{y}^*)$$

$$= \left[f(\bar{x}) + f^*(-\Lambda^*\bar{y}^*) - \langle -\Lambda^*\bar{y}^*, \bar{x}\rangle\right] + \left[\varphi(\Lambda\bar{x}) + \varphi^*(\bar{y}^*) - \langle y^*, \Lambda\bar{x}\rangle\right]$$

Obje uglate zagrade su ≥ 0 pa obje moraju biti 0:

$\uparrow$ Young-Fenchelova nejednakost

$$f(\bar{x}) + f^*(-\Lambda^*\bar{y}^*) - \langle -\Lambda^*\bar{y}^*, \bar{x}\rangle = 0$$

$$\varphi(\Lambda\bar{x}) + \varphi^*(\bar{y}^*) - \langle y^*, \Lambda\bar{x}\rangle = 0$$

Stoga, iz 5.22.a ovo možemo ekv. zapisati

$$-\Lambda^* y^* \in \partial f(\bar{x})$$

$$\bar{y}^* \in \partial\varphi(\Lambda\bar{x}) \underset{\text{Tm 5.22 b)}}{\iff} \Lambda\bar{x} \in \partial\varphi^*(\bar{y}^*)$$

Ako je X refleksivan

$\blacksquare$

Lagrangeov funkcional je def. s

$$-L(x, y^*) = \sup_{y \in Y}\left[\langle y^*, y\rangle - \phi(x, y)\right]$$

te vrijedi

$$\phi^*(x^*, y^*) = \sup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}}\left(\langle x^*, x\rangle + \langle y^*, y\rangle - \phi(x, y)\right)$$

$$= \sup_{x \in X}\Big(\langle x^*, x\rangle + \underbrace{\sup_{y \in Y}\left(\langle y^*, y\rangle - \phi(x, y)\right)}_{-L(x, y^*)}\Big)$$

Posebno, $\quad -\Phi^*(0,y^*) = \inf_{x\in X} L(x,y^*)$

Dualni problem stoga možemo zapisati ekv. ,

$$\sup_{y^*\in Y^*}\inf_{x\in X} L(x,y^*).$$

Ako je Φ konveksna i odozdo poluneprekidna, koja je konačna u (x,y) tada fiksiranjem tog x dobivamo

$$\Phi_x : y \longmapsto \Phi(x,y)$$

za koji je $\quad \Phi_x^{**}(y) = \Phi_x(y) = \Phi(x,y) \quad \forall y.$

$$\Phi(x,y) = \Phi_x^{**}(y) = \sup_{y^*\in Y^*}\left(\langle y^*,y\rangle - \Phi_x^*(y^*)\right)$$

$$\Phi_x^*(y^*) = \sup_{y\in Y}\left(\langle y^*,y\rangle - \underbrace{\Phi_x(y)}_{\Phi(x,y)}\right) = -L(x,y^*)$$

Dakle

$$\Phi(x,y) = \sup_{y^*\in Y^*}\left(\langle y^*,y\rangle + L(x,y^*)\right)$$

Posebno, $\quad \Phi(x,0) = \sup_{y^*\in Y} L(x,y^*)$, odnosno (P) se svodi

na

$$\inf_{x\in X}\sup_{y^*\in Y} L(x,y^*)$$

Slaba dualnost tvrdi

$$\sup_{y^*\in Y^*}\inf_{x\in X} L(x,y^*) \le \inf_{x\in X}\sup_{y^*\in Y^*} L(x,y^*)$$

Teorem 5.42 (o sedlastoj točki) Neka je ϕ konveksna i odozdo poluneprekidna te konačna u $(\bar{x},\bar{y}^*) \in X \times Y^*$. Tada je ekvivalentno:

a) $(\bar{x},\bar{y}^*) \in X \times Y^*$ je sedlasta točka za L tj:
$$L(\bar{x},y^*) \leq L(\bar{x},\bar{y}^*) \leq L(x,\bar{y}^*), \quad x \in X, y^* \in Y^*$$

b) $\bar{x}$ rješenje (P), $\bar{y}^*$ rješenje (P^*) i $\min (P) = \max (P^*)$.

