7. Uvod u optimizaciju oblika

Optimizacija oblika bavi se problemom određivanja optimalne geometrije domene - oblika (eng. shape) u kojoj se odvija određeni fizikalni proces.

Cilj je obično minimizirati funkcional koji ovisi o rješenju parcijalne diferencijalne jednadžbe postavljenoj na toj domeni.
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Opći problem glasi

$$\min_{\Omega \in \mathcal{O}} J(\Omega)$$

gdje je $\mathcal{O}$ skup dopustivih domena, a funkcional $J(\Omega)$ (eng. shape functional) obično ovisi o rješenje PDJ na Ω (ili $D \setminus \Omega$, gdje je D univerzalni skup t.d. $\Omega \subseteq D, \forall \Omega \in \mathcal{O}$)

Funkcional u primjenama glasi

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} j(x, u_\Omega(x))\, dx + \int_{\partial\Omega} k(x, u_\Omega(x))\, dx$$

gdje je u_Ω rješenje PDJ (ustvari rubnog problema) na Ω, a j, k su Carathéodoryeve funkcije.

Istaknimo da je sama domena varijabla optimizacije što izuzetno otežava teorijski i numerički pristup (nepostojanje strukture vektorskog prostora u familiji dopustivih domena $\mathcal{O}$).

Od interesa:
- postojanje rješenja
- identificiranje nužnih uvjeta optimalnosti
- efikasno računanje optimalnog oblika.

7.1. Neki akademski primjeri

7.1.1. Izoperimetrijski problem (PDE FREE)

Klasičan problem kraljice Dido (v. HP 3. str.)

Pretpostavimo da imate ogradu zadane duljine i želite pronaći oblik najvećeg polja koje se može ograditi tom ogradom.
Stari grci su naslućivali da je rješenje tog izoperimetrijskog problema krug. Preciznije da vrijedi nejednakost

$$\underbrace{|\Omega|}_{\text{površina od } \Omega} \leq \frac{1}{4\pi} \underbrace{|P(\Omega)|}_{\text{opseg (perimetar) od } \Omega.}^2$$

jednakost se postiže na krugu

Dokaz tvrdnje:
- Zenodorus 2. B.C. nejednakost vrijedi za poligone
- Jakob Steiner ponudio je dokaz uz dodatne pretpostavke.
- Constantin Carathéodory je dokazao tvrdnju u potpunosti.

Problem možemo zapisati uz zamijenjene uloge površine i perimetra

(7.1) $\min \{ P(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, \text{ izmjeriv}, |\Omega| = S_0 \}$

Rješenje je opet krug.

7.1.2. Optimalni dizajn „zamrznute zone"

Neka je dan ograničen skup D i $f \in L^2(D)$. Cilj je riješiti minimizacijski problem:

(7.2) $\min \{ J(u_\Omega) : -\Delta u_\Omega = f \text{ u } \Omega, \; u_\Omega \in H^1_0(\Omega) \}$

gdje je $J(u_\Omega) := \int_D | u^f_\Omega - u_0|^2 dx$ za dani $u_0 \in L^2(D)$.

$$u^f_\Omega(x) := \begin{cases} u_\Omega(x) & : x \in \Omega \\ 0 & : x \in D \setminus \Omega \end{cases}$$

Interpretacija modela:

D ... prostorija koja se grije pod izvorom topline f
$D \setminus \Omega$ ... dio prostorije ispunjen ledom.

Cilj je odrediti oblik „zamrznute zone" na takav način kako bi se najbolje aproksimirala temperatura u_0.

7.1.3. Optimizacija oblika u teoriji elastičnosti

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, Γ_D ... fiksni dio ruba (homogeni Dirichletov r. u.)
Γ_N ... fiksni dio ruba s površinskom silom
$\Gamma = \partial\Omega \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N)$ ... pomični dio granice

Jednadžba elastičnosti glase:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A e(u)) &= 0 \quad \text{u } \Omega, \qquad e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_D \\ A e(u) n &= g \quad \text{na } \Gamma_N \\ A e(u) n &= 0 \quad \text{na } \Gamma \end{aligned}$$

A ... izotropični tenzor elastičnosti (Hookov zakon)

$$A = \lambda (\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2) + 2\mu \mathbb{I}_4 , \quad \lambda, \mu \text{ Lamé parametri}$$

$\mathbb{I}_4$ tenzor 4. reda identitete
$\mathbb{I}_2$ jedinična matrica.

$$J(\Omega) = \int_\Omega A e(u_\Omega) : e(u_\Omega)\, dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot u_\Omega \, ds \rightarrow \min$$

uz dodatne uvjete na $|\Omega|$ ili $P(\Omega)$.

