

1. domaća zadaća

Rok predaje: 10.4.2018.

1. a) Odredite sve derivacije (u smislu distribucija) funkcije $x \mapsto |x|$ definirane na \mathbb{R} .
 b) Konstruirajte distribucije zadanog reda $m \in \mathbb{N}$ na $\mathcal{D}(\langle -1, 1 \rangle)$. Postoje li distribucije beskonačnog reda na $\mathcal{D}(\langle -1, 1 \rangle)$?
2. Definirajmo *Partie finie* (konačni dio) preslikavanja $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ na sljedeći način:

$$\left\langle \text{Pf } \frac{1}{x^2}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right).$$

Dokažite da je $\text{Pf } \frac{1}{x^2}$ distribucija reda 2 i pokažite da vrijedi

$$\left(\text{vp } \frac{1}{x} \right)' = -\text{Pf } \frac{1}{x^2},$$

gdje je $\text{vp } \frac{1}{x}$ glavna vrijednost preslikavanja $x \mapsto \frac{1}{x}$.

3. Izračunajte limese $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gdje je:

a) $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$

b) $f_n(x) = n^2x \cos nx$

4. Neka je dana neparna funkcija $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tako da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) \rightarrow 1.$$

Dokažite da $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 f'(\varepsilon x)$ ima limes u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ te ga odredite.

Nap: Ukupni bodovi zadaće dobivaju se zbrajanjem bodova triju najbolje napisanih zadataka.
 P. Kunštek