Dokaz: Neka vrijedi a). Tada je
$$L(\bar{x},\bar{y}^*) = \inf_{x \in X} L(x,\bar{y}^*) = -\phi^*(0,\bar{y}^*)$$
$$L(\bar{x},\bar{y}^*) = \sup_{y^* \in Y^*} L(\bar{x},y^*) = \phi(\bar{x},0)$$
$$\phi(\bar{x},0) + \phi^*(0,\bar{y}^*) = 0$$
pa b) slijedi iz Teorema 5.41.

Obratno, ako vrijedi b) onda je
$$-\phi^*(0,\bar{y}^*) = \inf_{x \in X} L(x,\bar{y}^*) \leq L(\bar{x},\bar{y}^*)$$
$$\phi(\bar{x},0) = \sup_{y^* \in Y^*} L(\bar{x},y^*) \geq L(\bar{x},\bar{y}^*)$$
No iz Teorema 5.41 znamo $\phi^*(0,\bar{y}^*) + \phi(\bar{x},0) = 0$ što je prema gornjem moguće ako i samo ako
$$\phi^*(0,\bar{y}^*) = -L(\bar{x},\bar{y}^*) \text{ i } \phi(\bar{x},0) = L(\bar{x},\bar{y}^*)$$
tj. ako umjesto $\leq$ i $\geq$ vrijedi $=$

$\blacksquare$

5.3. Poopćena aproksimacija Yosida-Moreau

Teorem 5.25. je dao monotonost subdiferencijala $\partial f : X \to X^*$: $(\forall x, y \in \operatorname{dom} \partial f)$
$(\forall \varphi_x \in \partial f(x))(\forall \varphi_y \in \partial f(y))\ \langle \varphi_x - \varphi_y, x - y \rangle \geq 0$

Za monotono preslikavanje $A : X \rightrightarrows X^*$ kažemo da je maksimalno monotono ako se svako njegovo monotono proširenje podudara s A.

<u>Teorem 5.43</u> (Rockafellar): Ako je f prava, odozdo poluneprekidna konveksna na Banachovom prostoru X, onda je ∂f maksimalno monotono preslikavanje.

Teorem je posljedica sljedećeg (za Hilbertov pr.)

<u>Teorem 5.44</u> (Browder-Minty) Neka je H Hilbertov. Tada je $A : H \to H$ maksimalno monoton ako i samo ako je $R(\lambda I + A) = H$ za neki $\lambda > 0$ (ili ekv. za svaki $\lambda > 0$)

Pokazuje se da je rezolventa $J_\mu = (I + \mu A)^{-1}$ kontrakcija na H, za svaki $\mu > 0$ te za svaki x
$|J_\mu x - x| \to 0$ kad $\mu \to 0+$

U daljnjem, neka je H Hilbertov prostor (identificirano je s dualom) te $A : H \rightrightarrows H$ maksimalni monotoni operator.

Yosidina aproksimacija $A_\mu : H \to H$ (jednozn. presl.)

$$A_\mu x = \frac{1}{\mu}(x - J_\mu x)$$

A_μ je Lipschitzova s konstantom $\frac{1}{\mu}$ te

$$A_\mu x \in A J_\mu x, \quad x \in H.$$

U daljnjem uzimamo da je A subdiferencijal pravilne, odozdo poluneprekidne konveksne fje $\varphi : H \to \overline{\mathbb{R}}$. Definiramo

$$\varphi_c(x,\lambda) = \inf_{u \in H} \left\{ \varphi(x-u) + (\lambda, u)_H + \frac{c}{2}\|u\|_H^2 \right\}$$

