8.2. Primjena na probleme linearne elastičnosti

8.2.1. Gradijentna metoda

Iako gradijentna metoda predstavlja jednostavan alat u optimizaciji, kada radimo s oblicima potrebno je detaljnije opisati neke ideje.

Neka je $F : X \to \mathbb{R}$ preslikavanje na Hilbertovom prostoru.

Gradijentna metoda sastoji se od konstrukcije niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ kroz

$$x_{n+1} = x_n - t_n d_n$$

gdje je $t_n \in [0,+\infty)$ mali pozitivni korak, a d_n je vektor silaska obično definiran kao

$$(d_n, y)_X = {}_{X^*}\langle DF(x_n), y\rangle_X$$

$(\cdot,\cdot)_X$ je skalarni produkt, čime je $DF(x_n)$ F-derivacija od F u točki x_n.

Ako $F'(x_n)$ nije jednak nuli tada postoji $\tau_n > 0$ t.d. $h_n \in \langle 0, \tau_n\rangle$

$$F(x_{n+1}) < F(x_n).$$

Ako je F jako konveksna klase C^1 tada postoji optimalno rješenje x^* t.d. $x_n \to x^*$ neovisno o odabiru početne iteracije.

U optimizaciji oblika, oblik X više nije Hilbertov prostor, preciznije radi se o familiji otvorenih podskupova u $\mathbb{R}^d$.

Neovisno, gradijentna metoda može se uspješno primijeniti na varijacije domene definirane kroz pertubaciju identitete

$$\phi_\theta = Id + \theta, \quad \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$$

Pokazuje se dovoljnim pronaći $\Theta \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ kao rješenje od

$$(H) \quad \int_\Omega D\Theta : D\varphi + \Theta \cdot \varphi = \langle J'(\Omega), \varphi \rangle = J'(\Omega;\varphi).$$

Istaknimo kako se (H) može dodatno interpretirati i kao regularizacija vektora silask Θ (i može biti na nadskup $D \supset \overline{\Omega}$).

Napomena

Odabir $H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ umjesto $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ je primarno zbog tehničkih razloga, preciznije unutar programa za FEM (H) je izuzetno jednostavno za riješiti.

Istaknimo da se (H) može generalizirati tako da se traži minimum funkcionala $\frac{1}{2}I(\Theta) - J'(\Omega;\Theta)$, gdje je pozitivan funkcional $(I(x) \geq 0, \forall x)$.

(H) je ustvari $I(\Theta) = \|\Theta\|^2_{H^1(\Omega)}$.

Algoritam 8.2.0

1. Odaberi inicijalni oblik Ω_0
2. Ponavljaj do konvergencije $(n \geq 0)$
   a) Izračunaj $\Theta_n \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ kao rješenje (H) gdje je $\Omega = \Omega_n$
   b) $\Omega_{n+1} = (Id - h_n\Theta_n)(\Omega_n)$ gdje je h_n dovoljno mali

Pritom se izraz $J'(\Omega;\Theta)$ uz dodatnu pretpostavku na glatkoću može zapisati u obliku

$$J'(\Omega;\Theta) = \int_{\partial\Omega} j(\Omega)\, \Theta \cdot n \, ds$$

8.2.2. Struktura derivacije oblika

Teorem 8.2.1 (Prop. 5.9.1 + Teor. 5.9.2 u HP)
Neka je $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, otvoren. Neka je dan funkcional oblika $E : \mathcal{O}(\Omega, k) = \{ (\mathrm{Id}+\theta)\Omega : \theta \in C^k(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \cap W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$
$\|\theta\|_{W^{k,\infty}} < 1 \} \to \mathbb{R}$

Pretpostavimo da je $\mathcal{E} : \theta \mapsto E((\mathrm{Id}+\theta)\Omega)$ diferencijabilno u nuli.
Tada
$$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \longmapsto \mathcal{E}'(0)\varphi$$
definira distribuciju reda manjeg ili jednakog k na $\mathbb{R}^d$ čiji je nosač $\partial\Omega$.

Ako je dodatno Ω klase C^{k+1}, $\mathcal{E} : W^{k,\infty} \cap C^k \to \mathbb{R}$ je diferencijabilno u nuli, onda postoji neprekidni linearni funkcional na $C^k(\partial\Omega)$ takav da je
$$\mathcal{E}'(0)\varphi = \ell_1(\varphi|_{\partial\Omega} \cdot n).$$

Primjer 8.2.3

$f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$, $\quad E(\Omega) = \int_\Omega f$.