7.1.4. Optimizacija oblika u mehanici fluida (stacionarni)

Inkompresibilni fluid nalazi se u domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$:

- tok u_{in} na Γ_{in} ulazu je poznat
- tlak p_{out} postavljen je na izlazu Γ_{out}
- ostatak ruba pretpostavljamo no-slip $u=0$
  na slobodnoj granici $\partial\Omega \setminus (\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out})$

Pripadni Stokesov fluid glasi:

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(D(u)) + \nabla p &= f && \text{u } \Omega, \qquad D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u) \\
\operatorname{div}(u) &= 0 && \text{u } \Omega \\
u &= u_{in} && \text{na } \Gamma_{in} \\
u &= 0 && \text{na } \Gamma \\
\sigma(u)n &= -p_{out} && \text{na } \Gamma_{out}
\end{aligned}$$

$$J(\Omega) = \int_\Omega D(u) : D(u) \to \min$$

uz uvjet na $|\Omega|$ ili $P(\Omega)$.

7.2. Problem egzistencije rješenja

Uz iznimku problema perimetra, naglasimo da problemi optimizacije najčešće nemaju rješenja.

Princip maksimuma (HP Prop 3.1.22.)

Neka je $\Omega \subset D$. Označimo s u_Ω^f rješenje rubnog problema:

$$(*) \quad \begin{cases} u_\Omega^f \in H_0^1(\Omega) \text{ t.d.} \\ \int_\Omega \nabla u_\Omega^f \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

1) Preslikavanje $f \in H^{-1}(D) \mapsto u_\Omega^f$ je rastuća f-ja

$$f_1 \leq f_2 \quad \Rightarrow \quad u_\Omega^{f_1} \leq u_\Omega^{f_2}$$

2) Ako je $f \geq 0$ vrijedi

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \quad \Rightarrow \quad u_{\Omega_1}^f \leq u_{\Omega_2}^f$$

Dokaz:

1) Zbog linearnosti dovoljno je pokazati ako je $f \leq 0$ to povlači da je $u_\Omega^f \leq 0$.

U (*) stavimo $\varphi(x) = u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$.

$u^+ \in H_0^1(\Omega)$ (v. HP Cor. 3.1.12.)

Time je $\displaystyle |\nabla u^+|_{L^2}^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u^+ = \int_\Omega \underbrace{f\, u^+}_{\leq 0} \leq 0$

te zaključujemo da je $u^+ = 0$.

2) Neka je $f \geq 0$, $u_1 := u_{\Omega_1}^f$, $u_2 := u_{\Omega_2}^f$.

Tada je za $\varphi \in H_0^1(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega_2)$

$$\left.\begin{aligned} \int_{\Omega_1 = D} \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi &= \int_{\Omega_1} f\, \varphi \\ \int_{\Omega_2 = D} \nabla u_2 \cdot \nabla \varphi &= \int_{\Omega_2 = \Omega_1} f\, \varphi \end{aligned}\right\} - \quad \Rightarrow \quad \int_D \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla \varphi = 0$$

Prema tvrdnji 1) za $f \geq 0$ $u_2 \geq 0$ pa je

$$(u_1 - u_2)^+ \leq u_1^+ \quad \text{te} \quad (u_1 - u_2)^+ \text{ pripada } H_0^1(\Omega_1) \quad (\text{HP Cor. } 3.1.14)$$

Stavljanjem $\varphi = (u_1 - u_2)^+$ zaključujemo $\varphi = 0$ tj. $u_1 \leq u_2$

∎

Pogledajmo problem 7.1.2. „zamrznute zone"

$$\min_{\Omega \subset D} \left\{ \int_D |u_\Omega^f - u_0| : -\Delta u_\Omega^f = f, \quad u_\Omega^f \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

Stavimo radi jednostavnosti $u_0 \equiv c$, $c > 0$, $f \equiv 1$, $D = K(0;1) \subseteq \mathbb{R}^2$

Pokažimo da tada gornji problem nema regularno rješenje za svaki $c > 0$.