Klasična Moreauova ovojnica je dana s $(\lambda = 0)$

$$M_\mu f(x) = \inf_{y \in H} \left(f(y) + \frac{1}{2\mu}|x-y|^2 \right)$$

(glatka aproksimacija odozdo za f) gdje $x \to x + \frac{\lambda}{c}$

Proksimalni operator

$$\operatorname{prox}_{\mu f}(x) = \arg\min \left(f(y) + \frac{1}{2\mu}|x-y|^2 \right)$$

Zatvoreno $= (I + \mu A)^{-1} = J_\mu, \quad A = \partial f$

$$\nabla M_\mu f(x) = \frac{1}{\mu}\left(x - \operatorname{prox}_{\mu f}(x)\right) = A_\mu x$$

Teorem 5.45 Za $x, \lambda \in H$ inf u definiciji $\varphi_c(x,\lambda)$ se poprima u jedinstvenoj točki

$$u_c(x,\lambda) = x - J_{\frac{1}{c}}\left(x + \frac{\lambda}{c}\right)$$

$\varphi_c(\cdot,\lambda)$ je konveksna, Lipschitz neprekidna i Frechet-diferencijabilna u x (s $\varphi_c'(x,\lambda)$ označavamo njen diferencijal) te

$$\varphi_c'(x,\lambda) = \lambda + c\, u_c(x,\lambda) = A_{\frac{1}{c}}\left(x + \frac{\lambda}{c}\right)$$

Štoviše, $\lim_{c\to+\infty} \varphi_c(x,\lambda) = \varphi(x)$ i $\forall x, \lambda \in H$

$$\varphi\left(J_{\frac{1}{c}}\left(x + \frac{\lambda}{c}\right)\right) - \frac{1}{2c}|\lambda|_H^2 \leq \varphi_c(x,\lambda) \leq \varphi(x)$$

Dokaz: Prvo povežimo φ_c s klasičnom Moreauovom ovojnicom

$$\varphi_c(x,\lambda) = \inf_{v\in H}\left\{\varphi(v) + \frac{c}{2}\left|x + \frac{\lambda}{c} - v\right|^2\right\} - \frac{1}{2c}|\lambda|^2$$

(uzeli smo $v = x - u$). Primijetimo, preslikavanje

$$\psi(v) = \varphi(v) + \frac{c}{2}|v-y|^2$$

(uz $y = x + \frac{\lambda}{c}$) je konveksno i odozdo poluneprekidno

φ pravilna $\Rightarrow$ ψ pravilna. Za $x_0 \in \mathrm{dom}(A)$ i $x_0^* \in Ax_0$ po def. subdiferencijala

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + (x_0^*, x - x_0), \quad x \in H$$

Stoga je $\lim_{|v| \to +\infty} \psi(v) = +\infty$ (kvadratna fja dominira afinu) pa po Teoremu 5.32 postoji jedinstveni minimizator za ψ v_0

Neka je $\xi \in H$ i $\eta := (1-t)v_0 + t\xi$, za $t \in \langle 0, 1\rangle$

Zbog konveksnosti

$$\varphi(\eta) - \varphi(v_0) \leq t(\varphi(\xi) - \varphi(v_0))$$

Nadalje, kako je v_0 točka min za ψ:

$$\varphi(\eta) - \varphi(v_0) \geq \frac{c}{2}(|v_0 - y|^2 - |\overset{(1-t)v_0 + t\xi}{\eta} - y|^2)$$

$$= tc(v_0 - \xi, v_0 - y) - \frac{t^2 c}{2}|v_0 - \xi|^2 \quad / \lim_{t \searrow 0}$$

$$\varphi(\xi) - \varphi(v_0) \geq c(y - v_0, \xi - v_0)$$

Kako je ξ proizvoljan, to je $y - v_0 \in \frac{1}{c} A v_0$ odnosno $v_0 = J_{\frac{1}{c}} y$. Točka min u def $\varphi_c(x, \lambda)$ je stoga ($v = x - u$, $y = x + \frac{\lambda}{c}$)

$$u = u_c(x, \lambda) = x - v_0 = x - J_{\frac{1}{c}}\left(x + \frac{\lambda}{c}\right)$$

Za $x_1, x_2 \in H$ i $t \in \langle 0, 1\rangle$

$$\varphi_c((1-t)x_1 + tx_2, \lambda) = \psi((1-t)v_1 + tv_2) - \frac{1}{2c}|\lambda|^2$$

gdje je $y_i = x_i + \frac{\lambda}{c}$, $v_i = J_{\frac{1}{c}} y_i$ $i=1,2$

pa konveksnost od $\varphi_c(\cdot,\lambda)$ slijedi iz konveksnosti za φ.

