# Red potencija

Neka je dan niz funkcija $(f_n)_n$ takvu da
$f_n : I \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Red $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ zovemo **redom funkcija**

Ako je $f_n(x) = a_n (x-c)^n$, $c \in I$ red
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$
nazivamo **redom potencija** oko točke $c$.

Definiramo skup
$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{red} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \text{ konvergira u točki } z \right\} \subseteq \mathbb{C}$$
Tada je **radijus konvergencije** reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$
$$r := \sup \{ |z-c| : z \in K \}$$
Ako je $|z-c| < r$ tada red konvergira apsolutno, dok ako je $|z-c| > r$ red potencija divergira.

**Teorem** Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ red potencija, $\rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$.
Tada je radijus konvergencije $r = 1/\rho$ (uz $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$)
Dodatno, ako postoji $\rho_1 = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$, tada je $r = \frac{1}{\rho_1}$
Dodatno, ako postoji $\rho_2 = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, tada je $r = \frac{1}{\rho_2}$.

**Zad** Izračunajte radijus konvergencije redova:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Rj: $a_n = 1$.
$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$
$r = \frac{1}{\rho} = 1$ je radijus konvergencije reda.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n \Rightarrow a_n = n^n$
$$\rho = \lim_n \sqrt[n]{n^n} = \lim_n n = +\infty$$
$\Rightarrow r = \frac{1}{\rho} = 0$ je radijus konverg. reda.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$
$$\rho = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{1}{1+n} = 0$$
$\Rightarrow r = \frac{1}{\rho} = +\infty$ je radijus konvergencije reda.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n} x^n \Rightarrow a_n = \frac{\ln n}{2^n}$
$$\rho = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \left( \frac{\ln n}{2^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{2} = \frac{1}{2}$$
($\sqrt[n]{\ln n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$)

Znamo da je $\lim_n \sqrt[n]{\ln n} = 1$.

Zaista, $1 \le \ln n \le n$, $\forall n \ge 3$
te postoje limesi $\lim_n \sqrt[n]{1} = \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$
i jednaki su, slijedi da je $\lim_n \sqrt[n]{\ln n} = 1$
tzv. **teorem o sendviču**.

$r = \frac{1}{\rho} = 2$ je radijus konvergencije reda.

Alternativno rješenje

(gledam za $n > 1$)
$$\rho = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{\ln n}{2^n}} = \lim_n \frac{\ln(n+1)}{2 \ln n}$$
$$\overset{L'H}{=} \lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{2 \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$
$r = \frac{1}{\rho} = 2$ je traženi radijus konvergencije.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^{3n}} x^n \Rightarrow a_n = \frac{(3n)!}{n^{3n}}$
$$\rho = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{\frac{(3n+3)!}{(n+1)^{3n+3}}}{\frac{(3n)!}{n^{3n}}} = \lim_n \frac{\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(n+1)^{3n}(n+1)^3}}{\frac{(3n)!}{n^{3n}}}$$
$$= \lim_n \frac{3n+3}{n+1} \cdot \frac{3n+2}{n+1} \cdot \frac{3n+1}{n+1} \cdot \left( \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \right)^3 = \frac{3^3}{e^3}$$
($\to 3$, $\to 3$, $\to 3$, $\to e$)

$r = \frac{1}{\rho} = \frac{e^3}{27}$ je radijus konvergencije reda //

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
$$\rho = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$
($\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$)

$r = \frac{1}{\rho} = 1$ je traženi radijus konvergencije.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^n} x^n \Rightarrow a_n = \frac{\cos(n^2)}{n^n}$
$$0 \le \frac{|\cos(n^2)|}{n^n} \le \frac{1}{n^n} \quad / \sqrt[n]{\cdot}$$
$$\Rightarrow 0 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{n}$$
($\frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$)

po tm. o sendviču je $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

$r = \frac{1}{\rho} = +\infty$ je traženi radijus konvergenc.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n) x^n \Rightarrow a_n = \begin{cases} 2, & n \text{ paran} \\ 0, & n \text{ neparan} \end{cases}$
$$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$
$$0 \le a_n \le 2$$
$$\Rightarrow |a_n| \le 2$$
$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \le 2^{\frac{1}{n}}$$
$$\Rightarrow \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \le \liminf_n 2^{\frac{1}{n}} = \lim_n 2^{\frac{1}{n}} = 1$$
S druge strane $\lim_n \sqrt[n]{|a_{2n}|} = \lim_n \sqrt[n]{2} = 1$ pa je
$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

$r = \frac{1}{\rho} = 1$ je traženi radijus konvergencije

**Napomena**: Gornji dokaz je za općenitu situaciju.
$$\left. \begin{array}{l} \lim_n \sqrt[n]{|a_{2n}|} = 1 \\ \lim_n \sqrt[n]{|a_{2n-1}|} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \max\{0, 1\} = 1$$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-2)^n) x^n \qquad a_n = 1 + (-2)^n$
$$\rho = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{1 + (-2)^{n+1}}{1 + (-2)^n} \right| = \lim_n \left| \frac{\frac{1}{(-2)^{n+1}} + 1}{\frac{1}{(-2)^{n+1}} - \frac{1}{2}} \right|$$
($\frac{1}{(-2)^{n+1}} \to 0$)
$$= \left| \frac{1}{-\frac{1}{2}} \right| = 2$$
$r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$ je traženi radijus konvergencije.

**Def.** Neka je funkcija $f \in C^{\infty}(\langle c-r, c+r \rangle)$, $r > 0$.
Red potencija
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$
zovemo **Taylorov red** funkcije $f$ oko točke $c$.
Taylorovi polinomi $T_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$ su parcijalne sume Taylorovog reda.

**Zad** Odredite Taylorov red oko nule i njegov radijus konvergencije za funkciju.

a)
$$f(x) = e^x, \quad c = 0$$
$$f'(x) = e^x \ \ldots \ f^{(n)}(x) = e^x$$
$$f^{(n)}(0) = 1, \ \forall n \Rightarrow T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$
($\frac{1}{n!} = a_n$)
$$\rho = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0$$
$\Rightarrow r = \frac{1}{\rho} = +\infty$ je radijus konvergencije.

b) $f(x) = \sin x$