1 Linearna algebra

Zadatak 1.1. *Ako imamo 44 kilograma svježih gljiva, koliko ćemo kilograma suhih gljiva dobiti sušenjem? Svježbe gljive imaju 90% vode i 10% suhe tvari dok suhe gljive 12% vode i 88% suhe tvari.*

Rj: Dobije se 5kg suhih gljiva.

Zadatak 1.2. *Koliko kilograma vode treba ispariti iz 1 tone celulozne mase koja sadrži 85% vode kako bi se dobila masa koja sadrži 75% vode.*

Rj: 400 kg treba ispariti.

1.1 Sustavi linearnih jednadžbi

Zadatak 1.3. *Koliko kilograma srebra čistoće 0.85 treba pomiješati sa srebrom čistoće 0.5 da bismo dobili kilogram srebra čistoće 0.65?*

Rj: Treba 3/7 kilograma srebra čistoće 0.85, tj. miješa se o omjeru 3 : 4. Prethodni zadatak riješili smo **metodom supstitucije**:

Metoda supstitucije

1. Iz jedne jednadžbe izrazimo neku nepoznanicu.
2. Uvrstimo dobiveni izraz u preostale jednadžbe.

Time radimo sa sustavom koji ima 1 nepoznanicu i 1 jednadžbu manje.

Zadatak 1.4. *Matko i Ratko su uspoređujući svoje rezultate kolokvija primijetili:*

- *Kad bi Ratko imao 9 puta manje, a Matko 10 puta manje bodova, Ratko bi imao 1 bod više nego Matko.*
- *Kad bi Ratko imao 11 puta manje, a Matko 10 puta manje bodova, Matko bi imao 1 bod više nego Ratko.*

Koliko bodova imaju Matko i Ratko?

Rj: $M = 100,\ R = 99$.

Zadatak 1.5. *Studenti Ana i Boris su uspoređivanjem rezultata kolokvija primijetili:*

- *Da Ana ima 20 bodova više, imala bi jednak broj bodova kao Boris.*
- *Da Boris ima 30 bodova više, imao bi dvaput više bodova nego Ana.*

Koliko tko ima bodova?

Rj: $A = 50,\ B = 70$.

Zadatak 1.6. *U dvorištu su crne ovce, bijele ovce i bijele patke. Ako je u dvorištu 101 ovca, 150 bijelih životinja i 504 nogu, koliko ima crnih ovaca?*

Zadatak 1.7. *Tri patuljka Učo, Ljutko i Srećko svađaju se oko sastava prstena.*

- *Učo:"Prsten je moj. Ja najbolje znam koliko je težak! Da je 4 orta teži, imao bi točno šest na kvadrat orta."*
- *Ljutko: "Ja znam zašto je prsten tako težak. Zato jer je u njemu 6 puta više zlata nego srebra."*
- *Srećko: "Ništa vi o tome ne znate. Da je bakra 2 orta manje, a srebra 2 orta više, srebra bi bilo triput više nego bakra."*
- *Ljutko: "Učo, ako želiš zadržati prsten, reci nam odmah sada - odmah! - koliko je čega u njemu"*
- *Učo: "U prstenu je m_{Cu} orta bakra, m_{Ag} orta srebra i m_{Au} orta zlata."*

Rj: $m_{\mathrm{Cu}} = 4, m_{\mathrm{Ag}} = 4, m_{\mathrm{Au}} = 24$.

Zadatak 1.8. *Uskrsni zeko u košarici nosi dva tuceta jaja. Crvenih jaja ima trostruko više nego zelenih, a da je plavih jaja dvostruko više nego što ih ima bilo bi ih 4 više nego crvenih. Koliko jaja koje boje nosi zeko?*

Rj: $C = 12,\ P = 8,\ Z = 4$.

Zadatak 1.9. *Pijevci koštaju po 5£, kokoši po 3£, a 3 pilića koštaju 1£. Ako kupujemo* 100 *ptica za* 100£, *odredite sva smislena rješenja. Koje rješenje ima najmanje pilića.*

Rj: $P = t,\ K = (100 - 7t)/4,\ Pil = 75 + 3t/4, \quad t = 0, 4, 8, 12.$

1.2 Gaussova metoda eliminacija

Definicija 1.1.

