Istaknimo teorem koji ne dokazujemo, ali igra bitnu ulogu za kasnije rezultate.

Teorem 7.3.4. (zamjene varijabli)
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren skup, $\Theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ takva da je $\phi_\Theta := Id + \Theta : \Omega \to \phi_\Theta(\Omega)$ bijektivno preslikavanje i homeomorfizam.
Tada je $f \in L^p(\phi_\Theta(\Omega))$ ako i samo ako je

$f \in L^p(\Omega)$ i vrijedi

$$\int_{\phi_\Theta(\Omega)} f \, dx = \int_\Omega f \circ \phi_\Theta \, |\det \nabla \phi_\Theta| \, dx$$

$$\int_{\phi_\Theta(\Omega)} f \, |\det \nabla(\phi_\Theta^{-1})| \, dx = \int_\Omega f \circ \phi_\Theta$$

Tipično je pretpostaviti da je gornje preslikavanje ϕ_Θ difeomorfizam, ali rezultat vrijedi i ako je ϕ_Θ homeomorfizam i Lipschitzovo preslikavanje. Još općeniti rezultat možete pročitati u

Hajlasz, Piotr, Change of variables formula under minimal assumptions, Colloquium Mathematicae Vol 64, No. 1. 1993.

Propozicija 7.3.5. (derivacija funkcije $\Theta \mapsto f \circ (Id+\Theta)$)
Neka je $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1,+\infty\rangle$.
Preslikavanje $\Theta \mapsto f \circ (Id+\Theta) : K(0;\delta) \subseteq W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ je diferencijabilno u 0 i vrijedi

$$D_\Theta (f \circ (Id+\Theta))(0)[\psi] = \nabla f \cdot \psi \quad \text{za } \psi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$$

$K(0,\delta)$ ... kugla radijusa δ s $\|\cdot\|_{1,\infty}$.

Dokaz: Poopćenje rezultata iz HP Lemma 5.2.6

Neka je $\theta \in W^{1,\infty}$ t.d. $\|\theta\|_{1,\infty} < 1$. Tada je

$\phi_\theta = Id + \theta$ Lipschitz preslikavanje i homeomorfizam.

Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Raspišimo izraz:

$$f \circ \phi_\theta - f = (f - \varphi) \circ \phi_\theta - (f - \varphi) + (\varphi \circ \phi_\theta - \varphi)$$

$$\|(f-\varphi) \circ \phi_\theta\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f-\varphi|^p \circ \phi_\theta = \int_{\mathbb{R}^d} |f-\varphi|^p \det \nabla(\phi_\theta^{-1})$$

$$\leq \|\det(I + \nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty} \|f - \varphi\|_{L^p}^p$$

Jer je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\varphi \circ (Id + \theta)(x) - \varphi(x) = \int_0^1 \nabla\varphi \circ (Id + t\theta)(x) \cdot \theta(x)\, dt$$

$$\Rightarrow \|\varphi \circ \phi_\theta - \varphi\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^1 \nabla\varphi \circ \phi_{t\theta}(x) \cdot \theta(x)\, dt \right|^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla\varphi \circ \phi_{t\theta}(x) \cdot \theta(x)|^p\, dt\, dx$$

$$\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p \circ \phi_{t\theta}\, |\theta|^p\, dx\, dt$$

$$= \|\theta\|_{L^\infty}^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p \circ \phi_{t\theta}\, dx\, dt$$

$$= \|\theta\|_{L^\infty}^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi|^p \det \nabla(\phi_{t\theta})^{-1} \, dx \, dt$$

$$\leq \|\theta\|_{L^\infty}^p \sup_{t\in[0,1]} \|\det(I + t\nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty} \|\nabla\varphi\|_{L^p}^p$$

Time je

$$\|f\circ\phi_\theta - f\|_{L^p} \leq \left(\|\det(I+\nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p}} + 1\right) \|f-\varphi\|_{L^p}$$

(**)

$$+ \|\theta\|_{L^\infty} \left(\sup_{t\in[0,1]} \|\det(I + t\nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty}\right)^{\frac{1}{p}} \|\nabla\varphi\|_{L^p}$$

Jer je $\theta \mapsto \|\det(I+\nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty}$ neprekidno na okolini 0 i zbog toga što φ može biti proizvoljno blizu f u L^p normi, standardnim ε-δ argumentom možemo pokazati neprekidnost.