Pokažimo da je $\partial \varphi_c(x,\lambda) = A_{\frac{1}{c}}(x+\frac{\lambda}{c})$.

Zaista, za $\hat{x} \in H$ def. $\hat{y} = \hat{x} + \frac{\lambda}{c}$ i $\hat{v} = J_{\frac{1}{c}}\hat{y}$:

$$\varphi(\hat{v}) + \frac{c}{2}|\hat{v}-y|^2 \geq \varphi(v_0) + \frac{c}{2}|v_0 - y|^2$$

(jer je v_0 točka min za φ) te zbog def $\hat{v}$

$$\varphi(v_0) + \frac{c}{2}|v_0 - \hat{y}|^2 \geq \varphi(\hat{v}) + \frac{c}{2}|\hat{v}-\hat{y}|^2$$

stoga,

$$\frac{c}{2}\left(|v_0-\hat{y}|^2 - |v_0-y|^2\right) \overset{\pm\varphi(v_0)}{=} \frac{c}{2}|v_0-\hat{y}|^2 + \varphi(v_0) -\varphi_c(x,\lambda) - \frac{1}{2c}|\lambda|^2 \geq \varphi_c(\hat{x},\lambda) - \varphi_c(x,\lambda)$$

$$\geq \frac{c}{2}\left(|\hat{v}-\hat{y}|^2 - |\hat{v}-y|^2\right)$$

Kako $\hat{x} \to x \Rightarrow \hat{v} \to v_0$ slijedi

$$\frac{|\varphi_c(\hat{x},\lambda) - \varphi_c(x,\lambda) - (c(y-v_0), \hat{x}-x)|}{|\hat{x}-x|} \to 0$$

kad $\hat{x} \to x$ tj. $x \longmapsto \varphi_c(x,\lambda)$ je Frechet-dif i F-diferencijal (H^* smo poistovjetili s H)

$$c(y-v_0) = \lambda + cu_c(x,\lambda) = A_{\frac{1}{c}}(x+\frac{\lambda}{c})$$

∎

Zadaći $\varphi(v) + \frac{c}{2}\left|x + \frac{\lambda}{c} - v\right|^2 \to \min$

pridružimo dualnu. Uvodimo

$$\Phi(v,y) = \varphi(v) + \frac{c}{2}\left|v - (y+\hat{y})\right|^2$$

gdje je $\hat{y} = x + \frac{\lambda}{c}$ i promatramo prim. zadaću (za $y \in H$)

$$(P_y) \quad \begin{cases} \Phi(v,y) \to \min \\ v \in H \end{cases}$$

i pripadnu dualnu zadaću

$$(P^*) \quad \begin{cases} -\Phi^*(0,y^*) \to \max \\ y^* \in H \end{cases}$$

Neka je h fja vrijednosti prim. zadaće:

$$h(y) = \inf_{v \in H} \Phi(v,y)$$

Imamo

$$\varphi_c(x,\lambda) = h(0) - \frac{1}{2c}|\lambda|^2$$

Iz preth. slijedi, h je F-dif u 0:

$$h'(0) = \varphi_c'(x,\lambda)$$

pa prema Tm 5.38 vrijedi jaka dualnost:

$$\min(P_0) = \max(P^*)$$

što daje iskazane tvrdnje

Teorem 5.46 Za $x, \lambda \in H$ vrijedi:

(3) $$\varphi_c(x,\lambda) = \sup_{y^* \in H} \left\{ (x, y^*)_H - \varphi^*(y^*) - \frac{1}{2c} |y^* - \lambda|_H^2 \right\}$$

gdje se supremum postiže u jedinstvenoj točki

$$\lambda_c(x,\lambda) = \lambda + c\, u_c(x,\lambda) = \varphi_c'(x,\lambda) = A_{\frac{1}{c}}\left(x + \frac{\lambda}{c}\right)$$

Dokaz: Računamo Φ^*:

$$\Phi^*(v^*, y^*) = \sup_{v \in H} \sup_{y \in H} \left\{ (v^*, v) + (y^*, y) - \varphi(v) - \frac{c}{2} |v - (\hat{y} + y)|^2 \right\}$$

$$= \sup_{v \in H} \Big\{ (v^*, v) + (y^*, v - \hat{y}) - \varphi(v)$$

$$+ \sup_{y \in H} \left[-(y^*, v - (\hat{y} + y)) - \frac{c}{2} |v - (\hat{y} + y)|^2 \right] \Big\}$$

$$= \sup_{v \in H} \left\{ (y^* + v^*, v) - \varphi(v) - (y^*, \hat{y}) + \frac{1}{2c} |y^*|^2 \right\}$$

$$= \varphi^*(y^* + v^*) - (y^*, \hat{y}) + \frac{1}{2c} |y^*|^2$$

Zbog jake dualnosti

$$h(0) = \sup_{y^* \in H} \left\{ -\Phi^*(0, y^*) \right\} =$$

$$= \sup_{y^* \in H} \left\{ (y^*, \hat{y}) - \varphi^*(y^*) - \frac{1}{2c} |y^*|^2 \right\}$$

Prema Tm 5.38 sup se poprima u $h'(0) = \varphi_c'(x, \lambda)$

gdje je $x = \hat{y} - \frac{\lambda}{c}$.

MJ

Teorem 5.47

a) Ako je $\lambda \in \partial\varphi(x)$ za $x, \lambda \in H$ onda je
$\lambda = \varphi_c'(x,\lambda)$ za neki $c > 0$.

b) Obratno, ako je $\lambda = \varphi_c'(x,\lambda)$ za neki $c > 0$ onda je $\lambda \in \partial\varphi(x)$.

Dokaz: a) Za $\lambda \in \partial\varphi(x)$

$$\varphi(x) \underset{\text{Tm } 5.45}{\geq} \varphi_c(x,\lambda) \underset{\substack{\text{Tm } 5.46 \\ (y^* = \lambda)}}{\geq} (\lambda, x) - \varphi^*(\lambda) \underset{\text{Tm } 5.22\,a)}{=} \varphi(x)$$

za neki c. Stoga je λ ~~maksimizator~~ u (3) (Tm 5.46) tj. $\lambda = \varphi_c'(x,\lambda)$.

b) Neka je $\lambda = \varphi_c'(x,\lambda)$ za neki c.
Prema Tm 5.46 $u_c(x,\lambda) = 0$ pa Tm 5.45 daje

$$\varphi(x) = \varphi_c(x,\lambda) \underset{\text{Tm } 5.46}{=} \langle \lambda, x\rangle - \varphi^*(\lambda)$$

što prema Tm 5.22 a) slijedi $\lambda \in \partial\varphi(x)$. $\blacksquare$

5.4. Uvjeti optimalnosti

Vraćamo se na zadatak

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x) + \varphi(\Lambda x) \to \min \\ x \in C \end{cases}$$

$\Lambda \in \mathcal{L}(X,H)$, X, H Hilbertovi, X i X^* ne poistovjećujemo

$C \subseteq X$ zatvoren konveksan

$f: X \to \mathbb{R}$ klase C^1, konveksna

$\varphi: H \to \overline{\mathbb{R}}$ odozdo poluneprek., pravilna, konveksna

(A1) f, φ su omeđene odozdo nulom na C

(A2) $\langle f'(x_1) - f'(x_2), x_1 - x_2 \rangle_{X^*, X} \geq \sigma |x_1 - x_2|_X^2$, $x_1, x_2 \in C$

(A3) $\varphi(\Lambda x_0) < +\infty$ i φ je neprekidna u nekom $x_0 \in C$.