Sustavu linearnih jednadžbi $(m \times n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

*pridružujemo **matricu sustava**:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Definicija 1.2. ***Elementarne transformacije*** *(matrice) sustava su :*

1. *zamijena dvaju redaka,*
2. *množenje nekog retka brojem različitim od* 0*,*
3. *pribrajanje jednog retka drugom.*

Elementarnim transformacijama skup rješenja sustava se ne mijenja.
Metoda Gaussovih eliminacije elementarnim transformacijam matricu sustava svodi na oblik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & c_n \\ \hline & & & c_{n+1} \\ & 0 & & \vdots \\ & & & c_m \end{array}\right) \qquad \text{ili} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & & 0 & & c_1 \\ & \ddots & & * & \vdots \\ 0 & & 1 & & c_m \end{array}\right)$$

iz koje se lagano čitaju rješenja.

1. Ako se pojavi redak $(0 \dots 0|0)$ možemo ga zanemariti.
2. Ako se pojavi redak $(0 \dots 0|c)$, $c \neq 0$ sustav nema rješenja.

Zadatak 1.10. *Riješite sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije:*

(a) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 3 \\ -2x_1 & & +x_3 & = -2 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 3 \\ -x_1 & +2x_2 & +12x_3 & = 1 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +11x_3 & +5x_4 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & +2x_4 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = -3 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = -3 \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ -2x_1 & & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$,

(d) $\begin{cases} x_1 & -5x_2 & -8x_3 & +x_4 & = 3 \\ 3x_1 & +x_2 & -3x_3 & -5x_4 & = 1 \\ x_1 & & -7x_3 & +2x_4 & = -5 \\ & 11x_2 & +20x_3 & -9x_4 & = 2 \end{cases}$,

(e) $\begin{cases} & x_2 & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & & = 2 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 3 \\ 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 5 \\ 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = 4 \end{cases}$,

(f) $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & -6x_4 & = 0 \\ 7x_1 & +4x_2 & +6x_3 & -5x_4 & = 0 \\ x_1 & & +8x_3 & +7x_4 & = 0 \end{cases}$,

(g) $\begin{cases} 3x_1 & +9x_2 & -15x_3 & = 6 \\ 2x_1 & +6x_2 & -10x_3 & = 4 \\ 4x_1 & +12x_2 & -20x_3 & = 8 \end{cases}$,

(h) $\begin{cases} x_1 & -x_2 & +\sin \pi x_3 & & +x_5 & = 1 \\ 2x_1 & & & -2x_4 & +x_5 & = 1 \\ \sin \frac{\pi}{2} x_1 & & & -x_4 & & = 1 \end{cases}$,

(i) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 3 \\ -2x_1 & & +x_3 & = -2 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 3 \\ -x_1 & +2x_2 & +12x_3 & = 2 \end{cases}$.

Zadatak 1.11. *Izjednačite kemijsku jednadžbu:* $x_1 HNO_3 + x_2 I_2 \ \rightarrow \ x_3 HIO_3 + x_4 NO + x_5 H_2O$.

Zadatak 1.12. *U ovisnosti o parametru λ riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi:*

(a) $\left\{\begin{array}{lllll} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & =3 \\ 4x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +4x_4 & =5 \\ 6x_1 & +9x_2 & +5x_3 & +6x_4 & =7 \\ 8x_1 & +12x_2 & +7x_3 & +\lambda x_4 & =9 \end{array}\right.$, *(b)* $\left\{\begin{array}{llll} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & =-1 \\ 7x_1 & +6x_2 & +5x_3 & =\lambda \\ 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & =2 \end{array}\right.$.

1.3 Matrice

Definicija 1.3. *Matrica (realna) reda $m \times n$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = [a_{i,j}]$$

gdje je $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ za sve $i \in \{1,2,\dots,m\}$, $j \in \{1,2,\dots,n\}$. Skup svih realnih matrica reda $m \times n$ označavmo $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Ako je $m = n$, kraće pišemo $M_n(\mathbb{R})$.

