9.4. Uniformno regularni otvoreni skupovi

Proučavamo klasu uniformno Lipschitzovih domena. Preciznije radi se o domenama koje zadovoljavaju uvjet uniformnog konusa:

$S(0;1) = \{ \eta \in \mathbb{R}^d : |\eta| = 1 \}$

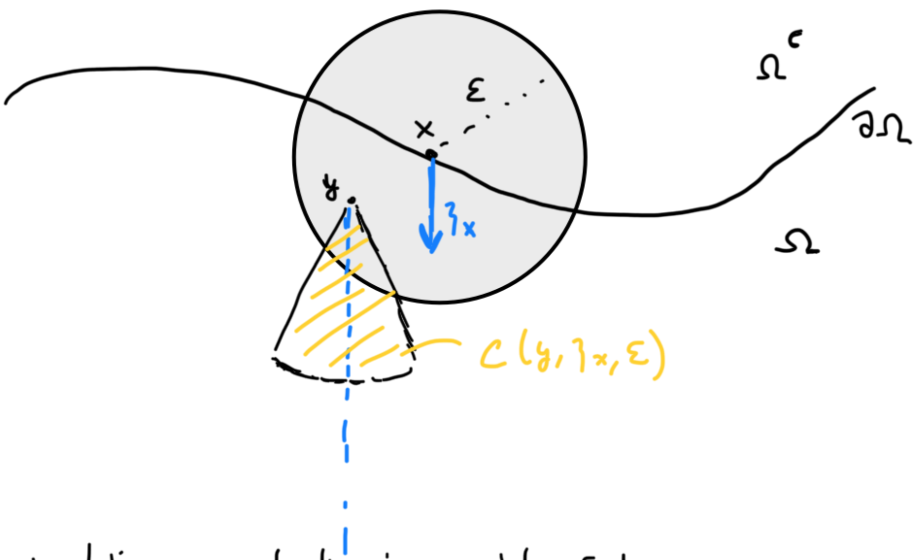
Definicija (uvjet ε-konusa)

Neka je $y \in \mathbb{R}^d$, η jedinični vektor i $\varepsilon > 0$.
Označimo s $C(y, \eta, \varepsilon)$ konus u vrhu y (bez vrha y), u smjeru η, veličine ε definiran s

$$C(y, \eta, \varepsilon) = \{ z \in \mathbb{R}^d : (z-y)^T \eta \geq \cos(\varepsilon) |z-y|, \quad 0 < |z-y| < \varepsilon \}$$

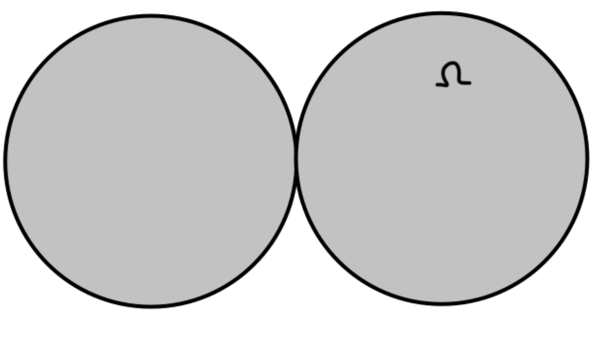
Otvoreni skup zadovoljava uvjet ε-konusa ako

$$\forall x \in \partial\Omega, \ \exists \eta_x \in S(0;1), \ \forall y \in \bar{\Omega} \cap B(x, \varepsilon), \quad C(y, \eta_x, \varepsilon) \subset \Omega.$$



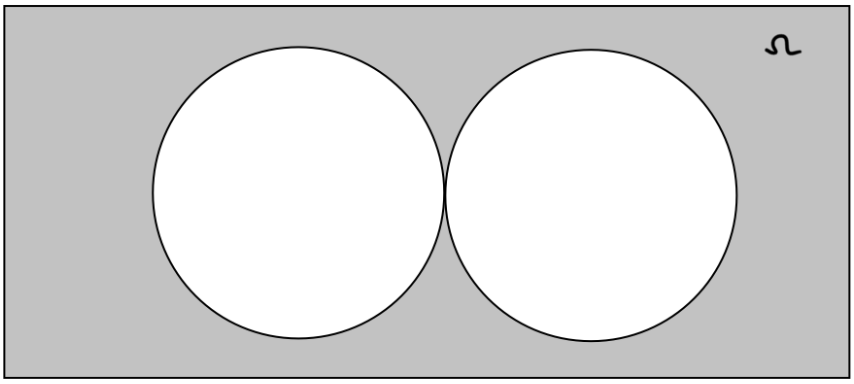
Skupovi koji ne zadovoljavaju uvjet ε-konusa:

1) Unija dviju kugli koje se dodiruju izvana u jednoj točki



2) Domena koja je komplement prethodnog primjera, dakle

maknuto dvije tangencijalne kugle



3) Svaka domena sa šiljkom. npr

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < x^p\} \quad \text{za } p > 1$$

S druge strane konveksni otvoreni skupovi ili oni koji su zvijezdasti s obzirom na sve točke kugla zadovoljavaju uvjet ε-konusa.

Def.

Kažemo da je otvoren skup Ω zvijezdast ako postoji točka $x_0 \in \Omega$ takva da $\forall y \in \Omega$, $[x_0, y] \in \Omega$.
Kažemo da je otvoren skup Ω zvijezdast s obzirom na kuglu $B \subseteq \Omega$ ako je skup zvijezdast s obzirom na svaku točku kugle

tj. $\forall y \in \bar{\Omega}, \forall z \in B \quad \{ty + (1-t)z,\ 0 \le t \le 1\} \subset \Omega$.

Propozicija 9.4.1

Ograničen, konveksan i otvoren skup zadovoljava uvjet ε-konusa.
Općenito, tvrdnja vrijedi za ograničene otvorene skupove koji su zvijezdasti s obzirom na kuglu.

Dokaz:

Svaki otvoreni konveksni skup je zvijezdast s obzirom na proizvoljnu otvorenu kuglu. Zato je dovoljno pokazati tvrdnju za zvijezdaste skupove s obzirom na kuglu.

Neka je Ω zvjezdast s obzirom na $B(x_0,r) \subset \Omega$.
Odaberimo $x \in \partial\Omega$ i $y \in B(x, r/2) \cap \overline{\Omega}$

$$z = z(y) = y + x_0 - x$$

$$z - x_0 = y - x \implies |z - x_0| = |y - x| < \frac{r}{2}$$

$$\implies z \in B(x_0, \tfrac{r}{2})$$

$$\tilde{C} = \{ t y + (1-t)\hat{z} \ : \ 0 \le t < 1, \ \tilde{z} \in B(z, r/2) \}$$

po definiciji je sadržan u Ω.

Stavimo vrh y. $\quad \eta_x = \dfrac{z-y}{|z-y|} = \dfrac{x_0 - x}{|x_0 - x|}, \quad \theta$ t.d.

$$\sin\theta = \frac{r}{2|x_0 - x|}.$$

Posebno preostaje za provjeriti da je

$C(y, \eta_x, \varepsilon) \subseteq \tilde{C}$. (time i Ω)

gdje je $\varepsilon < \min\{L, a\sin(\frac{r}{2m})\}$, $L := d(x_0, \partial\Omega)/2$, $m = \sup\limits_{x \in \partial\Omega} |x_0 - x|$

∎

Definicija (Lipschitzova granica)
Otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ima Lipschitzovu granicu ako za neke $L, a, r > 0$, za svaki $x_0 \in \partial\Omega$ postoji ortogonalni koordinatni sustav sa ishodištem u x_0, cilindar $K = K' \times \langle -a, a\rangle$ sa centrom u ishodištu, gdje je K' otvorena kugla u $\mathbb{R}^{d-1}$ radijusa r i preslikavanje $\varphi : K' \to \langle -a, a\rangle$ L-Lipschitz neprekidno t.d. $\varphi(0) = 0$ koje zadovoljava

$$\partial\Omega \cap K = \{ (x', \varphi(x')) : x' \in K' \}$$
$$\Omega \cap K = \{ (x', x_d) : x' \in K', \ x_d > \varphi(x') \}$$

Teorem 9.4.2
Otvoren skup Ω s ograničenom granicom zadovoljava uvjet

ε-konusa ako i samo ako ima Lipschitzovu granicu.

