Matematika 2

1. zadaća

Na papire na kojima predaje rješenja zadataka (uključujući postupak rješavanja) napišite Vaše ime, prezime i JMBAG. Zadnji rok za predaju zadaće je **19. travnja 2024. u 11:00**.

1. Riješite sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +4x_3 & +8x_4 & = 1 \\ & & x_3 & +3x_4 & = 0 \\ & & x_3 & -3x_4 & = 1 \end{array}$$

2. Izračunajte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^t + r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & -4 \\ 7 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1}.$$

3. Izračunajte determinantu matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Neka je

$$[A]_e = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

matrica linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ u standardnoj kanonskoj bazi. Odredite matricu tog operatora u bazi $f = \{(1,1,3), (0,1,3), (3,0,1)\}$.

5. Odredite svojstveni polinom, svojstvene vrijednosti te svojstvene vektore operatora $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ čiji je matrični zapis u bazi $f = \{(1,1,3), (0,1,3), (3,0,1)\}$ jednak

$$[B]_f = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 13 \\ 4 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Petar Kunštek

1. Sustav zapisujemo preko matrice sustava:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

Možemo zaključiti iz drugog retka da je $-2x_4 = 1$, a iz posljednjeg $-6x_4 = 1$ što daje kontradikciju, čime sustav nema rješenja.

2. Prvo izračunajmo rang matrice

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & -4 \\ 7 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 7 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \color{red}{-3} & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Računom inverz preko Gauss-Jordanovog algoritma

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \color{red}{1} & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \color{red}{-1} & 0 & -3 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{5} & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/5 & -1/5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 & -2/5 \end{array}\right)$$

čime je

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

Sve zajedno

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^t + r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & -4 \\ 7 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 \\ 21 & -6 & 9 \\ 5 & 10 & -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1/2 & -3/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 145 & 2 & 36 \\ 225 & -54 & 78 \\ 50 & 106 & -42 \end{pmatrix}$$

3. Matrica nije kvadratna pa determinanata nije definirana.

4. Pripadna matrica prijelaza i inverz su

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ -1 & -8 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

čime je

$$[A]_f = T^{-1}[A]_e T = \begin{pmatrix} 5 & 27 & -52 \\ 2 & -20 & 54 \\ -2 & -9 & 16 \end{pmatrix}$$

Tipična greška je staviti pod matricu prijelaza transponirani izraz T^t umjesto T, obratite pažnju na taj detalj.

5. Pripadni karakteristični polinom je

$$
\begin{aligned}
k_B(\lambda) = \det([B]_f - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -5 & 13 \\ 4 & -1-\lambda & 8 \\ 1 & -1 & -8-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (8-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 8 \\ -1 & -8-\lambda \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & -8-\lambda \end{vmatrix} + 13\begin{vmatrix} 4 & -1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (8-\lambda)[(\lambda+8)(\lambda+1)+8] + 5[-4\lambda-32-8] + 13[-4+\lambda+1] \\
&= -\lambda^3 - \lambda^2 + 49\lambda - 111
\end{aligned}
$$

Vidimo da je $\lambda = 3$ nultočka polinoma pa prema Hornerov algoritmu

	-1	-1	49	-111
3	-1	-4	37	0

Dobili smo

$$k_B(\lambda) = (\lambda-3)(-\lambda^2-4\lambda+37) = -(\lambda-3)(\lambda+2+\sqrt{41})(\lambda+2-\sqrt{41})$$

Time su poznate sve svojstvene vrijednosti operatora B:

$$\sigma(B) = \{3, -2\pm\sqrt{41}\}$$

Preostaje pronaći svojstvene vektore:

- $\lambda_1 = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & 13 & 0 \\ 4 & -4 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 68 & 0 \\ 0 & 0 & 52 & 0 \\ 1 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Možemo zaključiti da je $[v_1]_f = (1,1,0)^t$.

- $\lambda_{2,3} = -2\pm\sqrt{41}$

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} 8-\lambda_{2,3} & -5 & 13 & 0 \\ 4 & -1-\lambda_{2,3} & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -8-\lambda_{2,3} & 0 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3-\lambda_{2,3} & 77-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda_{2,3} & 4\lambda_{2,3}+40 & 0 \\ 1 & -1 & -8-\lambda_{2,3} & 0 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -\lambda_{2,3}^2-4\lambda_{2,3}+37 & 0 \\ 0 & 3-\lambda_{2,3} & 4\lambda_{2,3}+40 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-\lambda_{2,3}^2-9\lambda_{2,3}-16}{\lambda_{2,3}-3} & 0 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda_{2,3} & 4\lambda_{2,3}+40 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-\lambda_{2,3}^2-9\lambda_{2,3}-16}{\lambda_{2,3}-3} & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

  gdje smo u posljednom koraku iskoristili da je $\lambda_{2,3}$ nultočke od polinoma $\lambda \mapsto (-\lambda^2-4\lambda+37)$. Za svojstvenu vrijednost $\lambda_{2,3} = -2\pm\sqrt{41}$ slijedi da je (uvrstite da je treća komponenta svojstvenog vektora jednaka 1)

$$[v_i]_f = \left(\frac{\lambda_i+9\lambda_i+16}{\lambda_i-3}, \frac{4\lambda_i+40}{\lambda_i-3}, 1\right)^t, \qquad i = 2,3.$$

  S obzirom da nije precizirano da trebamo svojstvene vektore v_i zapisati u kanonskoj bazi, taj korak možemo preskočiti. Ako je potrebna ta informacija je poznata, uočite da vrijedi prema definiciji matrične reprezentacije

$$
\begin{aligned}
[v_1]_e &= f_1^t + f_2^t = (1,2,6)^t \\
[v_i]_e &= \frac{\lambda_i+9\lambda_i+16}{\lambda_i-3} f_1^t + \frac{4\lambda_i+40}{\lambda_i-3} f_2^t + f_3^t, \quad i = 2,3.
\end{aligned}
$$

  Operator B nije potrebno zapisati u standardnoj (kanonskoj) bazi kako bi se riješio zadatak.