Iz (A2) slijedi

$$f(x) - f(x_0) - \langle f'(x_0), x - x_0 \rangle_{X^*, X} = \int_0^1 \langle f'(x_0 + t(x - x_0)) - f'(x_0), x - x_0 \rangle_{X^*, X} \, dt \geq \frac{\sigma}{2} |x - x_0|_X^2$$

Također, iz (A3) slijedi da je $\partial\varphi(y_0)$ neprazan, za $y_0 = \Lambda x_0$. Ako je $y_0^* \in \partial\varphi(y_0)$ vrijedi

$$\varphi(\Lambda x) - \varphi(\Lambda x_0) = (y_0^*, \Lambda x - \Lambda x_0), \quad * \in H.$$

stoga je $f + \varphi(\Lambda x)$ koercitivno (teži $+\infty$ kad $|x| \to +\infty$,

pa po Tm 5.32 postoji jedinstveni minimizator

$\bar{x} \in C$ zadaće (4).

<u>Teorem 5.48</u>: Nužan i dovoljan uvjet za

točku minima $\bar{x} \in C$ zadaće (4) je

$$(5) \quad \langle \underset{x^*}{f'(\bar{x})}, \underset{X}{x - \bar{x}} \rangle + \varphi(\Lambda x) - \varphi(\Lambda \bar{x}) \geq 0, \quad x \in C$$

<u>Dokaz</u>: <u>Nužnost</u>: neka je $\bar{x}$ minimizator

za $t \in \langle 0,1 \rangle$ $\quad \bar{x} + t(x - \bar{x}) \in C$

$$f(\bar{x} + t(x - \bar{x})) + \varphi(\Lambda(\bar{x} + t(x - \bar{x})))$$

$$\geq f(\bar{x}) + \varphi(\Lambda \bar{x})$$

Kako je

$$\varphi(\Lambda((1-t)\bar{x} + tx)) - \varphi(\Lambda \bar{x}) \leq t(\varphi(\Lambda x) - \varphi(\Lambda \bar{x}))$$

slijedi

$$\frac{f(\bar{x} + t(x - \bar{x})) - f(\bar{x})}{t} + \varphi(\Lambda x) - \varphi(\Lambda \bar{x}) \geq 0, \quad x \in C$$

Na limes kad $t \searrow 0$ slijedi (5).

<u>Dovoljnost</u>: Iz (5) slijedi

$$f(x)+\varphi(\Lambda x) - \left(f(\bar{x})+\varphi(\Lambda \bar{x})\right)$$

$$= f(x)-f(\bar{x}) \pm \langle f'(\bar{x}), x-\bar{x}\rangle + \varphi(\Lambda x)-\varphi(\Lambda\bar{x})$$

$$\geq \frac{\tilde{\alpha}}{2}|x-\bar{x}|^2, \quad x\in C$$

tj. $\bar{x}$ je minimizator u (4).

Sada član $\varphi(\Lambda x)$ regulariziramo

$$(6) \qquad f(x)+\varphi_c(\Lambda x, \lambda) \to \min$$

za $c>0$ i $\lambda\in H$.

Prema Tm 5.45, $x\mapsto\varphi_c(\Lambda x, \lambda)$ je konveksna, Fréchet-diferencijabilna i omeđena odozdo s $-\frac{1}{2c}|\lambda|_H^2$. Stoga (6) ima jedinstveni minimizator x_c i prema prethodnom Tm

$$\langle f'(x_c), x-x_c\rangle_{X^*,X} + \left(\varphi_c'(\Lambda x_c, \lambda), \Lambda(x-x_c)\right)_H \geq 0, \quad x\in C$$

φ_c' zapisujemo pomoću Tm-a 5.45 i 5.46:

$$\varphi_c'(\Lambda x_c, \lambda) = A_{\frac{1}{c}}\left(\Lambda x_c + \frac{1}{c}\lambda\right) =: \lambda_c \in H$$

Teorem 5.49 a) Pretpostavimo da $x_c \to \bar{x}$ u X kad $c\to+\infty$ i da (λ_c) ima slabo gomilište.

