9. Topologija na skupovima u $\mathbb{R}^d$

9.1. Konvergencija karakterističnih funkcija

Neka je dan $E \subseteq \mathbb{R}^d$ izmjeriv i χ_E karakteristična funkcija za skup E:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Po definiciji $\chi_E \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, ali i element $L^p(\mathbb{R}^d)$ ako je $|E| < +\infty$ (ili je njegova konačna).

Ako je $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjeriv skupova tada je niz

$(\chi_{E_n})_n$ $*L^\infty$ relativno kompaktan u $L^\infty(\mathbb{R}^d)$

tj. postoji $\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ takva da

$$\forall \psi \in L^1(\mathbb{R}^d) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{E_n} \psi = \int_{\mathbb{R}^d} \chi \psi . \qquad (9.1)$$

Uočimo χ nije nužno karakteristična funkcija (preciznije ako je $E_n \subseteq D$, $\forall n \in \mathbb{N}$, D kompakt znamo da je $\chi \in L^\infty(D; [0,1])$, što nije nužno karakteristična funkcija).

Ukratko, uz $*L^\infty$ slabu konvergenciju potrebno je uvesti i konvergenciju u $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty\rangle$. Tada se može izvući podniz koji konvergira skoro svuda, tj. na limesu χ može poprimiti samo vrijednosti 0 ili 1 čime je karakteristična funkcija.

Propozicija 9.1.1.

Ako su $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, E izmjerivi takvi da

$$\chi_{E_n} \xrightarrow{*L^\infty} \chi_E \quad (\text{u smislu } (9.1))$$

tada $\chi_{E_n} \to \chi_E$ u $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ za svaki $p \in [1, +\infty\rangle$
i skoro svuda.

Dokaz:

Stavimo $\psi = \chi_{B_R} \chi_{E^c}$, B_R kugla sa centrom u ishodištu radijusa R

Tada je

$|\cdot|$ je Lebesgue mjera skupa

$$0 = \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} (\chi_{E_n} - \chi_E) \chi_{B_R} \chi_{E^c}$$
$$= \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B_R} \chi_{E_n} \chi_{E^c} = \lim_n |B_R \cap (E_n \setminus E)|$$

Stavimo $\psi = \chi_{B_R}$

$$0 = \lim_n \int_{B_R} (\chi_{E_n} - \chi_E) = \lim_n \left\{ |B_R \cap (E_n \setminus E)| - |B_R \cap (E \setminus E_n)| \right\}$$

$\Rightarrow \lim_n |B_R \cap (E \setminus E_n)| = 0$. Po definiciji za $p \in [1, +\infty$.

$$\int_{B_R} |(\chi_{E_n} - \chi_E)(x)|^p \, dx = |B_R \cap (E \setminus E_n)| + |B_R \cap (E_n \setminus E)|$$

otkud slijedi tvrdnja $\chi_{E_n} \to \chi_E$ za $p \in [1, +\infty\rangle$,
Posljednja tvrdnja slijedi iz svojstva L^p funkcija. ∎

9.2. Hausdorffova konvergencija otvorenih skupova.

Neka je $d(\cdot,\cdot)$ Euklidska udaljenost na $\mathbb{R}^d$.

$$\mathcal{K}_B = \{ A \subseteq B : A \text{ je neprazan kompaktan skup} \}$$

B je kompaktan skup

Definicija

Neka je $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_B$. Postavimo

$$d(x, K_1) := \inf_{y \in K_1} d(x,y)$$

$$\rho(K_1, K_2) := \sup_{x \in K_1} d(x, K_2) = \sup_{x \in K_1} \inf_{y \in K_2} d(x,y)$$

$$d^H(K_1, K_2) := \max(\rho(K_1,K_2), \rho(K_2,K_1)) \qquad (H)$$

Uočimo da su inf i sup postižu jer se radi o kompaktnim skupovima te je $x \mapsto d(x,K)$ neprekidna f-ja (pokažite).

$\rho(K,K) = 0$ je očito. Ako je $K_1 \neq K_2$, tada postoji $x \in K_1 \setminus K_2$ (BSOMP) pa je $d(x, K_2) > 0$ (ako je 0 to povlači kontradikciju sa zatvorenošću od K_2).

i time $\rho(K_1,K_2) > 0$.