Dokaz:

vidi HP Theorem 2.4.7. ∎

Neka je dan kompakt D s nepraznim interiorom i Lipschitzovim rubom. Neka je $\varepsilon > 0$ fiksan.

Definiramo klasu otvorenih skupova

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \{ \Omega \subset D : \Omega \text{ otvoren i zadovoljava uvjet } \varepsilon\text{-konusa} \}.$$

Teorem 9.4.3

Neka je $(\Omega_n)_n \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon$. Tada postoji otvoren skup $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon$ i podniz $\Omega_{p(n)}$ t.d. $\Omega_{p(n)}$ konvergira prema Ω u smislu Hausdorfa i u smislu karakterističnih funkcija.

Dodatno, $\overline{\Omega}_{p(n)} \xrightarrow{H} \overline{\Omega}$ i $\partial\Omega_{p(n)} \xrightarrow{H} \partial\Omega$

Dokaz:

Prema Korolaru 9.3.5 znamo da postoji Ω otvoren skup i niz $\Omega_{p(n)}$ koji konvergira prema Ω u smislu Hausdorfa.

Prema Propoziciji 9.3.3. ako $(\chi_{\Omega_{p(n)}})$ konvergira prema χ tada $\chi_\Omega \leq \chi$ (možemo pronaći konvergenciju opet na podnizu pozivajući se na Banach-Alaoglu slabo-* teorem kompaktnosti).

Definiramo $F_n = \overline{D} \setminus \Omega_n$.

Pretpostavimo da $\rho(\partial D, \partial\Omega) \geq \varepsilon$ (ako nije povećamo D)

Pokažimo da F zadovoljava uvjet ε-konusa (time to zadovoljava i Ω prema Tm 9.4.2. bitna je granica $\partial\Omega$ koja je zajednička u ovom slučaju).

Neka je $x \in \partial\Omega$. Prema Prop. 9.3.1. znamo da postoji niz $x_n \in \partial\Omega_n$ koji konvergira prema x.
Za svaki n, označimo s $\xi_n \in S(0;1)$ smjer vezan za konus od točke x_n.
Zbog kompaktnosti sfere $S(0,1)$ na podniz ξ_n konvergira prema ξ.

Neka je $y \in B(x,\varepsilon) \cap F$. Prema 3) svojstvu Haussdorfove konvergencije, postoji niz $y_n \in F_n$ koji konvergira prema y.
F i F_n su kompaktni

S obzirom da je $\lim\limits_n |y_n - x_n| = |y-x| < \varepsilon$ time za n dovoljno veliki $|y_n - x_n| < \varepsilon$.
Iskoristimo ε-konus uvjet od F_n za y_n, tj.

$$C(y_n, \xi_n, \varepsilon) \subset F_n .$$

$\bar{C}(y_n, \xi_n, \varepsilon)$ konvergira prema $\bar{C}(y, \xi, \varepsilon)$ u smislu Haussdorfa i u smislu karakterističnih funkcija.

S obzirom na 4) svojstvo inkluzije znamo da je

$$\bar{C}(y, \xi, \varepsilon) \subseteq F \quad (\text{a time i } C(y,\xi,\varepsilon))$$

čime je pokazano da F zadovoljava uvjet ε-konusa.

Preostaje pokazati da je $*L^\infty$ limes od karakterističnih f-ja $\chi_{\Omega_{p(n)}}$ opet karakteristična f-ja. Dokaz se može pronaći u HP Theorem 2.4.10.

9.5. Primjena na rubni problem

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i ograničen s Lipschitzovim rubom.
Neka je $f \in L^2(D)$.

Za $\Omega \subseteq D$ otvoreni, definiramo rubni problem

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u_\Omega = f & \text{u } \Omega \\ u_\Omega = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

Neka je $j : D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Carathéodoryeva funkcija (izmjeriva u D, neprekidna u preostalim varijablama) t. d.

$$(2) \quad |j(x, r, p)| \leq C(1 + r^2 + |p|^2), \quad \forall x \in D, \ r \in \mathbb{R}, \ p \in \mathbb{R}^d.$$

i J funkcional oblika definiran preko

$$(3) \quad J(\Omega) = \int_\Omega j(x, u_\Omega(x), \nabla u_\Omega(x))\, dx, \quad u_\Omega \text{ rj. od } (1).$$