Ω je regularna ako je Lipschitzova domena (otvoren skup + Lip. rub)

Po principu maksimuma

$$0 \leq u_\Omega^1 \leq u_D^1 = \frac{1 - r^2}{4} \leq \frac{1}{4}$$

Ako je $c \geq \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $u_\Omega^1 - c \leq u_D^1 - c \leq 0$ pa je

$$J(\Omega) = \int_D (u_\Omega^1 - c)^2 dx \geq \int_D (u_D^1 - c)^2 dx = J(D)$$

čime je $\Omega = D$ optimalno rješenje.

Interpretacija: ako je ciljna temperatura dovoljno velika nema smisla hladiti.

Neka je $c \in \langle 0, \frac{1}{8} \rangle$.

U tom slučaju za $K_R = K(0; R)$, $R < 1$ rješenje je

$$u = \frac{R^2 - r^2}{4} \quad \text{za } r < R. \quad \text{(provjeri)}$$

$$J(K_R) = 2\pi \int_0^R \left(\frac{R^2 - r^2}{4} - c \right)^2 r\,dr + 2\pi \int_0^1 (0 - c)^2 r\,dr$$

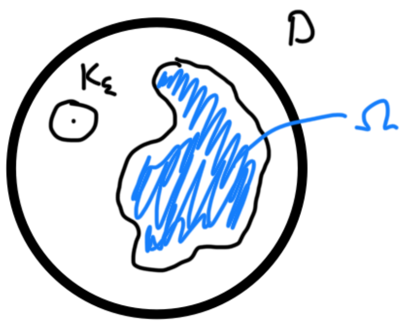
$$= \dots = \frac{\pi}{48} \left(R^6 - 12 c R^4 + 48 c^2 \right)$$

Time je $J(K_R) < J(D)$ za $R = \sqrt{8c} < 1$.

Ukratko, D nije optimalno za $c \in \langle 0, \frac{1}{8} \rangle$.

Pokažimo da ne postoji minimum zadaće gdje je $\Omega \subseteq D$ Lipschitzova domena.

Pretpostavimo suprotno da postoji $\Omega \subset D$ u kojem se postiže minimum. Zbog svojstva Lip. domena znamo da je $|\Omega| = |\bar{\Omega}| < |D|$ i da postoji $K_\varepsilon \subset D \setminus \bar{\Omega}$ kugla radijusa ε.



Izračunajmo vrijednost funkcionala za $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup K_\varepsilon$.

$$J(\Omega_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} (u_{\Omega_\varepsilon} - c)^2 \, dx + \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} c^2 \, dx$$

$$= \int_{\Omega} (u_\Omega - c)^2 \, dx + \int_{K_\varepsilon} (u_{K_\varepsilon} - c)^2 \, dx + \int_{D \setminus \Omega} c^2 \, dx - \int_{K_\varepsilon} c^2 \, dx$$

$$= J(\Omega) + \int_{K_\varepsilon} (u_{K_\varepsilon} - c)^2 - c^2 \, dx$$

Ako je ε dovoljno mali tada $0 < u_{K_\varepsilon} < c$ i $(u_{K_\varepsilon} - c)^2 < c^2$ slijedi da Ω nije optimalni.

Minimum ne postoji uz pretpostavku da je Ω samo izmjeriv. Vidi

D. Bucur, G. Buttazzo, Variational Methods in Shape Optimization Problems

ili HP 7. poglavlje.

Istaknimo kako i problem 7.1.3, također ne postiže minimum, kao i mnogi drugi problemi iz primjene.

Konceptualno, postoje dva različita pristupa rješavanja gornjih problema:

1) proširivanje familije dopustivih skupova na one koje nisu regularne - metoda homogenizacije
2) sužavanje familije dopustivih skupova dodavanja uvjeta na duljinu perimetra recimo.

7.3. Diferenciranje s obzirom na domene

7.3.1. Integrali na varijabilnim domenama

Neka je $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ Sobolevljev prostor $L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ čije parcijalne derivacije (u smislu distribucija) su opet iz $L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$.

Dani prostor može se identificirati s vektorskim prostorom ograničenih i Lipschitz neprekidnih preslikavanja iz $\mathbb{R}^d$ u $\mathbb{R}^d$. Preciznije, svaka funkcija iz $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ ima neprekidnu reprezentaciju koja je ograničena i Lipschitz neprekidna f-ja.

Označimo s $Id:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, $Id(x)=x$, I ... matrica identitete.