Dakle $d^H(K_1, K_2) > 0$ za $K_1 \neq K_2$.

Simetrija slijedi iz definicije tj. $d^H(K_1,K_2) = d^H(K_2,K_1)$.

ρ bi trebao naslijediti nejednakost trokuta od Euklidske metrike na $\mathbb{R}^d$.

Zaista, neka su K_1, K_2, K_3 neprazni kompaktni skupovi.

$$d(k_1, K_2) = \inf_{k_2 \in K_2} d(k_1, k_2) \leq \inf_{k_2 \in K_2} \left(d(k_1, \overline{k_3}) + d(\overline{k_3}, k_2) \right)$$

gdje je $\overline{k_3}$ t.d. $d(k_1, \overline{k_3}) = d(k_1, K_3)$

$$\leq d(k_1, \overline{k_3}) + \inf_{k_2 \in K_2} d(\overline{k_3}, k_2)$$

$$= d(k_1, K_3) + d(\overline{k_3}, K_2) \Big/ \sup_{k_1 \in K_2}$$

$$\Rightarrow \rho(K_1, K_2) \leq \rho(K_1, K_3) + \rho(K_3, K_2)$$

$$\rho(K_1,K_2) \leq \rho(K_1,K_3) + \rho(K_3,K_2) \leq d^H(K_1,K_3) + d^H(K_2,K_3)$$

$$\rho(K_2,K_1) \leq \rho(K_2,K_3) + \rho(K_3,K_1) \leq d^H(K_2,K_3) + d^H(K_1,K_3)$$

$\Rightarrow \quad d^H(K_1,K_2) = \max\{\rho(K_1,K_2), \rho(K_2,K_1)\} \leq d^H(K_1,K_3) + d^H(K_2,K_3)$

Dakle d^H je zaista metrika jer:

1) $d^H(K,K)=0$, $\forall K$
2) $d^H(K_1,K_2)>0$ za $K_1 \neq K_2$
3) $d^H(K_1,K_2) = d^H(K_2,K_1)$
4) nejednakost trokuta

Može se pokazati da je $(\mathcal{K}_B, d^H)$ kompaktni metrički prostor
vidi HP Th 2.2.25.

Definicija (konvergencija Hausdorffa za otvorene skupove)
Neka su $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i Ω otvoreni skupovi sadržani u kompaktu B. Kažemo da niz Ω_n konvergira (u Hausdorffovom smislu) prema Ω ako

$$d^H(B\setminus\Omega_n, B\setminus\Omega) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Označavamo kao $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$.

Uočimo da $d_H(\Omega_1,\Omega_2) := d^H(B\setminus\Omega_1, B\setminus\Omega_2)$ definira metriku na skupu $\mathcal{O}_B = \{\Omega \subseteq B : \Omega \text{ otvoren}\}$

Uočimo ako je $\tilde{B}$ kompakt t.d. $\Omega_1,\Omega_2 \subseteq B$ i $\Omega_1,\Omega_2 \subseteq \tilde{B}$ tada

$$d^H(B\setminus\Omega_1, B\setminus\Omega_2) = d^H(\tilde{B}\setminus\Omega_1, \tilde{B}\setminus\Omega_2)$$

što je posljedica sljedeće leme

Lema 9.2.1.
Ako je $\Omega_2\setminus\Omega_1 \neq \emptyset$ tada

$$\rho(B\setminus\Omega_1, B\setminus\Omega_2) = \rho(\Omega_2\setminus\Omega_1, \partial\Omega_2)$$

Dokaz:

Za svaki $x \in B$ možemo zaključiti

$$d(x, B\setminus\Omega_2) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \in B\setminus\Omega_2 \\ d(x, \partial\Omega_2), & \text{ako je } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Ako je $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ neprazan

$$\rho(B\setminus\Omega_1, B\setminus\Omega_2) = \sup_{x \in B\setminus\Omega_1} d(x, B\setminus\Omega_2) = \sup_{x \in \Omega_2\setminus\Omega_1} d(x, \partial\Omega_2)$$

$$= \max_{x \in \overline{\Omega_2\setminus\Omega_1}} d(x, \partial\Omega_2) = \rho(\overline{\Omega_2\setminus\Omega_1}, \partial\Omega_2)$$

■

Uočimo ako je $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = \emptyset$ tada je $\rho(B\setminus\Omega_1, B\setminus\Omega_2) = 0$.