Skup dopustivih skupova standardno uz uvjet
ε-konusa sadrži i neke druge restrikcije poput:

$$(4) \quad \mathcal{O}_{ad} = \left\{ \Omega \subseteq D : \begin{array}{l} \Omega \text{ otvoren, zadovoljava uvjet} \\ \varepsilon\text{-konusa}, \quad |\Omega| = m > 0 \end{array} \right\}$$

Teorem 9.5.1.
Neka je $\mathcal{O}_{ad}$ neprazna familija definirana preko (4),
funkcija j Carathéodoryeva s uvjetom rasta (2) i
funkcional oblika J definiran preko (3).
Tada postoji $\Omega \in \mathcal{O}_{ad}$ koji minimizira J.

Dokaz:

Zbog (2)

$$|J(\Omega)| = \int_\Omega |j(x,u_\Omega(x),\nabla u_\Omega(x))|\,dx \le C\int_\Omega 1 + |u_\Omega(x)|^2 + |\nabla u_\Omega(x)|^2\,dx$$

$$= C\left(|\Omega| + \|u_\Omega\|_{H^1}^2\right)$$

Znamo da je u_Ω ograničen u H^1 normi i to ne ovisi o Ω. Zaista prema Lax-Milgram i Poincáre

(5) $$\|u_\Omega\|_{H^1(\Omega)} \le C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = C\|f\|_{L^2(D)}$$

Time je $|J(\Omega)| \le M$ za $\Omega \in \mathcal{O}_{ad}$ pa je odozdo ograničen. Neka je niz $(\Omega_n)_n \subseteq \mathcal{O}_{ad}$ minimizirajući, tj.

$$\lim_n J(\Omega_n) = \inf_{\Omega' \in \mathcal{O}_{ad}} J(\Omega).$$

Prema Tm 9.4.3, znamo da postoji podniz (opet označen isto) takav da $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega^*$, gdje je Ω^* otvoren i zadovoljava uvjet ε-konusa. Specijalno niz konvergira i u smislu karakterističnih f-ja tj.

$$\chi_{\Omega_n} \xrightarrow{*L^\infty} \chi_{\Omega^*} \quad \text{pa time je}$$

$$|\Omega^*| = \int_D \chi_{\Omega^*}\,dx = \lim_n \int_D \chi_{\Omega_n}\,dx = \lim_n |\Omega_n| = 1$$

stavili smo test funkciju $f = \chi_D \in L^1(D)$

Dakle $|\Omega^*| = 1$ i time je $\Omega^* \in \mathcal{O}_{ad}$.
Pogledajmo niz $(u_n)_n \subseteq H_0^1(D)$ koji zadovoljava

$$\int_{\Omega_n} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega_n} f\varphi.$$

Očito je niz ograničen, tj. prema (5) $\|u_n\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}$.

Postoji slabo konvergentan podniz t.d. $u_n \xrightarrow{H^1} u^*$, te

$$\int_D \nabla u_n \cdot \nabla \varphi = \int_D f\varphi \quad \Big/ \lim_n$$

$$\downarrow$$

$$\int_D \nabla u^* \cdot \nabla \varphi = \int_D f\varphi. \qquad (*)$$

Dakle $u^* \in H_0^1(D)$ i zadovoljava $(*)$.

Neka je K kompakt takav da $K \subseteq \mathrm{Int}(\bar{D} \setminus \bar{\Omega}^*)$

Jer $F_n = \bar{D} \setminus \Omega_n \xrightarrow{H} \bar{D} \setminus \Omega^*$ i $K \subseteq \bar{D} \setminus \Omega^*$

prema Prop 9.3.2 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $K \subset F_n$ $\forall n > n_0$

Posljedično je $\int_D \nabla u_n \cdot \nabla \varphi = 0$ za $\forall n \geq n_0$ i

$\operatorname{supp} \varphi = K$, pa zaključuje da u^* zadovoljava

$$\int_{\Omega^*} \nabla u^* \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f\varphi$$

odnosno $u^* \in H_0^1(\bar{\Omega}^*)$. Lagano se provjeri da $u_n \xrightarrow{H^1} u^*$

pa zbog neprekidnosti J slijedi

$$\lim_n J(\Omega_n) = J(\Omega^*).$$

∎