Formalna Céa metoda

J. Céa, Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût, Math. Model. Num 20, 3 (1986), pp. 371–420.

Računanje derivacije oblika je spor proces, ali postoji tzv. „formalnu Céa metoda" koja daje brz formalni rezultat kroz korištenje Lagrangeove funkcije.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla u) = f & \text{u } \Omega \\ u = 0 & \text{u } \partial\Omega \end{cases} \qquad J(\Omega) = \int_\Omega f u$$

$$\hookrightarrow \quad \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega f \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \swarrow \quad E(\Omega, u, \varphi) = \int_\Omega f\varphi - \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

$$\begin{aligned} L(\Omega, u, p) &:= J(\Omega, u) + E(\Omega, u, p) \\ &= \int_\Omega f u - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla p + \int_\Omega f p \end{aligned}$$

$\phi_t = Id + t\theta, \quad t > 0$, $\theta \in W^{1,\infty}$

$$\tilde{G}(t, \varphi, \psi) = L(\phi_t(\Omega), \varphi \circ \phi_t^{-1}, \psi \circ \phi_t^{-1})$$

$$\tilde{G} : [0, \tau] \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \qquad J_t = \det \nabla \phi_t$$

$$\tilde{G}(t, \varphi, \psi) = \int_\Omega f \circ \phi_t \, \varphi \, J_t - \int_\Omega A_t \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \int_\Omega f \circ \phi_t \, \psi \, J_t$$

$$A_t = J_t \nabla \phi_t^{-1} \nabla \phi_t^{-\tau}$$

Neka je u_0 rješenje od $\frac{\partial L}{\partial u}(\Omega, u_0, p_0)[\varphi] = 0 \ , \forall \varphi$

-||- p_0 -||- $\frac{\partial L}{\partial p}(\Omega, u_0, p_0)[\psi] = 0 \ , \forall \psi$

$\Leftrightarrow \quad \int \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi = \int f \varphi \ , \forall \varphi \quad , \int \nabla p_0 \cdot \nabla \psi = \int f \psi \ , \forall \psi$

$$J'(\Omega; \theta) = \frac{d}{dt} \tilde{G}(t, u_0, p_0)\Big|_{t=0}$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div}(f\theta)\, u_0 - \int_\Omega (\operatorname{div}\theta\, I + \nabla\theta + \nabla\theta^{\tau})\, \nabla u_0 \cdot \nabla p_0$$

$$+ \int_\Omega \operatorname{div}(f\theta)\, p_0$$

Jer je $u_0 = p_0$ dolazimo do ranije izračunatog izraza.

7.4. Formulacija sedlaste točke i parametrizacija funkcijskog prostora

7.4.1. Motivacijski primjer

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren, omeđen skup s glatkom granicom Γ. Pretpostavimo da je u rješenje Neumannovog problema

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & u \ \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \text{SF} \begin{cases} u \in H^1(\Omega) \text{ t.d.} \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

gdje je $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Neka je dan funkcional oblika

$$(1.2) \qquad J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_\Omega |u_\Omega - u_0|^2 \, dx$$

gdje je $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ fiksna funkcija.

Rješenje od (1.1) je rješenje minimizacijskog problema

$$\inf \left\{ E(\Omega; \varphi) : \varphi \in H^1(\Omega) \right\}$$

$$E(\Omega, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + \varphi^2 - 2f\varphi \, dx$$

odnosno zadovoljava nužni uvjet minimuma

$$d E(\Omega, u)[\varphi] = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \qquad \text{Gateux derivacija}$$

$$d E(\Omega, u)[\varphi] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi - f\varphi$$

(1.2) je $F(\Omega, \varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\varphi - u_0|^2 \, dx$ gdje je $\varphi = u_\Omega$

Ukratko za dani problem (1.1) i funkcional oblika (1.2)

$$\begin{cases} J(\Omega) = F(\Omega, u_\Omega) \\ u_\Omega \text{ je rješenje } \forall \varphi \in H^1(\Omega) \quad dE(\Omega, u_\Omega)[\varphi] = 0 \end{cases}$$

želimo izračunati derivaciju oblika $J'(\Omega; \theta)$.

7.4.2. Formulacija preko sedlaste točke

Ideja dolazi iz teorije upravljanja. Konceptualno Ω je ustvari varijabla upravljanja u tom kontekstu.