Neka je $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Tada

$$f\circ\phi_\theta(x) - f(x) - \nabla f(x)\cdot\theta(x) = \int_0^1 (\nabla f\circ\phi_{t\theta} - \nabla f)(x)\cdot\theta(x)\, dt$$

$$\Rightarrow \|f\circ\phi_\theta - f - \nabla f\cdot\theta\|_{L^p} \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f\circ\phi_{t\theta} - \nabla f\|_{L^p} \underbrace{\|\theta\|_{L^\infty}}_{\leq \|\theta\|_{1,\infty}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\theta\|_{1,\infty}} \|f\circ\phi_\theta - f - \nabla f\cdot\theta\|_{L^p} \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f\circ\phi_{t\theta} - \nabla f\|_{L^p}$$

Desnu stranu možemo ocijeniti kao u (**) čime slijedi zaključak

$\blacksquare$

7.4. Analiza osjetljivosti oblika

U numerici pokazuje se korisnim poznavanje ponašanja funkcionala oblika pri malim promjenama oblika.
Konkretno, od interesa je izračunati derivaciju oblika

Def.
Neka je dan funkcional oblika $J : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$.
Kažemo da je funkcional oblika diferencijabilan u smislu oblika ako je preslikavanje

$$\theta \longmapsto J((Id+\theta)\Omega) : K(0,\delta) \subseteq W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$$

Fréchet diferencijabilno. Tada F-derivaciju u nuli u smjeru θ nazivamo derivacijom oblika funkcionala J u Ω u smjeru θ i označavamo $J'(\Omega;\theta)$.

$$J(\phi_\theta(\Omega)) = J(\Omega) + J'(\Omega;\theta) + o(\theta)$$

Nap
Dosta često se traži samo da limes

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{J((Id+t\theta)\Omega) - J(\Omega)}{t} =: J'(\Omega;\theta)$$

postoji i da je preslikavanje $\psi \mapsto J'(\Omega;\psi)$ linearno i neprekidno.

Primjer (volumen)

$$vol(\Omega) = \int_\Omega dx$$

$$vol(\phi_\theta(\Omega)) = \int_{\phi_\theta(\Omega)} dx = \int_\Omega \det \nabla\phi_\theta \, dx$$

$$= \int_\Omega \det(I + \nabla\theta)\, dx$$

Prop 7.3.2

$$= \int_\Omega 1 + \operatorname{div}(\theta) + o(\theta)\, dx$$

$$= \operatorname{vol}(\Omega) + \int_\Omega \operatorname{div}(\theta) + o(\theta).$$

$$\Rightarrow \operatorname{vol}'(\Omega;\theta) = \int_\Omega \operatorname{div}\theta\, dx \quad //$$

Primjer (perimetar)

$$P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} ds$$

v. HP Prop. 5.4.2.

$$P(\phi_\theta(\Omega)) = \int_{\phi_\theta(\partial\Omega)} 1\, ds = \int_{\partial\Omega} |\nabla\phi_\theta^{-T} n|\,|\det\nabla\phi_\theta|\, ds$$

može se pokazati da je (v. HP Lemma 5.4.15)

$$= \int_{\partial\Omega} ds + \int_{\partial\Omega} \operatorname{div}_\Gamma\theta + o(\theta)$$

gdje $\operatorname{div}_\Gamma\theta = \operatorname{div}\theta - \nabla\theta n \cdot n$ je tangencijalna divergencija,

7.4.1. Problem osjetljivosti rubne zadaće

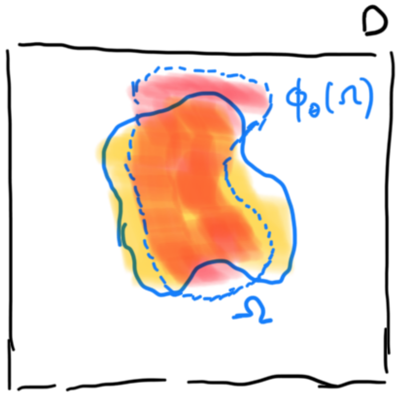
Neka je dana rubna zadaća na $\Omega \Subset D$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ograničen skup

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\nabla u) = f & u \ \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

za dani $f \in L^2(D)$. Funkcional oblika za gornju rubnu zadaću je

$$J(\Omega) = \int_\Omega f u$$

Zanima nas diferencijabilnost funkcionala J.
Uočimo da funkcional J ovisi o Ω kroz područje integracije, ali i kroz rješenje rubne zadaće u.



Na $\phi_\theta(\Omega)$ zadaća glasi

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\nabla u_\theta) = f & u \ \phi_\theta(\Omega) \\ u_\theta = 0 & \text{na } \partial\phi_\theta(\Omega) \end{cases}$$

Dogovorno $u_0 = u$.