Dogovorno je $\rho(\emptyset, E) = 0, \ \forall E$

Time za Ω_1, Ω_2 ograničen u $\mathbb{R}^d$ vrijedi

$$d_H(\Omega_1, \Omega_2) = \max\left\{ \rho(\Omega_2\setminus\Omega_1, \partial\Omega_2), \rho(\Omega_1\setminus\Omega_2, \partial\Omega_1) \right\}$$

Ako je $\Omega_1 = \emptyset$, $d_H(\emptyset, \Omega_2)$ je radijus najveće kugle sadržane u Ω_2.

9.3. Svojstva Hausdorffove konvergencije

$K_n \supseteq K_{n+1}$

1) Padajući niz nepraznih kompaktnih skupova konvergira (u smislu Hausdorffa) prema presjeku niza.

Dokaz:

Neka je $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz nepraznih kompaktnih skupova

$K := \bigcap_n K_n$. Odaberimo niz $x_n \in K_n$ sa svojstvom

$d(x_n, K) = \rho(K_n, K)$.

Postoji konvergentan podniz $x_n \to x$. Jer je

$x \mapsto d(x, K)$ Lipschitzova (pokažite)

$$|d(x_n, K) - d(x, K)| \leq d(x_n, x) \quad \text{povlači}$$

$$\lim_n d(x_n, K) = d(x, K).$$

Uočimo $x \in K$ (ako $x \notin K$ time postoji $n_0 \in \mathbb{N}_0$
$x \in K_{n_0}$, ali $x \notin K_{n_0+1}$
$d(x, x_n) \geq d(x, K_{n_0})$, $\forall n \geq n_0+1$
$\Rightarrow\Leftarrow$)

Zato je $d(x, K) = 0$, tj. $\lim_n \rho(K_n, K) = \lim_n d(x_n, K) = 0$

S druge strane $\rho(K, K_n) = \sup_{k \in K} \underbrace{d(k, K_n)}_{0} = 0$

$$\Rightarrow \quad d^H(K, K_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

∎

$K_{n+1} \supseteq K_n$

2. Rastući niz nepraznih kompaktnih skupova sadržanih u B konvergiraju (u Hausdorffovom smislu) zatvaraču svoje unije.

Dokaz:

Neka je K_n takav niz. $K := \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n}$.

Odaberim $x_n \in K_n$ takav da je $d(x_n, K) = \rho(K_n, K)$

Tada postoji konvergirajući podniz $x_n \to x \in K$ (opet u istoj notaciji)

Iz def. od K možemo pronaći podniz $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$y_{p_n} \in K_{p_n} \quad \text{t.d.} \quad \lim_n y_{p_n} = x.$$

Time je $\lim_n d(x, K_{p_n}) \leq \lim_n d(x, y_{p_n}) = 0.$

Jer je $K_{n+1} \supseteq K_n$ $\quad d(x, K_n) \geq d(x, K_{n+1})$

dobivamo $\quad 0 = \lim_n d(x, K_n) = \lim_n d(x_n, K_n) = \lim_n \rho(X, K_n)$

$$|d(x,K_n) - d(x_n, K_n)| \leq d(x, x_n) \to 0$$

čime je tvrdnja pokazana

∎

3) Ako $K_n \xrightarrow{H} K$ $\quad (K_n, K$ kompakti$)$

$$K = \bigcap_n \left(\overline{\bigcup_{p \geq n} K_p}\right) = \left\{ x \in B : \exists\, x_{p_n} \in K_{p_n},\ x = \lim_n x_{p_n} \right\}$$
$$= \left\{ x \in B : \exists\, x_n \in K_n,\ x = \lim_n x_n \right\}$$

Dokaz:

Označimo $\quad F_n = \overline{\bigcup_{p \geq n} K_p} \qquad F_n \supseteq F_{n+1}$ padajući niz.