Zadatak 1.13. *Zapišite matrice:*

(a) $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, $a_{i,j} = i + j$,

(b) $B \in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $b_{i,j} = (i-j)^2$,

(c) $C \in M_n(\mathbb{R})$, $c_{i,j} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \textit{ako je } i = j \\ 0 & \textit{ako je } i \neq j \end{array}\right.$.
Ova matrica zove se ***jedinična matrica*** *reda $n \times n$ i označava se I_n.*

Definicija 1.4 (Transponiranje matrica)**.** *Za matricu $A = [a_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ transponiranu matricu definiramo kao:*

$$A^t = [a_{i,j}]^t := [a_{j,i}] \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

Transponiranje matrice interpretiramo kao "zrcaljenje oko glavne dijagonale".

Zadatak 1.14. *Izračunajte:*

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t$, *(b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t$, *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^t$.

Definicija 1.5 (Simetrične i antisimetrične matrice)**.** *Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je:*

- ***simetrična*** *ako je $A^t = A$*
- ***antisimetrična*** *ako je $A^t = -A$.*

Primjer:

- Matrica $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ je simetrična.
- Matrica $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ je antisimetrična.

Definicija 1.6. ***Zbrajanje matrica****:*

$$\underbrace{[a_{i,j}]}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})} + \underbrace{[b_{i,j}]}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})} = \underbrace{[a_{i,j} + b_{i,j}]}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})}$$

Primjer:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+(-1) & 3+0 \\ 4+2 & 5+1 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ nije definirano!

Definicija 1.7.

- ***Nulmatrica*** *reda* $m \times n$ *je matrica* $0_{m,n} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
- ***Suprotna matrica*** *od* $A = [a_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *je matrica* $-A := [-a_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
- ***Oduzimanje matrica*** *definiramo kao*

$$\underbrace{A}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})} - \underbrace{B}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})} := \underbrace{A + (-B)}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})}.$$

Primjer: $(1,2) - (3,4) = (1-3, 2-4) = (-2,-2)$.

Svojstva. Za sve $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ vrijedi:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A + 0_{m,n} = A$
3. $A + (-A) = 0_{m,n}$
4. $A + B = B + A$.

Definicija 1.8. ***Množenje matrice skalarom:***

$$\underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{[a_{i,j}]}_{M_{m,n}(\mathbb{R})} := \underbrace{[\alpha a_{i,j}]}_{M_{m,n}(\mathbb{R})}.$$

Primjer:

(a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 1 \\ \frac{1}{2}\cdot 2 \\ \frac{1}{2}\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$,

(b) $0\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \pi & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 & 0\cdot 3 \\ 0\cdot\pi & 0\cdot e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Svojstva. Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ vrijedi:

5. $1 \cdot A = A$
6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
7. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
8. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

Zadatak 1.15. *Izračunajte:* $123\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 122\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.4 Vektorski prostori

Definicija 1.9. *Realan vektorski prostor je skup* V *na kojemu su zadane operacije zbrajanja i množenja skalarom* $\alpha \in \mathbb{R}$ *sa sljedećim svojstvima:*

1. $(v+w)+u = v+(w+u)$ *za sve* $v, w, u \in V$.
2. *Postoji* $0_V \in V$ ***(nulvektor)*** *takav da je* $v + 0_V = v$ *za sve* $v \in V$.
3. *Za svaki* $v \in V$ *postoji* $-v \in V$ *takav da je* $v + (-v) = 0_V$.
4. $v + w = w + v$ *za sve* $v, w \in V$.
5. $1 \cdot v = v$ *za sve* $v \in V$.
6. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ *za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *i* $v \in V$.
7. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
8. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

Primjeri realnih vektorskih prostora:

- Skup matrica $M_{m,n}(\mathbb{R})$ s prijašnjom definicijom zbrajanja i množenja matrice skalarom čini vektorski prostor. Uočimo direktne posljedice:
  - Skup realnih brojeva $\mathbb{R} = M_{1,1}(\mathbb{R})$ je vektorski prostor sa standardnim zbrajanjem i množenjem.
  - $\mathbb{R}^n = M_{1,n}(\mathbb{R}) = \{(x_1, \dots, x_n) \, : \, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ je realan vektorski prostor s operacijama:

    $+ : \ (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

    $\cdot : \ \alpha(x_1, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

    Dani nulvektor je $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$.