Definiramo Lagrangeovu funkciju kroz Lagrangeov množitelj

odnosno tzv. adjungiranog stanja p:

$$G(\Omega, u, p) = F(\Omega, u) + dE(\Omega, u)[p]$$

Istaknimo da je funkcional oblika u tom trenutku dan kao

$$J(\Omega) = \min_{u \in H^1(\Omega)} \sup_{p \in H^1(\Omega)} G(\Omega, u, p)$$

jer je

$$\sup_{p \in H^1(\Omega)} G(\Omega, u, p) = \begin{cases} F(\Omega, u_\Omega), & u = u_\Omega \\ +\infty, & u \neq u_\Omega \end{cases}$$

U našem primjeru $u \mapsto G(\Omega, u, p)$ je konveksan i neprekidan te $p \mapsto G(\Omega, u, p)$ konkavan i neprekidan te zbog činjenice da je $H^1(\Omega)$ konveksan i zatvoren znamo da G ima sedlastu točku ako i samo ako sedlasta točka (u, p) zadovoljava:

(adjungirana zadaća) $$dG(\Omega, u, p; 0, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)$$

1.1 $\Leftrightarrow$ $$dG(\Omega, u, p; \varphi, 0) = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Propozicija 1.6. u I. Ekeland R. Temam „Convex Analysis and Variational Problems" Chapter VI

One su u potpunosti ekvivalentne

$$u \in H^1(\Omega), \quad dE(\Omega, u, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

$$p \in H^1(\Omega), \quad dF(\Omega, u; \psi) + d^2E(\Omega, u; p; \psi) = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)$$

$$dF(\Omega, u; \psi) = \int_\Omega (u - u_0) \cdot \psi \, dx$$

$$dE(\Omega, u; \varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi - f\varphi$$

$$d^2E(\Omega, u; p; \psi) = \int_\Omega \nabla \psi \cdot \nabla p + \psi p$$

s obzirom na u!

Time dobivamo

$$-\Delta u + u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ na } \Gamma$$

$$\Updownarrow$$

$$u \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi - f\varphi = 0, \quad \varphi \in H^1(\Omega)$$

$$p \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \psi + p\psi = -\int_\Omega (u - u_0)\psi, \quad \psi \in H^1(\Omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$-\Delta p + p + u - u_0 = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ na } \Gamma$$

Istaknimo da je sedlasta točka jedinstvena (jer nuhe zadaće imaju jedinstveno rješenje).

7.4.3. Parametrizacija funkcijskog prostora

Pokazali smo da se funkcional oblika može prikazati kao min max od funkcionala G koji ima jedinstvenu sedlastu točku.

Označimo ki s $\Omega_t = \phi_{t\theta} = (\mathrm{Id} + t\theta)$, $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$

za t u okolini nule možemo zaključiti i za perturbirani domen $\Omega_t = \phi_{t\theta}(\Omega)$:

$$(1.3) \quad J(\Omega_t) = \min_{\varphi \in H^1(\Omega_t)} \sup_{\psi \in H^1(\Omega_t)} G(\Omega_t, \varphi, \psi)$$

da je sedlasta točka (u_t, p_t) koja je u potpunosti opisana

$$u_t \in H^1(\Omega_t), \quad dE(\Omega_t, u_t; \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_t)$$

$$p_t \in H^1(\Omega_t), \quad dF(\Omega_t, u_t; \psi) + d^2E(\Omega_t, u_t; p_t; \psi) = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_t)$$

Sljedeći korak je napraviti parametrizaciju

$$H^1(\Omega_t) = \{ \varphi \circ \phi_{t\theta}^{-1} : \varphi \in H^1(\Omega) \}$$

i napisati (1.3) kao

$$(1.4) \quad J(\Omega_t) = \min_{\varphi \in H^1(\Omega)} \sup_{\psi \in H^1(\Omega)} G(\Omega_t, \varphi \circ \phi_{t\theta}^{-1}, \psi \circ \phi_{t\theta}^{-1})$$

Tipičan korak za analizu osjetljivosti oblika. Istaknimo da se vrijednost sedlaste točke nije promijenila.

Definiramo novi Lagrangeov funkcional

$$\tilde{G}(t, \varphi, \psi) = G(\phi_{t\theta}(\Omega), \varphi \circ \phi_{t\theta}^{-1}, \psi \circ \phi_{t\theta}^{-1})$$

Cilj je pronaći limes

$$dg(0) = \lim \frac{g(t) - g(0)}{t} \qquad g'(0) = J'(\Omega; \theta).$$

gdje je $g(t) = J(\Omega_t) = \inf_{\varphi \in H^1(\Omega)} \sup_{\psi \in H^1(\Omega)} \tilde{G}(t, \varphi, \psi)$.

$$\tilde{G}(t,\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} |\varphi\circ\phi_{t\theta}^{-1} - u_0|^2 dx$$

$$+ \int_{\Omega_t} \nabla(\varphi\circ\phi_{t\theta}^{-1})\cdot\nabla(\psi\circ\phi_{t\theta}^{-1})$$

$$+ \int_{\Omega_t} (\varphi\circ\phi_{t\theta}^{-1} - f)(\psi\circ\phi_{t\theta}^{-1})\, dx$$

Vratimo sve na originalnu domenu Ω

$$\tilde{G}(t,\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\varphi - u_0\circ\phi_{t\theta}|^2 J_t\, dx$$

$$+ \int_{\Omega} A_t\nabla\varphi\cdot\nabla\psi + J_t\varphi\psi - f\circ\phi_{t\theta}\psi\, dx$$

gdje je $J_t = \det\nabla\phi_{t\theta}$

$$A_t = J_t\nabla\phi_{t\theta}^{-1}\nabla\phi_{t\theta}^{-T}.$$

Uočimo da je $d\tilde{G}(t,u_t,p_t;0,\psi) = 0$

$$\begin{cases} u^t\in H^1(\Omega) \text{ t.d.} \\ \int_\Omega A_t\nabla u_t\cdot\nabla\psi + J_t u_t\psi - f\circ\phi_{t\theta}\psi\, dx = 0 \end{cases}$$