Prema 1) $\quad F_n \xrightarrow{H} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = F$

$$d^H(K_n, F_n) = \rho(K_n, F_n) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \rho(K_p, K_n) \to 0 \quad (\text{Cauchy niz})$$

jer je $K_n \subseteq F_n$ $\rho(F_n, K_n) = 0$

Time smo pokazali $\quad K_n \xrightarrow{H} F$, tj. $\quad K = F$.

Ostale tvrdnje idu iz def F.

∎

4) $\left.\begin{array}{l} K_n \xrightarrow{H} K \\ F_n \xrightarrow{H} F \end{array} \quad \& \quad K_n \subseteq F_n \right\} \Rightarrow K \subseteq F.$

Dokaz:

Trivijalna posljedica od 3)

$$K_p \subseteq F_p \Rightarrow \bigcup_{p \geq n} K_p \subseteq \bigcup_{p \geq n} F_p \Rightarrow \overline{\bigcup_{p \geq n} K_p} \subseteq \overline{\bigcup_{p \geq n} F_p}$$

$$\Rightarrow \bigcap_n \overline{\bigcup_{p \geq n} K_p} \subseteq \bigcap_n \overline{\bigcup_{p \geq n} F_p} \qquad \blacksquare$$

5) Alternativna definicija Hausdorffove udaljenosti.

Za $\alpha > 0$, K kompakt $\quad K^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, K) \leq \alpha\}$

$$d^H(K_1, K_2) = \inf\{\alpha > 0 : K_2 \subset K_1^\alpha, \ K_1 \subset K_2^\alpha\}$$

Dokaz: direktno posljedica

$$K_2 \subset K_1^\alpha \Leftrightarrow \sup_{x \in K_2} d(x, K_1) \leq \alpha \quad \text{(pokaži)}$$

Propozicija 9.3.1

Neka je Ω_n niz otvorenih skupova koji konvergira (u smislu Hausdorffa) prema otvorenom skupu Ω. Neka je $x \in \partial\Omega$. Tada postoji niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \partial\Omega_n$ takav da $x_n \to x$.

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno: neka je $x \in \partial\Omega$ i da $d(x, \partial\Omega_n) \not\to 0$.

Tada postoji zatvorena kugla $\overline{B}(x, r)$, $r > 0$ takva da

$$\overline{B}(x, r) \cap \partial\Omega_{k(n)} = \emptyset \quad \text{za podniz } k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Time je $\overline{B}(x, r)$ sadržana u $\Omega_{k(n)}$ ili $\Omega_{k(n)}^c$.

Posljedica $B(x,r) \subset \Omega$, odnosno $\overline{B(x,r)} \subset \Omega^c$ zbog stabilnosti inkluzije s obzirom na Hausdorffovu konvergenciju.

Tim $x \notin \partial\Omega$ $\Rightarrow \Leftarrow$ $\blacksquare$

Za otvorene skupove $\Omega_n, \tilde{\Omega}_n$ t.d. $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$, $\tilde{\Omega}_n \to \tilde{\Omega}$, $\Omega, \tilde{\Omega}$ otvo...
vrijedi $\Omega_n \cap \tilde{\Omega}_n \xrightarrow{H} \Omega \cap \tilde{\Omega}$.

je direktna posljedica $d_H(\Omega_n \cap \tilde{\Omega}_n, \Omega \cap \tilde{\Omega}) \leq \max\{d_H(\Omega_n, \Omega), d_H(\tilde{\Omega}_n, \Omega)\}$

Propozicija 9.3.2

Ako je dan skup otvorenih skupova $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$ i ako je K kompakt takav da $K \subset \Omega$, onda postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ $K \subset \Omega_n$.