- Skup svih realnih funkcija realne varijable (oznaka $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) s operacijama:

  $+ : \ (f + g)(x) := f(x) + g(x)$

  $\cdot : \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$

  Uočite da skup svih polinoma s realnim koeficijentima čine vektorski prostor s gore definiranim operacijama zbrajanja funkcija i množenja funkcije skalarom

Definicija 1.10 (Linearne kombinacije)**.** *Neka je V realan vektorski prostor. Za $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ i $v_1, \dots, v_n \in V$ izraz*

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

*zovemo **linearnom kombinacijom** vektora $v_1, \dots, v_n$ s koeficijentima $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.*

Definicija 1.11 (Linearna nezavisnost)**.** *Neka je V vektorski prostor. Skup $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ je **linearno nezavisan** ako je jedino rješenje $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jednadžbe*

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0_V$$

dano sa

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

*Ako skup $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ nije linearno nezavisan, kažemo da je **linearno zavisan**.*

Zadatak 1.16. *Je li skup $\{(1, 2, 3), (1, 3, 0), (1, 1, 6)\} \subset \mathbb{R}^3$ linearno nezavisan?*

Zadatak 1.17. *Je li skup $\{x, x^2, x^4\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linearno nezavisan?*

Tvrdnja: Neka je V vektorski prostor. Konačav skup $S \subset V$ je linearno zavisan ako i samo ako postoji neki $v \in S$ koji je linearna kombinacija preostalih vektora iz S. Na primjer jer je $(1, 4, 0) = (1, 0, 0) + 2(0, 2, 0)$ možemo zaključiti da je skup

$$\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 4, 0)\} \subset R^3$$

linearno zavisan. Štoviše, ako skup sadrži nul-vektor tada je nužno linearno zavisan.

Definicija 1.12. *Rang matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ je*

$$\begin{aligned} r(A) &:= \textit{broj linearno nezavisnih redaka matrice } A \\ &= \textit{broj linearno nezavisnih stupaca matrice } A. \end{aligned}$$

Bitno: $r(A)$ se ne mijenja primjenom elementarnih transformacija na retke i stupce matrice A.

Primjer:

$$r\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3$$

Zadatak 1.18. *Izračunajte:*

(a) $r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *(b)* $r\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *(c)* $r\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *(d)* $r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Zadatak 1.19. *Je li skup $\{(1, 2, 0, 4), (1, 2, 0, 1), (1, 2, 0, 7)\} \subset \mathbb{R}^4$ linearno nezavisan?*

Definicija 1.13. ***Baza*** *vektorskog prostora V je linearno nezavisan skup*

$$B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$$

koji ima maksimalan mogući broj elemenata. Taj broj elemenata zove se ***dimenzija*** *prostora V i označava $\dim V$. Dimenzija nulprostora (prostor koji se sastoji od samo nul-vektora) jednaka je 0.*

Tvrdnja: Skup $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ je baza vektorskog prostora V ako i samo ako postoje jedinstveni $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Primjer:

1. $\dim R^n = n$. Standardna (kanonska) baza je

$$\{\underbrace{(1,0,\ldots,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,\ldots,0)}_{e_2}, \ldots, \underbrace{(0,0,\ldots,1)}_{e_n}\}.$$

2. $\dim M_{m,n}(\mathbb{R}) = mn$. Standardna (kanonska) baza za $M_2(\mathbb{R})$ je

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{2,2}} \right\}$$

Općenito za $M_{m,n}(\mathbb{R})$ je

$$\left\{ E_{i,j} \ : \ i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

gdje je $E_{i,j} = [e_{k,l}] = \begin{cases} 1, & k = i, l = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

Kako provjeravamo da je skup baza?
Tvrdnja: Konačan skup $B \subset V$ je baza vektorskog prostora V ako i samo ako je B linearno nezavisan i ima $\dim V$ elemenata.