Tada je za izmjerivi i otvoren Ω
$$\langle E'(\Omega), \theta \rangle = \int_\Omega \mathrm{div}(f\theta) = \int_\Omega \nabla f \cdot \theta + f \,\mathrm{div}\,\theta$$

Ako je Ω klase C^1 (barem Lipschitzov) onda je
$$\langle E'(\Omega), \theta \rangle = \int_{\partial\Omega} f\, \theta \cdot n$$

Primjer 8.2.4

Neka je $g \in W^{2,1}(\mathbb{R}^d)$, $E(\Omega) := \int_{\partial\Omega} g$, Ω klase C^2

Tada znamo da je

$$\langle E'(\Omega), \theta \rangle = \int_{\partial\Omega} \nabla g \cdot \theta + g \, \mathrm{div}_\Gamma(\theta)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n} \theta \cdot n + \nabla_\Gamma g \cdot \theta_\Gamma + g \, \mathrm{div}_\Gamma(\theta)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n} \theta \cdot n + \mathrm{div}_\Gamma(g\theta)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n} \theta \cdot n + g H \theta \cdot n = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial n} + g H \right) \theta \cdot n$$

Definicija $H = \mathrm{div}_\Gamma n$, $\theta_\Gamma = \theta - (\theta \cdot n) n$

Propozicija 8.2.5 (opravdanje gornjeg računa)

Neka je Ω klase C^2. Tada za svako proširenje N normale n koje je unitarno i klase C^1 vrijedi

$$\mathrm{div} N = H$$

Prop. 5.4.8 u HP

Neka je $\theta \in W^{1,1}(\partial\Omega; \mathbb{R}^d)$ t.d. $\theta \cdot n = 0$ na $\partial\Omega$. Tada je

$$\int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma \theta = 0$$

vidi lemma 5.4.10 u HP

$\theta_\Gamma \cdot n = 0$

$$\mathrm{div}_\Gamma(\theta) = \mathrm{div}_\Gamma(\theta_\Gamma + (\theta \cdot n) n) = \underbrace{\mathrm{div}_\Gamma \theta_\Gamma}_{=0} + \mathrm{div}_\Gamma((\theta \cdot n) n)$$

$$\mathrm{div}_\Gamma((\theta \cdot n) n) = (\theta \cdot n) \mathrm{div}_\Gamma n + \underbrace{\nabla_\Gamma(\theta \cdot n) \cdot n}_{=0} \overset{\text{def}}{=} (\theta \cdot n) H$$

tangencijala • normala

Time je $\mathrm{div}_\Gamma(g\theta) = g H \theta \cdot n$

Vratimo se na $C(\Omega)$ od ranije preciznije. Po tm. C-S znamo da je

$$c'(\Omega;\theta) = \partial_t G(0,\bar{u},-\bar{u})$$

$$= \partial_t \left(\int_{\phi_t(\Omega)} f\cdot(u-p) + \int_{\phi_t(\Gamma_N)} g\cdot(u-p) + \int_{\phi_t(\Omega)} Ae(u):e(p) \right) \Bigg|_{(t,u,p)=(0,\bar{u},-\bar{u})}$$

Primjer 8.2.3
8.2.4

$$= 2\int_{\Gamma\cup\Gamma_N} f\cdot\bar{u}\,(\theta\cdot n) + 2\int_{\Gamma_N} g\cdot\bar{u}\,H\,(\theta\cdot n) - \int_{\partial\Omega} Ae(\bar{u}):e(\bar{u})\,(\theta\cdot n)$$

Ako je $\theta\cdot n = 0$ na $\Gamma_D\cup\Gamma_N$ slijedi i $f\equiv 0$

$$c'(\Omega;\theta) = -\int_{\Gamma} Ae(\bar{u}):e(\bar{u})\,(\theta\cdot n) \qquad (8.2.1)$$

Napomena

Da bi (8.2.1) imala smisla rub $\partial\Omega$ mora biti klase C^2. Dodatno, $f\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ i $g\in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ osigurava $\bar{u}\in H^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ barem u okolini od Γ, ako imamo pretpostavku $\theta\cdot n=0$ na okolini od $\Gamma_D\cup\Gamma_N$. Uvjet $\theta\in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ primarno postoji ako želimo koristiti izraz

$$\int_{\Gamma_N} g\cdot\bar{u}\,H(\theta\cdot n).$$

U suprotnom $\theta\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ je više nego dovoljan, ali se ostavlja u praksi kod rješavanja zadaće (H).
Dakle za $\bar{u}$ i vektor silaska θ u Algoritmu 8.2.0 konačni elementi P1 nisu dovoljni.