Dokaz:

$$0 < \inf_{x \in K} d(x, B \setminus \Omega) \quad \text{i}$$

Neka je $\underset{\in B\setminus\Omega_n}{x_3}$ t.d. $d(x_1, x_3) = \inf_{z \in B \setminus \Omega_n} d(x_1, z)$

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2) \\ &\leq d(x_1, B \setminus \Omega_n) + d(x_3, x_2) \\ d(x_1, B\setminus\Omega) &\leq d(x_1, B \setminus \Omega_n) + d(x_3, B\setminus\Omega) \\ &\leq \sup_{x_3 \in B\setminus\Omega_n} d(x_3, B\setminus\Omega) = \rho(B\setminus\Omega_n, B\setminus\Omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad d(\cdot, B\setminus\Omega) \leq d(\cdot, B\setminus\Omega_n) + d^H(B\setminus\Omega_n, B\setminus\Omega) \Big/ \inf_{x \in K}$$

$$0 < \inf_{x \in K}(x, B\setminus\Omega_n) + \underbrace{d^H(B\setminus\Omega_n, B\setminus\Omega)}_{\downarrow\, n \to +\infty \atop 0}$$, dakle za neki n_0

$$\inf_{x \in K} (x, B \setminus \Omega_n) > 0 \quad \text{za} \quad n \geq n_0$$

∎

Propozicija 9.3.3

Neka su Ω_n, Ω otvoreni skupovi u nekom B.

Ako $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$ tada

i) $|\Omega \setminus \Omega_n| \to 0$

ii) $\chi_\Omega \leq \liminf_n \chi_{\Omega_n}$ s. s.

iii) Ako $\chi_{\Omega_n} \xrightarrow{*L^\infty} \chi$ tada $\chi_\Omega \leq \chi$.

Dokaz :

BSOMP B je kompaktan.

$K = B \setminus \Omega$, $K_n = B \setminus \Omega_n$.

Neka je niz $(\varepsilon_n)_n > 0$, $\lim_n \varepsilon_n = 0$ t. d.

$$\varepsilon_n \geq g(K_n, K) \quad \left(\text{ide u } 0 \text{ jer } d^H(K_n, K) \to 0\right)$$
$$\geq \sup_{x \in K_n} d(x, K)$$

$$\chi_{\Omega \setminus \Omega_n} = \chi_{K_n \setminus K} \leq \chi_{\{x \in B :\ 0 < d(x, K) < \varepsilon_n\}}$$

Beppo Levi lema

Neka (A_n) padajući niz izmjerivih skupova

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \dots$$

$\bigcap_n A_n = \phi$. Za $f \in L^1(\mu)$

$$\int_{A_n} f \, d\mu \to 0$$

Dokaz:

$$g_n = f \chi_{A_n},$$

$\tilde{g}_n = f - g_n$ raste prema f i $\lim \tilde{g}_n(x) = f(x)$

$0 \le \tilde{g}_1 \le \tilde{g}_2 \ldots$

pa po teoremu monotone konvergencije slijedi

$$\lim_n \int_X \tilde{g}_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

$\blacksquare$

BL

$\Rightarrow \lim_n \int_B \chi_{\Omega \setminus \Omega_n}(x) \, dx = 0$ tj. $|\Omega \setminus \Omega_n| \to 0$

$$\chi_\Omega = \chi_{\Omega \setminus \Omega_n} + \chi_{\Omega \cap \Omega_n} \le \chi_{\Omega \setminus \Omega_n} + \chi_{\Omega_n} \quad \Big/ \liminf_n$$

$$\chi_\Omega \le \liminf_n \chi_{\Omega_n} \quad \text{s.s.}$$

$$\Rightarrow \int_B \chi_\Omega \psi \le \lim_n \int_B \chi_{\Omega_n} \psi \overset{\text{def}}{=} \int_B \chi \psi$$

$\blacksquare$

Teorem 9.3.4

Neka je dan niz K_n kompaktnih skupova u fiksnom kompaktu B.

Tada postoji kompakt $K \subseteq B$ i podniz $K_{k(n)}$ takav $K_{n(k)} \xrightarrow{H} K$.

Korolar 9.3.5

Neka je Ω_n niz otvorenih skupova sadržanih u fiksnom kompaktu B. Tada postoji otvoren skup Ω u B i podniz

$\Omega_{k(n)}$ t.d. $\Omega_{k(n)} \xrightarrow{H} \Omega$.