Zadatak 1.20. *Je li skup $S = \{(1,2,3), (2,2,3), (0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ baza za $\mathbb{R}^3$?*

Definicija 1.14. ***Potprostor*** *M realnog vektorskog prostora V je neprazan podskup $M \subset V$ sa sljedećim svojstvima:*

- $v_1, v_2 \in M \implies v_1 + v_2 \in M$
- $\alpha \in \mathbb{R}, v \in M \implies \alpha v \in M$.

Svaki potprostor je i sam realan vektorski prostor.

Primjer Potprostori od $\mathbb{R}^3$:

- dimenzije 0: $\{(0,0,0)\}$
- dimenzije 1: pravci kroz ishodište.
- dimenzije 2: ravnine kroz ishodište.
- dimenzije 3: $\mathbb{R}^3$.

VAŽNO! Skup svih rješenja $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ homogenog sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{llll l} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\ldots & +a_{1,n}x_n & = 0 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\ldots & +a_{2,n}x_n & = 0 \\ & \vdots & & & \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\ldots & +a_{m,n}x_n & = 0 \end{array}$$

u oznaci R je potprostor od $\mathbb{R}^n$ i pritom vrijedi:

- $\dim R$ je broj slobodnih parametara.
- Koeficijenti uz specifičan parametar čine vektor u $\mathbb{R}^n$. Svi takvi vektori čine bazu za prostor R.

Zadatak 1.21. *Odredite dimenziju i nađite jednu bazu prostora R rješenja sustava:*

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = -2 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 3 \end{array} \right. .$$

1.5 Množenje matrica

Definicija 1.15. *Ako je* $A = [a_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B = [b_{i,j}] \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ *tada je* $C = AB \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ *i*

$$C = [c_{i,j}] := [\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}]$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}}_{R \in M_{1,n}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{S \in M_{n,1}(\mathbb{R})} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = RS \in \mathbb{R}$$

Opće množenje matrica:

$$\begin{pmatrix} \text{---} & R_1 & \text{---} \\ \text{---} & R_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & R_m & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ S_1 & S_2 & \dots & S_p \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1S_1 & R_1S_2 & \dots & R_1S_p \\ R_2S_1 & R_2S_2 & \dots & R_2S_p \\ & \vdots & & \\ R_mS_1 & R_mS_2 & \dots & R_mS_p \end{pmatrix}$$

Primjer

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot -1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 2 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot -1 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 16 & 1 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zadatak 1.22. *Izračunajte:*

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *(d)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Svojstvo množenja matrica Vrijedi:

1. $(AB)C = A(BC)$ za sve $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B \in M_{n,p}(\mathbb{R}), C \in M_{p,r}(\mathbb{R})$
2. $A(B + C) = AB + AC$ za sve $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$
3. $(A + B)C = AC + BC$ za sve $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}), C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$
4. $AI_n = I_m A$ za sve $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
5. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ za sve $\alpha \in \mathbb{R}, A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

PAZI!

$$AB \neq BA, \text{ za } A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

Kontraprimjer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dok je } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zadatak 1.23. *Riješite matričnu jednadžbu za* $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veza između matričnih jednadžbi i sustava linearnih jednadžbi

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \iff \left\{ \begin{array}{lllll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & + \dots & +a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & + \dots & +a_{2,n}x_n & = b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & + \dots & +a_{m,n}x_n & = b_m \end{array} \right.$$

1.6 Inverz matrice

Definicija 1.16. ***Inverz*** *matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *je matrica* $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ *takva da vrijedi*

$$A^{-1}A = I_n$$

ili ekvivalentno

$$AA^{-1} = I_n.$$

Nema svaka matrica inverz. Ako matrica ima inverz on je nužno jedinstven (opravdava oznaku A^{-1}).

Algoritam za traženje iverza matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$: Matricu

$$\left(A \,\middle|\, I_n \right)$$

elementarnim transformacijama nad retcima dovodimo u oblik

$$\left(I_n \,\middle|\, B \right)$$

i tada je $B = A^{-1}$. Ako se tijekom algoritma pojavi nulredak u lijevoj polovici blok matrice, inverz ne postoji.