Tada za svako slabo gomilište $\bar{\lambda}$ niza (λ_c) vrijedi:

$$\bar\lambda \in \partial\varphi(\Lambda \bar x) \tag{7}$$

$$\langle f'(\bar x), x-\bar x\rangle_{X^*\,X} + (\bar\lambda, \Lambda(x-\bar x))_H \geq 0, \quad x \in C$$

Obratno, ako $(\bar x, \bar\lambda) \in C \times H$ zadovoljava (7) onda $\bar x$ minimizira (4).

b) Ako postoji $\tilde\lambda_c \in \partial\varphi(\Lambda x_c)$ za $c \geq 1$ t.d. je (λ_c) ograničen u H onda $x_c \to \bar x$ kad $c \to +\infty$.

<u>Napomena</u> 5.50: Pretp. da postoji par $(\bar x, \bar\lambda) \in C \times H$ t.d. vrijedi (7). Tada je $\bar\lambda \in \partial\varphi(\Lambda\bar x)$ ekvivalentno s

$$\bar\lambda = \varphi_c'(\Lambda\bar x, \bar\lambda)$$

i $\bar x$ je jedinstveno rješenje

$$f(x) + \varphi_c(\Lambda x, \bar\lambda) \to \min_{x \in C}$$

za neki $c > 0$.

5.5. Proširene Lagrangeove metode

Promatramo zadaću (4), uz pretpostavke (A1–A3) i def $L_c(x,\lambda) = f(x) + \varphi_c(\Lambda x, \lambda)$

Algoritam

1. Neka je $\lambda_1 \in H$, $c > 0$ i $k=1$
2. Za $\lambda_k \in H$, odredi $x_k \in C$:

$$L_c(x_k, \lambda_k) = \min_{x\in C} L_c(x, \lambda_k)$$

3. $\lambda_{k+1} = \varphi_c'(\Lambda x_k, \lambda_k)$
4. Vrati se na 2 uz $k+1$ umjesto k, ako nije zadovoljen kriterij zaustavljanja.

Na def λ_{k+1} gledamo kao prolaz fiksne točke (Tm 5.45 $\varphi_c'(x,\lambda) = A_{\frac{1}{c}}(x + \frac{\lambda}{c})$ kontrakcija!)

(8) $$d_c(\lambda) := \inf_{x\in C} f(x) + \varphi_c(\Lambda x, \lambda), \quad \lambda \in H$$

Lema 5.51 Za $\lambda \in H$ i $c > 0$, inf u (8) se postiže na jedinstvenom $x(\lambda) \in C$ i preslikavanje $\lambda \mapsto x(\lambda)$ je Lipschitzovo s konstantom $\frac{1}{\alpha}$. Štoviše, d_c je klase C^1 uz $d_c'(\lambda) = u_c(\Lambda x(\lambda), \lambda)$ gdje je u_c definiran u Teoremu 5.45.

Teorem 5.52 Pretp. da postoji $\bar{\lambda} \in \partial\varphi(\Lambda\bar{x})$ t.d. vrijedi (7). Tada niz (x_k, λ_k) zadovoljava

$$\frac{\sigma}{2}|x_k-\bar{x}|_X^2 + \frac{1}{2c}|\lambda_{k+1}-\bar{\lambda}|_H^2 \leq \frac{1}{2c}|\lambda_k-\bar{\lambda}|_H^2$$

i

$$\sum \frac{\sigma}{2}|x_k-\bar{x}|_X^2 \leq \frac{1}{2c}|\lambda_1-\bar{\lambda}|_H^2$$

pa posebno $x_k \to \bar{x}$.