Koristimo notaciju $d_K(x) = \min \{ d(x,y) : y \in K \}$

Propozicija 9.3.6

Ako su K_1, K_2 kompaktni skupovi tada

$$d^H(K_1, K_2) = \| d_{K_1} - d_{K_2} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \| d_{K_1} - d_{K_2} \|_{L^\infty(K_1 \cup K_2)}$$

Konkretno,

$$K_n \xrightarrow{H} K \iff d_{K_n} - d_K \text{ konvergira uniformno prema } 0 \text{ na } \mathbb{R}^d.$$

Dokaz:

Neka je $\sigma(K_2, K_1) := \| d_{K_1} - d_{K_2} \|_{L^\infty(K_1 \cup K_2)}$.

Za svaki $x \in K_2$

$$d(x, K_1) = | d(x,K_1) - d(x,K_2) | \leq \sigma(K_2, K_1) \Big/ \max_{x \in K_2}$$

$$\Rightarrow \quad \rho(K_2, K_1) \leq \sigma(K_2, K_1)$$

Analogno $\rho(K_1, K_2) \leq \sigma(K_1, K_2) = \sigma(K_2, K_1)$

$$\Rightarrow \quad d^H(K_1, K_2) \leq \sigma(K_2, K_1).$$

Za obratnu nejednakost, neka su $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$ za $x \in \mathbb{R}^d$ t.d.

Za svaki $y \in K_1$

$$d(x,y) \le d(x,k_2) + d(k_2,y) \quad / \min_{y \in K_1}$$

$$\Rightarrow \quad d(x,K_1) \le d(x,k_2) + d(k_2,K_1) = d(x,K_2) + d(k_2,K_1)$$

$$\Rightarrow \quad d(x,K_1) - d(x,K_2) \le d(k_2,K_1) \le \rho(K_2,K_1) \le d^H(K_1,K_2)$$

Analogno $d(x,K_2) - d(x,K_1) \le d^H(K_2,K_1)$

pa je $\forall x \in \mathbb{R}^d \quad |d(x,K_1) - d(x,K_2)| \le d^H(K_1,K_2) \quad / \ \|\cdot\|$ ess sup

$$\Rightarrow \quad \sigma(K_2,K_1) \le \| d_{K_1} - d_{K_2} \| \le d^H(K_1,K_2)$$

$\blacksquare$

Dokaz Teorema 9.3.4:

Neka je dan niz d_{K_n} u n.p. $(C(B), \|\cdot\|_{L^\infty})$

- Niz (d_{K_n}) je uniformno ograničen (promjer od B)
- Niz (d_{K_n}) je ekvineprekidan jer je $x \mapsto d_K(x)$ Lipschitz neprekidn

$$|d_{K_n}(x) - d_{K_n}(y)| = |d(x,K_n) - d(y,K_n)| \le d(x,y)$$

Arzelà-Ascoli teorem kaže da je d_{K_n} relativno kompaktan u $C(B)$.

To znači postoji konvergentan podniz prema $f \in C(B)$.

Preostaje pokazati da je $f = d_K$ pa tvrdnja slijedi po Prop 9.3.6.

$$|d_{K_n}(x) - d_{K_n}(y)| \le d(x,y) \quad / \lim_n$$

$\Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$, preciznije ako je $y \in K$

$$f(x) = |f(x)| \leq d(x,y) \;/\; \overset{\min}{\forall y} \in K$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \leq d_K(x)$$

Neka je $x \in \mathbb{R}^d$ i definiramo niz (x_n), $x_n \in K_n$ t.d. $d(x, K_n) = d(x, x_n)$. S obzirom da je niz u B postoji konvergentni podniz $x_{k(n)} \to y \in B$.

$$f(x) = \lim_n d_{K_{k(n)}}(x) = \lim_n d(x, x_{k(n)}) = d(x,y)$$

S obzirom da je $f(y) = \lim_n d_{K_{k(n)}}(y) \leq \lim d(y, x_{k(n)}) = 0$

$\Rightarrow \quad y \in K$.

$$f(x) = d(x,y) \geq d_K(x)$$

$\blacksquare$