Zadatak 1.24. *Zadana je matrica*

$$(a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \qquad (c)\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (d)\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odredite inverz ako postoji.

1.7 Determinanta

Definicija 1.17. *Determinanta matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ je skalar*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$

takav da

- *ako je $n = 1$, definiramo $\det(a_{1,1}) = a_{1,1}$*
- *ako je $n \geq 2$ vrijednost $\det A$ dana je rekurzivno preko*

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} \det A_{1,j}.$$

gdje je $A_{i,j}$ $\dots$ *matrica dobivena iz matrice A brisanjem i-tog retka i j-tog stupca.*

Tvrdnja: Općenito vrijedi **Laplaceov razvoj po i-tom retku**

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j},$$

odnosno **Laplaceov razvoj po j-tom stupcu**

$$\det A := \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}.$$

Ponašanje determinante s obzirom na elementarne transformacije

1.

$$\begin{vmatrix} \text{---} & R_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & R_{i-1} & \text{---} \\ \text{---} & \alpha R_i & \text{---} \\ \text{---} & R_{i+1} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & R_m & \text{---} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \text{---} & R_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & R_{i-1} & \text{---} \\ \text{---} & R_i & \text{---} \\ \text{---} & R_{i+1} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & R_m & \text{---} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} | & & | & | & | & & | \\ S_1 & \dots & S_{j-1} & \alpha S_j & S_{j+1} & \dots & S_n \\ | & & | & | & | & & | \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} | & & | & | & | & & | \\ S_1 & \dots & S_{j-1} & S_j & S_{j+1} & \dots & S_n \\ | & & | & | & | & & | \end{vmatrix}$$

Skalar iz stupaca ili retka se može izlučiti. Specijalno je onda

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A, \quad \alpha \in \mathbb{R}\, A \in M_n(\mathbb{R}).$$

2. Zamijena dva retka ili stupca matrice A mijenja predznak determinante.

3. Dodavanje retka pomnoženog s $\alpha \in \mathbb{R}$ nekom drugom retku ne mijenja vrijednost $\det A$. Analogno sa stupcima.

4. Vrijedi

$$\begin{vmatrix} d_1 & * & \dots & * & * \\ 0 & d_2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & d_{n-1} & 0 \\ * & * & \dots & * & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n$$

5. $\det A = 0$ ako vrijedi nešto od sljedećeg:
   (a) A ima nulredak ili nulstupac.
   (b) A ima dva jednaka retka ili dva jednaka nulstupca.

(c) $r(A) < n$, odnosno retci/stupci su linearno zavisni.

Zadatak 1.25. *Izračunajte:*

(a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ *(b)* $\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *(c)* $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *(d)* $\det D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PAZI!
Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Općenito

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B,$$

ali vrijedi po retcima.

$$\begin{vmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ — & R_{i-1} & — \\ — & R_i + \overline{R}_i & — \\ — & R_{i+1} & — \\ & \vdots & \\ — & R_m & — \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ — & R_{i-1} & — \\ — & R_i & — \\ — & R_{i+1} & — \\ & \vdots & \\ — & R_m & — \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ — & R_{i-1} & — \\ — & \overline{R}_i & — \\ — & R_{i+1} & — \\ & \vdots & \\ — & R_m & — \end{vmatrix}$$

Analogno po stupcima.

Binet-Cauchyjev teorem. Vrijedi

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Direktna posljedica je $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Tvrdnja: Neka su $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^t \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Ekvivalentno je:

- $\det A \neq 0$.
- $r(A) = n$.
- Redci od A su linearno nezavisni.
- Redci od A čine bazu za $\mathbb{R}^n$.
- Stupci od A su linearno nezavisni.
- Stupci od A čine bazu za $\mathbb{R}^n$.
- Postoji A^{-1}.
- Matrična jednadžba
$$AX = b$$
ima jedinstveno rješenje $X = A^{-1}b$.
- (Cramerovo pravilo) Rješenja sustava $AX = b$, gdje je $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^t \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ zadovoljava
$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$
gdje je A_j matrica dobivena iz matrice A zamjenom j-tog stupca od A s b.