Lema 7.3.1

Neka je $M\in M_d(\mathbb{R})$. Vrijedi:

a) Ako je $\|M\|<1$, tada je funkcija

$$M\mapsto (I-M)^{-1} \text{ diferencijabilna na okolini nule}$$

te vrijedi

$$D_M\left((I-M)^{-1}\right)(0)[N]=N$$

b) Neka je M regularna matrica. Funkcija $M\mapsto \det M$ je diferencijabilna na okolini od M te vrijedi

$$D_M\left(\det(M)\right)(M)[N]=\det M\, tr(M^{-1}N)$$

Dokaz:

a) $f(M):=(I-M)^{-1}$, $h\in\mathbb{R}$

$$f(M+hN)-f(M)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left\{(M+hN)^k-M^k\right\}$$

$$=hN+o(h),\qquad \frac{o(h)}{h}\xrightarrow{h\to 0}0$$

b) Odaberimo $N \in M_d(\mathbb{R})$. Neka je h dovoljno mali takav da je $M+hN$ opet regularna matrica.

$$\det(M+hN) = \det\left(M\left(I + hM^{-1}N\right)\right)$$
$$= \det M \, \det(I + hM^{-1}N)$$

Direktno iz definicije $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i\sigma(i)}$

zaključujemo da je
$$\det(I+hA) = 1 + h\,\mathrm{tr}(A) + o(h).$$

Time je
$$\det(M+hN) = \det M\left(1 + h\,\mathrm{tr}(M^{-1}N) + o(h)\right)$$
$$= \det M + h \det M \,\mathrm{tr}(M^{-1}N) + o(h)$$

$\blacksquare$

Propozicija 7.3.2

a) Preslikavanje $\theta \mapsto \det(I+\nabla\theta)$ je diferencijabilno u točki $\theta = 0$ iz $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ u $L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$

$$D_\theta\left(\det(I+\nabla\theta)\right)(0)(\psi) = \operatorname{div}\psi$$

b) Preslikavanje $\theta \mapsto (I+\nabla\theta)^{-1}$ je diferencijabilno u točki $\theta = 0$ iz $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ u $L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$

$$D_\theta\left((I+\nabla\theta)^{-1}\right)(0)[\psi] = -\psi$$

c) Neka je $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1,+\infty)$

Tada je $\operatorname{grad} f \circ (Id+\theta) = (I+\nabla\theta)^{-T} \operatorname{grad}(f \circ (Id+\theta))$ za θ mali po normi.

Dokaz:

$M \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$. Definiramo normu

$$|M|_\infty = \operatorname*{sup\,ess}_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{i,j=1}^{d} M_{ij}(x)$$

Tražena norma je submultiplikativna, konkretno za $A, B \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$

$$|AB|_\infty \leq |A|_\infty |B|_\infty$$

a) Iz dokaza Leme 7.3.1 možemo zaključiti da je ostatak

$$X(\theta) = \det(I + \nabla\theta) - \det I - \operatorname{div}\theta = \det I \operatorname{tr}(I^{-1}\nabla\theta)$$

konačna suma sastavljena od barem dva umnoška $\frac{\partial \theta}{\partial x_j}$

Zbog toga je $\|X(\theta)\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla\theta\|^2_{L^\infty}$

čime je pokazana tvrdnja.

b)

$$X(\theta) = (I + \nabla\theta)^{-1} - I - \nabla\theta = \sum_{i=2}^{+\infty} (-\nabla\theta)^i \Big/ \|\cdot\|_{L^\infty}$$

$$\Rightarrow \|X(\theta)\|_{L^\infty} \leq \sum_{i=2}^{+\infty} \|\nabla\theta\|^i \leq C\|\nabla\theta\|^2_{L^\infty}$$

c) Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. S obzirom da je θ Lipschitzova f-ja

$\varphi \circ (Id + \theta)$ je diferencijabilna s.s.

$$D(\varphi \circ (Id + \theta)) = D\varphi \circ (Id + \theta)(I + \nabla\theta) \Big/^{\tau}$$

$$\operatorname{grad}(\varphi \circ (Id + \theta)) = (I + \nabla\theta)^\tau \operatorname{grad}\varphi \circ (Id + \theta)$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi \circ (Id + \theta) = (I + \nabla\theta)^{-\tau} \operatorname{grad}(\varphi \circ (Id + \theta))$$

Ostatak dokaza slijedi iz gustoće $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ u $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ i generalizirani tm. o zamjeni varijabli.