$u_t = u^t\circ\phi_t^{-1}$, $u_t\in H^1(\Omega_t)$

$$d\tilde{G}(t,u_t,p_t;\varphi,0) = 0$$

$$\begin{cases} p^t\in H^1(\Omega) \text{ t.d.} \\ \int_\Omega A_t\nabla p_t\cdot\nabla\varphi + J_t p_t\varphi + (u_t - u_0\circ\phi_{t\theta})\varphi\, dx = 0 \end{cases}$$

$p_t = p^t\circ\phi_t^{-1}$, $p_t\in H^1(\Omega_t)$

$(u^t, p^t) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega))$ je sedlasta točka od $\tilde{G}$. u_t je rješenje pertubiranog zadaće stanja na $\phi_{t\theta}(\Omega)$ dok je p_t rješenje adjungirane zadaće stanja na $\phi_{t\theta}(\Omega)$.

Vidimo za t dovoljno mali da je skup sedlastih točaka jednočlan.

7.4.4. Diferencijabilnost sedlaste točke s obzirom na parametar

misli se na $t \in \mathbb{R}$ u $\phi_{t\theta} = Id + t\theta$

Neka je dan funkcional

$$G : [0, \tau] \times X \times Y \to \mathbb{R}$$

za neki $\tau > 0$, skupovi X, Y. Za svaki $t \in [0, \tau]$ definiramo skupove:

$$X(t) = \{ x^t \in X : \sup_{y \in Y} G(t, x^t, y) = \underbrace{\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(t, x, y)}^{g(t)} \}$$

$$Y(t) = \{ y^t \in Y : \inf_{x \in X} G(t, x, y^t) = \underbrace{\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(t, x, y)}_{h(t)} \}$$

Skup sedlastih točaka definiramo kao

$$S(t) = \{ (x, y) \in X \times Y : g(t) = G(t, x, y) = h(t) \}$$

Lema

Neka je $t \in [0, \tau]$ fiksan.

Tada za $\forall (x^t, y^t) \in X(t) \times Y(t)$ vrijedi $h(t) \leq G(t, x^t, y^t) \leq g(t)$

Ako je $h(t) = g(t)$

$$X(t) \times Y(t) = S(t).$$

Teorem (Correa - Seeger)

Neka su dani skupovi X, Y, $\tau > 0$ i funkcional

$$G : [0,\tau] \times X \times Y \to \mathbb{R}$$

Pretpostavite sljedeće:

(H1) $S(t) \neq \emptyset$, $0 \leq t \leq \tau$

(H2) Za svaki $(x,y) \in \left(\bigcup_{t \in [0,\tau]} X(t) \times Y(0) \right) \cup \left(X(0) \times \bigcup_{t \in [0,\tau]} Y(t) \right)$

parcijalna derivacija $\partial_t G(t,x,y)$ postoji na $[0,\tau]$.

(H3) postoji topologija $\mathcal{T}_X$ na X takva da za svaki niz $t_n \subset [0,\tau]$, $t_n \to 0$, postoji $x^0 \in X(0)$ postoji podniz (t_{n_k}) od (t_n) i $x_{n_k} \in X(t_{n_k})$ takav da

i) $x_{n_k} \to x^0$ u $\mathcal{T}_X$

ii) za svaki $y \in Y(0)$

$$\liminf_{\substack{t \searrow 0 \\ k \to \infty}} \partial_t G(t, x_{n_k}, y) \geq \partial_t G(0, x^0, y)$$

(H4) postoji topologija $\mathcal{T}_Y$ na Y takva da za svaki niz $t_n \in [0,\tau]$, $t_n \to 0$, postoji $y^0 \in Y(0)$, postoji podniz (t_{n_k}) od (t_n) i $y_{n_k} \in Y(t_{n_k})$ takav da

i) $y_{n_k} \to y^0$ u $\mathcal{T}_Y$

ii) za svaki $x \in X(0)$

$$\limsup_{\substack{t \searrow 0 \\ k \to \infty}} \partial_t G(t, x, y_{n_k}) \leq \partial_t G(0, x, y^0)$$

Tada postoji $(x^0, y^0) \in X(0) \times Y(0)$ takav da je $g'(0)$ jednak

$$\inf_{x \in X(0)} \sup_{y \in Y(0)} \partial_t G(0, x, y) = \partial_t G(0, x^0, y^0) = \sup_{y \in Y(0)} \inf_{x \in X} \partial_t G(0, x, y)$$

Dokaz:

Teorem 5.1. Delfour – Zolesio : „Shapes and Geometries – Analysis, differential calculus and optimization"

R. Correa A. Seeger Directional derivative of a minmax function Nonlinear Ana. 9, (1985), 13-27.