Zadatak 1.26. *Cramerovim pravilom riješite sustav:* $\begin{cases} x & +y & +z & = 2 \\ x & -y & +z & = 2 \\ x & -y & & = 2 \end{cases}$.

1.8 Linearni operatori

Neka su V i W realni vektorski prostori.

Definicija 1.18. ***Linearni operator*** *je funkcija* $A : V \to W$ *sa sljedećim svojstvima:*

(L1) $A(u+v) = A(u) + A(v)$ *za sve* $u, v \in V$.

(L2) $A(\alpha v) = \alpha A(v)$ *za sve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i* $v \in V$.

Neka je $A : V \to W$ linearan operator. Vrijedi:

1. $A(0_V) = 0_W$
2. Uobičajeno je pisati $A(v)$ bez zagrada:
$$Av := A(v), v \in V.$$
3. Za $\alpha_i \in \mathbb{R}$ i $v_i \in V$, $i = 1, 2, \dots, n$
$$\begin{aligned} A(\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n) &\overset{(L1)}{=} A(\alpha_1 v_1) + \dots A(\alpha_n v_n) \\ &\overset{(L2)}{=} \alpha_1 A v_1 + \dots + \alpha_n A v_n. \end{aligned}$$
Posebno, ako je $v_1, \dots v_n$ baza za V (pa za svaki $v \in V$ postoje jedinstveni $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takvi da je $v = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n$), tada vrijednosti $Av_1, \dots, Av_n \in W$ jednoznačno određuju djelovanje od A.

Zadatak 1.27. *Je li preslikavanje*

(a) $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A(x) := 2x$ *(b)* $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B(x) := x + 2$ *(c)* $C : C^1([a,b]) \to C([a,b])$, $C(f) = f'$

linearan operator?

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Linearni operatori sa $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^m$ su sve funkcije oblika

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_{1,1}x_1 + \dots a_{1,n}x_n, a_{2,1}x_1 + \dots a_{2,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + \dots a_{m,n}x_n)$$

za fiksne $a_{i,j} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Primjer Sljedeće funkcije su primjeri linearnih operatora:

- $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A(x,y,z) := (2x + 3y - z, 4x - y + 5z, x)$
- $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $B(x,y) := \pi x - y$
- $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $C(x,y) := (0, -x)$
- $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $D(x,y,z) := (0,0,0)$ (tzv. **nuloperator**).

Definicija 1.19. *Neka je* $f = (f_1, \dots, f_n)$ *(uređena) baza realnog vektorskog prostora.* ***Koordinatni prikaz vektora***

$$V \ni v = \alpha_1 f_1 + \dots \alpha_n f_n$$

u bazi f *je*

$$v(f) := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$$

a ***matrični prikaz vektora*** $v \in V$ *u bazi* f *je*

$$[v]_f := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Zadatak 1.28. *Odredite koordinatni i matrični prikaz vektora*

$$v = (1, 0, -2) \in \mathbb{R}^3$$

u bazi

$$f = ((1,0,2), (0,4,0), (0,0,1)).$$

Zadatak 1.29. *Odredite koordinatni i matrični prikaz vektora*

$$v = (1, 0, -2) \in \mathbb{R}^3$$

u bazi

$$e = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Definicija 1.20. *Neka je $A : V \to V$ linearni operator. Neka je $f = (f_1, \dots, f_n)$ uređena baza za V. Matrica linearnog operatora A s obzirom na bazu f je matrica*

$$[A]_f := \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [Af_1]_f & [Af_2]_f & \dots & [Af_n]_f \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

dakle matrica $[A]_f \in M_n(\mathbb{R})$ čiji je j-ti stupac matrični prikaz vektora Af_j u bazi f.

Zadatak 1.30. *Odredite $[A]_f$ za linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,*

$$A(x, y) := (-x, y),$$

i bazu $f := ((-1, 1), (2, 0))$.

