Metode matematičke fizike
4. vježbe

Definiramo skup

$$Y = \{y \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d) \ : \ y(a) = A, y(b) = B\}$$

i funkcional $\phi : Y \to \mathbb{R}$ definiramo formulom

$$\phi(y) = \int_a^b F(t, y(t), \dot{y}(t))\, dt,$$

gdje je $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dovoljna glatka funkcija (tipa klase C^2 na U).
Tražimo **ekstrem** funkcionala ϕ na Y.

Definicija. *Kažemo da je $y \in Y$ **ekstrem** funkcionala ϕ ako*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall h \in Y_0,\ \phi(y + \lambda h) \leq \phi(y)$$

ili

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall h \in Y_0,\ \phi(y + \lambda h) \geq \phi(y)$$

gdje je $Y_0 = \{h \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d) \ : \ h(a) = 0,\ h(b) = 0\}$.

Definicija. ***Varijacija** funkcionala ϕ u točki $y \in Y$ u smjeru $h \in Y_0$ je*

$$\delta\phi(y)h = \frac{d}{d\lambda}\phi(y + \lambda h)\Big|_{\lambda=0}.$$

Funkcija y u kojoj se varijacija funkcionala poništava

$$\forall h \in Y_0,\ \delta\phi(y)h = 0,$$

*zovemo **ekstremalom** funkcionala φ.*

Ako je $y \in Y$ ekstrem funkcionala ϕ, onda je i ekstremala. Vrijedi sljedeći rezultat:
$y \in Y$ je ekstremala funkcionala ϕ ako i samo ako je y rješenje Euler-Lagrangeovih jednadžbi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \cdot y_i}(t, y(t), \dot{y}(t)) - \frac{\partial F}{\partial y_i}(t, y(t), \dot{y}(t)) = 0, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Zadatak (4.1)**.** Nađite ekstremalu funkcionala

$$\phi(x) = \int_0^{\pi/4} \left[(\dot{x}(t))^2 - (x(t))^2\right] \mathrm{d}t$$

na skupu $\left\{h \in \mathcal{C}^1([0,\pi/4]) : h(0) = 1,\ h(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Zadatak (4.2)**.** Nađite ekstremalu funkcionala

$$\phi(x_1, x_2) = \int_0^{\pi/4} \left[2x_2(t) - 4(x_1(t))^2 + (\dot{x}_1(t))^2 - (\dot{x}_2(t))^2\right] \mathrm{d}t$$

na skupu

$$\left\{(h_1, h_2) \in \mathcal{C}^1([0,\pi/4];\mathbb{R}^2) : h_1(0) = h_2(0) = 1,\ h_1(\pi/4) = h_2(\pi/4) = 1\right\}.$$

Zadatak (4.3)**.** Odredite sve ekstremale funkcionala

$$\phi(u) = \int_0^{\ln 2} \left[e^t \dot{u}(t)^2 + 2e^t u(t)^2\right] \, \mathrm{d}t$$

na skupu

$$S := \left\{u \in \mathcal{C}^1([0, \pi/4]) \ : \ u(0) = 5, \, u(\ln 2) = 3\right\}.$$

Ako $F(t, x, \dot{x}) = F(x, \dot{x})$ ne ovisi o varijabli t onda možemo E-L jednadžbe zapisati kao DJ 1. reda:

$$F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = C$$

Zadatak (4.4)**.** Odredite ekstremalu funkcionala ϕ na skupu $\left\{y \in \mathcal{C}^1([0, \pi/4]) \ : \ y(0) = 1, \, y(1) = \sqrt{2}\right\}$ ako je

$$\phi(u) = \int_0^1 \sqrt{y(t)\dot{y}(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Dodatni zadaci

Zadatak (Brahistokrona)**.** Kuglicu klizi niz glatku krivulju iz točke O do podnožja B pod utjecajem sile teže. Trenje između podloge i kuglice zanemarujemo. Ako je kuglica krenula iz mirovanja odredite oblik krivulje tako da je vrijeme spuštanja minimalno.