Zadaci za vježbu - PDJ 2

1. Odredite derivacije (u smislu distribucija) sljedećih funkcija:

   a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin(x), & x\geq 0 \end{cases}$,

   b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \cos(x), & x\geq 0 \end{cases}$ m

   c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \sin(x), & x\in[0,\pi] \\ x^2 & x\geq \pi \end{cases}$,

   d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $\qquad f(x)=e^{ix}$,

   e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $\qquad f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ e^{ix}, & x\geq 0 \end{cases}$,

   f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=|\sin(x)|$.

2. Odredite koji su objekti distribucije (na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) i argumentirajte zašto:

   a) $T=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta_{na}, \quad a>0,$

   b) $T=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\delta_{\frac{1}{n}},$

   c) $T=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\delta_n,$

   d) $T=\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}.$

3. Odredite sve derivacije u smislu distribucija od $f(x)=|x|$.

4. Odredite funkciju kojoj je distribucija iz $2.a)$ derivacija.

5. Konstruirajte distribucije fiksnog reda $m\in\mathbb{N}_0$ te beskonačnog reda na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

6. Pokažite da vrijede sljedeće relacije (u smislu distribucija na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$):

   a) $\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)H_0(x)e^{\lambda x}=\delta_0,$

   b) $\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{H_0(x)x^{m-1}}{(m-1)!}\right)=\delta_0,$

   c) $\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)\frac{H_0(x)\sin(\omega x)}{\omega}=\delta_0.$

   H_0 je heavisideova funkcija.

7. Neka je dan simpleks T točkama $(0,0),(0,1)$ i $(1,0)$. Odredite derivacije (u smislu distribucija) $\frac{d}{dx}\chi_T$ i $\frac{d}{dy}\chi_T$.

8. Pokažite sljedeće:

   (a) $\cos(nx)\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\rightharpoonup}0$ kada $n\to\infty$,

   (b) $\frac{1}{n}\chi_{K[0,1/n]}\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\rightharpoonup}\delta_0$ kada $n\to\infty$.

9. Odredite Fourierovu pretvorbu $\hat{f}$ od

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ako je } |x| < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

10. a) Izračunajte Fourierovu pretvorbu funkcije (direktno preko definicije):

$$\chi_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}$$

b) Pokažite da $\frac{\sin(nx)}{x} \to \pi\delta_0$ u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Povlači li to konvergenciju u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

11. Dokažite:

Ako je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ radijalna, tada je i Fourierova transformacija $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ radijalna funkcija.

12. Riješite početnu zadaću:

$$\begin{cases} u_t - ic\Delta u = 0 & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

gdje je $g(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - ix_2^2}$ te $c > 0$.

Pripada li $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$?

13. Neka je dana funkcija $f(x) = |x|^\alpha$, $f : K(0,1) \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. U ovisnosti o parametru α argumentirajte kada je $f \in \mathrm{H^k(K(0,1))}$, gdje je $k \in \mathbb{N}$.

14. Odredite minimum funkcionala

$$I(u) = \int_{-1}^{1} (1 + |x|)u'(x)^2 - 2u(x)\,\mathrm{d}x$$

na prostoru $\mathrm{H}_0^1((-1,1)) = \{\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1((-1,1)) \mid \mathrm{u}'(-1) = \mathrm{u}(1) = 0\}$. Je li minimizator jedinstven? Obrazložite.

15. Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) + 1, & \text{ako je } |x| < 1 \\ \ln|x|, & \text{inače.} \end{cases}$$

a) Pokažite da je $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ koristeći definiciju distribucije pridružene funkciji. Pripada li $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$? Dokažite ili opovrgnite.

b) Odredite f'' u smislu distribucija.

16. Funkcional $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiran je sljedećom formulom:

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{\varphi(x)}{\operatorname{sh}(x)}\,\mathrm{d}x$$

Pokažite da je T distribucija. Je li distribucija konačnog reda?

17. a) Izračunajte Fourierovu pretvorbu od

$$h(x) = \sin^2(\pi x).$$

b) Zapišite rješenje koristeći Fourierovu pretvorbu po x. Izračunajte rješenje za gornji h.

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{u } \mathbb{R} \times [0,1] \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=1} = h. \end{cases}$$

18. Riješite problem minimuma:

$$\min_{u \in \mathrm{H}_0^1(-1,1)} \mathbf{I}(u) := \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (u'(x))^2 \, \mathrm{d}x + u(0).$$