Zadatak 1.31. *Odredite matricu linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,*

$$A(x, y, z) := (x - y + z, 2x + z, x - z + y)$$

s obzirom na kanonsku bazu e za $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 1.32. *Odredite matricu linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,*

$$A(x, y, z) := (x - y + z, 2x + z, x - z + y)$$

s obzirom na kanonsku bazu $f = ((1, 2, 4), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$.

Prethodni zadatak možemo riješiti i preko **matrice prijelaza** iz baze e u bazu f. Vrijedi

Neka je $A : V \to V$ linearan operator i neka su $e = (e_1, \dots, e_n)$ i $f = (f_1, \dots, f_n)$ uređene baze za V. Tada vrijedi

$$[A]_f = T^{-1}[A]_e T$$

gdje je

$$[T]_f := \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [f_1]_e & [f_2]_e & \dots & [Af_n]_e \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Matricu T zovemo **matricom prijelaza iz baze** e **u bazu** f.

Također vrijedi

Neka je $f = (f_1, \dots, f_n)$ fiksna uređena baza realnog vektorskog prostora V. Definirali smo vektore i linearne operatore te njihove reprezentacije u matricama.

$$\begin{array}{ccc} v \in V & \longleftrightarrow & [v]_f \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \text{linearni operator } A : V \to V & \longleftrightarrow & [A]_f \in M_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

Za sve linearne operatore $A, B : V \to V$, vektore $v \in V$ i skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

- $[Av]_f = [A]_f [v]_f$
- $[B \circ A]_f = [B]_f [A]_f$ ($\circ$ je kompozicija)
- Ako je $\mathrm{id}_V : V \to V$ dana s $\mathrm{id}(v) = v$. Tada je

  $$[\mathrm{id}_V]_f = I_n.$$

- $[A + B]_f = [A]_f + [B]_f$
- $[\alpha A]_f = \alpha [A]_f$
- Ekvivalentno je
  - A je bijekcija.
  - Postoji linearan operator A^{-1} takav da je

    $$A^{-1} \circ A = A \circ A^{-1} = \mathrm{id}_V$$

  - Postoji matrica $[A]_f^{-1}$ te je

    $$[A^{-1}]_f = [A]_f^{-1}.$$

Zadatak 1.33. *Linearan operator* $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *zadan je svojom matricom u kanonskoj bazi*

$$[A]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- *Izračunajte* $A(1, 2, 3)$.
- *Izračunajte* $A(x, y, z)$, *gdje su* $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- *Je li operator* A *bijekcija? Ako jest, odredite* $[A^{-1}]_e$.
- *Izračunajte* $[A \circ A]_e$

Definicija 1.21. *Neka je* V *realan vektorski prostor i neka je* $A : V \to V$ *linearan operator. Ako neki* $v \in V \setminus \{0_V\}$ *za neki* $\lambda \in \mathbb{R}$ *zadovoljava*

$$Av = \lambda v,$$

tada

- v *zovemo* ***svojstvenim vektorom*** *od* A
- λ *zovemo* ***svojstvenom vrijednosti*** *od* A.

Skup svih svojstvenih vrijednosti od A *zove se* ***spektar*** *od* A *i označava se* $\sigma(A)$

Definicija 1.22. ***Svojstveni*** *ili* ***karakteristični polinom*** *matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *je polinom* k_A *definiran sa*

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda, & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{2,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

Za linearni operator $\tilde{A}$ definiramo karakteristični polinom upravo kao

$$k_{\tilde{A}}(\lambda) := \det([A]_e - \lambda I_n).$$

Definicija je dobra, tj. ne ovisi o odabiru baze e.

Svojstvene vrijednosti od $\tilde{A}$ su sve realne nultočke od $k_{\tilde{A}}$, tj.

$$\sigma(\tilde{A}) = \{\lambda \in \mathbb{R} \, : \, k_{\tilde{A}}(\lambda) = 0\}.$$

Zadatak 1.34. *Odredite spektar i svojstvene vektore linearnog operatora* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *čija je matrica s obzirom na kanonsku bazu*

$$[A]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$