Slaba formulacija glasi
$$\begin{cases} \text{pronaći } u_\theta \in H^1_0(\phi_\theta(\Omega)) \\ \displaystyle\int_{\phi_\theta(\Omega)} \nabla u_\theta \cdot \nabla \varphi = \int_{\phi_\theta(\Omega)} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H^1_0(\phi_\theta(\Omega)) \end{cases}$$

$$J(\phi_\theta(\Omega)) = \int_{\phi_\theta(\Omega)} f u_\theta \quad \left(\text{pazite nije } \int_{\phi_\theta(\Omega)} f u\right)$$

$$= \int_\Omega \underbrace{f \circ \phi_\theta}_{\text{poznato}} \; \underbrace{u_\theta \circ \phi_\theta}_{\text{treba odrediti}} \; \underbrace{\det \nabla \phi_\theta}_{\text{poznato}}$$

Od interesa je odrediti F-derivaciju od preslikavanja $\theta \mapsto u_\theta \circ \phi_\theta$ u nuli.

Fréchetovu derivaciju u 0 u smjeru φ standardno označavamo

$$D_\theta (u_\theta \circ \phi_\theta)(0)[\varphi] = \dot{u}(\varphi).$$

Zapišimo perturbiranu zadaću na domeni Ω

$$\int_\Omega \nabla u_\theta \circ \phi_\theta \cdot \nabla \varphi \circ \phi_\theta \det(\nabla \phi_\theta) = \int_\Omega f \circ \phi_\theta \, \varphi \circ \phi_\theta \det(\nabla \phi_\theta).$$

Koristeći Propozicija 7.3.2.

$$\nabla u_\theta \circ \phi_\theta = \nabla \phi_\theta^{-\tau} \nabla (u_\theta \circ \phi_\theta)$$

dobivamo

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla \phi_\theta^{-\tau} \nabla (u_\theta \circ \phi_\theta) \cdot \nabla \phi_\theta^{-\tau} \nabla (\varphi \circ \phi_\theta) \det(\nabla \phi_\theta) = \\ \quad = \int_\Omega f \circ \phi_\theta \, \varphi \circ \phi_\theta \det(\nabla \phi_\theta), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\phi_\theta(\Omega)). \end{cases}$$

Umjesto φ možemo koristiti i $\tilde{\varphi} \circ \phi_\theta^{-1}$, $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$

$$\tilde{\varphi} \circ \phi_\theta^{-1} \in H_0^1(\phi_\theta(\Omega))$$

čime varijacijska formulacija glasi

$$(SF_p) \qquad \int_\Omega \nabla\phi_\theta^{-1} \nabla\phi_\theta^{-T} \nabla(u_\theta \circ \phi_\theta) \cdot \nabla\varphi \det(\nabla\phi_\theta) = \int_\Omega f \circ \phi_\theta \, \varphi \det(\nabla\phi_\theta), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{maknuo } \tilde{\varphi})$$

Koristeći teorem o implicitnoj funkciji pokazat ćemo da je preslikavanje $\theta \mapsto u_\theta \circ \phi_\theta$ F-diferencijabilno što predstavlja bitan međukorak u egzistenciji derivacije oblika od J.

Teorem o implicitnoj funkciji (Banachovi prostori)

Neka je zadano preslikavanje $F : U_1 \times U_2 \subset T \times X \to Y$, gdje su T, X, Y Banachovi prostori, a U_1, U_2 otvoreni skupovi u T, X respektivno.

Pretpostavimo da je $F \in C^1(U_1 \times U_2, Y)$, $F(\theta^*, v^*) = 0$ i $D_v(F(\theta^*, v^*))$ (F-derivacija s obzirom na drugu varijablu) regularan operator s ograničenim inverzom.

Tada postoje okoline $\begin{cases} \Theta \subset U_1, & \theta^* \in \Theta \\ V \subset U_2, & v^* \in V \end{cases}$

preslikavanje $G \in C^1(\Theta, X)$ koje zadovoljava:

- $F(\theta, G(\theta)) = 0$ za svaki $\theta \in \Theta$
- $G(\theta^*) = v^*$
- $DG(\theta) = -\left[D_v F(\theta, G(\theta))\right]^{-1} \circ D_\theta F(\theta, G(\theta))$

Dokaz: vidi A. Ambrosetti, G. Prodi A primer of Nonlinear Analysis
Theorem 2.3. 38 str. ∎

Uvedimo notaciju

$$J_\theta = \det \nabla \phi_\theta = \det(I + \nabla\theta)$$

$$A_\theta = J_\theta \nabla\phi_\theta^{-1} \nabla\phi_\theta^{-\tau} = \det(I+\nabla\theta)(I+\nabla\theta)^{-1}(I+\nabla\theta)^{-\tau}$$

Koristeći Prop 7.3.2 a) b) i Leibnizovo svojstvo Fréchet diferencijabilnosti možemo pokazati da je

$$J_\theta = 1 + \operatorname{div}\theta + o(\theta)$$

$$A_\theta = I + (\operatorname{div}(\theta) I - \nabla\theta - \nabla\theta^\tau) + o(\theta)$$

Definiramo operator

$$F : K(0,\delta) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

$${}_{H^{-1}}\langle F(\theta, v), \varphi \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega A_\theta \nabla v \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega f \circ \phi_\theta J_\theta \varphi$$

Uočimo da je $F(\theta, u_\theta \circ \phi_\theta) = 0$ (u $H^{-1}(\Omega)$) za dovoljno mali θ, tj. radi se upravo o varijacijskoj formulaciji perturbirane zadaće (SF$_p$).

$$\langle D_v F(0, v)[\tilde{v}], \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla\tilde{v} \cdot \nabla\varphi$$

dakle $DF_v(0,v) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}$ je regularan linearni operator (Poincaré + Lax-Milgram).

$$\langle D_\theta F(0,v)[\psi], \varphi \rangle = \int_\Omega (\operatorname{div}(\theta) I - \nabla\theta - \nabla\theta^\tau) \nabla v \cdot \nabla\varphi$$

$$- \int_\Omega (\nabla f \cdot \theta + f \operatorname{div}\theta)\varphi$$

Istaknimo da je $F \in C^1(K(0,\delta) \times H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ makar eksplicitna formula F-derivacije za $\theta \neq 0$ nije od interesa.

Koristeći tm. o implicitnoj funkciji zaključujemo da postoji $\theta \mapsto v(\theta)$ t.d. $F(\theta, v(\theta)) = 0$

S obzirom da preslikavanje $u_\theta \circ \phi_\theta$ zadovoljava istu jednakost time smo pokazali da je $\theta \mapsto u_\theta \circ \phi_\theta$ F-diferencijabilno i da je

$$\dot{u}(\cdot) = D_\theta(u_\theta \circ \phi_\theta)(0)[\theta] \equiv -[D_v F(0,u)]^{-1} \circ D_\theta(F(0,u))[\cdot]$$

$$\Leftrightarrow \quad D_v F(0,u)[\dot{u}(\theta)] = -D_\theta(F(0,u))[\theta] \quad u \ H^{-1}(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle D_v F(0,u)[\dot{u}(\theta)], \varphi \rangle = -\langle D_\theta(F(0,u))[\theta], \varphi \rangle, \ \forall \varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_\Omega \nabla \dot{u}(\theta) \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega (\nabla \theta + \nabla \theta^T - \mathrm{div}(\theta) I) \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega \mathrm{div}(f\theta)\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Teorem (materijalna derivacija)
Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren, ograničen skup te $f \in H^1(\Omega)$. Tada je preslikavanje $\theta \mapsto u_\theta \circ \phi_\theta : K(0,\delta) \to H_0^1(\Omega)$ F-diferencijabilno i materijalna derivacija $\dot{u}(\theta) \in H_0^1(\Omega)$ zadovoljava

(MD) $$\int_\Omega \nabla \dot{u}(\theta) \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega (\nabla \theta + \nabla \theta^T - \mathrm{div}(\theta) I) \nabla u \cdot \nabla \varphi + \mathrm{div}(f\theta)\varphi$$

∎

Vratimo se na funkcional $J(\Omega) = \int_\Omega f u$.

$$J(\phi_\theta(\Omega)) = \int_{\phi_\theta(\Omega)} f u_\theta = \int_\Omega f\circ\phi_\theta \, u_\theta \circ \phi_\theta \, J_\theta$$

$$= \int_\Omega (f + \nabla f \cdot \theta + o(\theta))\left(u + \dot{u}(\theta) + o(\theta)\right)\left(1 + \operatorname{div}\theta + o(\theta)\right)$$

$$= \int_\Omega f u + \int_\Omega \nabla f \cdot \theta u + f \dot{u}(\theta) + f u \operatorname{div}\theta + o(\theta)$$

$\Rightarrow$

$$J'(\Omega;\theta) = \int_\Omega \operatorname{div}(f\theta) u + f \dot{u}(\theta)$$

(MD) $\varphi = \dot{u}(\theta)$

$$= \int_\Omega \operatorname{div}(f\theta) u + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \dot{u}(\theta)$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div}(f\theta) u + \int_\Omega (-\operatorname{div}\theta \, I + \nabla\theta + \nabla\theta^T)\nabla u \cdot \nabla u + \int_\Omega \operatorname{div}(f\theta) u$$

$$= \int_\Omega 2 \operatorname{div}(f\theta) u + (-\operatorname{div}\theta \, I + \nabla\theta + \nabla\theta^T)\nabla u \cdot \nabla u$$

Napomena

Gornji trik prolazi jer je pozadinska PDJ linearna i funkcional energije $\int_\Omega f u$. Ako pričamo o nelinearnim problemima s praktičnim funkcionalima tipa $\int_\Omega |u - u_0|^2$ potrebno je koristiti Lagrangeovu funkciju i koristiti različiti tehnike za pronalazak derivacije oblika.