1 Tok funkcije

Podsjetnik:

Teorem 1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na I. Ako je $f'(x) \overset{(<)}{>} 0$ za svaki $x \in I$ tada je f strogo rastuća (padajuća) na I.*

Teorem 2. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na I. Tada f ima strogo lokalni maksimum (minimum) u $c \in I$ ako i samo ako je $f'(c) = 0$ te postoje c_1, c_2, $\langle c_1, c_2\rangle \subseteq I$ takve da je $f'(x) \overset{(<)}{>} 0$ za $x \in \langle c_1, c\rangle$ i $f'(x) \overset{(>)}{<} 0$ za $x \in \langle c, c_2\rangle$*

Teorem 3. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna na I. Tada f ima strogi lokalni maksimum (minimum) u $c \in I$ ako je $f''(c) \overset{(>)}{<} 0$.*

Teorem 4. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna na I. Ako je $f''(x) \overset{(<)}{>} 0$ za svaki $x \in I$ tada je f strogo konkveksna (konkavna) na I.*

Teorem 5. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna na I. Tada f ima točku infleksije u $c \in I$ ako i samo ako je $f''(c) = 0$ te postoje c_1, c_2, $\langle c_1, c_2\rangle \subseteq I$ takvi da je*

1. *$f''(x) > 0$ za $x \in \langle c_1, c\rangle$ i $f''(x) < 0$ za $x \in \langle c, c_2\rangle$*

   ili

2. *$f''(x) < 0$ za $x \in \langle c_1, c\rangle$ i $f''(x) > 0$ za $x \in \langle c, c_2\rangle$*

Definicija 1 (Vertikalna asimptota).
Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Kažemo da

1. *f ima vertikalnu asimptotu u a ako je $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ili $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.*
2. *f ima vertikalnu asimptotu u b ako je $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ ili $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$.*

Definicija 2 (Horizontalna asimptota).
Kažemo da

1. *$f : \langle a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ ima horizontalnu asimptotu u $+\infty$ ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$.*
2. *$g : \langle -\infty, a\rangle \to \mathbb{R}$ ima horizontalnu asimptotu u $-\infty$ ako je $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = c \in \mathbb{R}$.*

Tada je to pravac $y = c$.

Definicija 3 (Kosa asimptota).
Kažemo da

1. *$f : \langle a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ ima kosu asimptotu u $+\infty$ ako postoje*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = l \in \mathbb{R}.$$

2. *$g : \langle -\infty, a\rangle \to \mathbb{R}$ ima kosu asimptotu u $-\infty$ ako postoje*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = k \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} (g(x) - kx) = l \in \mathbb{R}.$$

Tada je to pravac $y = kx + l$.

Zadatak 1. *Odredite prirodnu domenu, lokalne ekstreme, točke infleksije, intervale monotonosti, konkavnosti i konveksnosti, asimptote i skicirajte graf funkcije. Koliko funkcija ima nultočaka (odredite ih eksplicitno ako možete)?*

(a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$,

(b) $f(x) = xe^{-x}$,

(c) $f(x) = x^3 e^{-x^2/6}$,

(d) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$,

(e) $f(x) = \mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$,

(f) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$,

(g) $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$,

(h) $f(x) = xe^{1/x}$.

Zadatak 2 (DZ). *Demidović. (1968). Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike. Tehnička knjiga. Poglavlje 3, potpoglavlje 4. Konstrukcija grafova funkcija prema karakterističnim točkama Riješi 935., 951., 959. + 2 zadatka po izboru u rasponu od 916.-987.*

2 Integrali

2.1 Određeni integrali

Tablica integrala

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \tag{2}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{3}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1 \tag{4}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C \tag{5}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\ x + C \tag{6}$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{th}\ x + C \tag{7}$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = -\mathrm{cth}\ x + C \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a > 0 \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a > 0 \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0 \tag{11}$$

Zadatak 3. *Odredite neodređene integrale:*

(a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{2}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int 5^x\,dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$

Zadatak 4. *Odredite primitivnu funkciju sljedećih funkcija:*

(a) $\sin x \cos(2x),$

(b) $xe^{\sin x^2}\cos x^2,$

(c) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

Teorem 6. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, F je antiderivacija (primitivna funkcija) od f, tj. $F' = f$. Tada za svaki segment $[a,b] \subset I$ vrijedi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad \text{(Newton-Leibniz formula)}$$

Zadatak 5. *Izračunajte određene integrale*

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 4\sin^2 x - 3\cos^2 x\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\sqrt{x}+x^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

Teorem 7. *Neka je I otvoren interval, φ diferencijabilna funkcija na $\langle\alpha,\beta\rangle$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ i F primitivna funkcija od f na I. Ako je $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle) \subset I$ tada vrijedi*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Zadatak 6. *Odredite integrale:*

(a) $\displaystyle\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,$

(d) $\displaystyle\int_2^3 x\sqrt{x^2-4}\,dx,$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx,$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^3 x \, dx$,

(g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\sqrt{1+\sin^2 x} \, dx$,

(h) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} \, dx$.

Parcijalna integracija Ako su funkcije u, v neprekidno derivabilne na intervalu koji sadrži segment $[a, b]$ onda vrijedi

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Zadatak 7. *Odredite integrale:*

(a) $\displaystyle\int_0^2 xe^x \, dx$,

(b) $\displaystyle\int \ln x \, dx$,

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx$,

Zadatak 8. *Odredite integrale:*

(a) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{arctg} x \, dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^2 x^3 e^x \, dx$.

Integriranje racionalnih funkcija: Ideja je pronaći integral racionalne funkcije $\frac{P(x)}{Q(x)}$ gdje su P, Q polinomi nad realnim poljem takvi da je $\mathrm{st}P < \mathrm{st}Q$. Ako je

$$\begin{aligned} Q(x) &= \prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{n}((x-p_i)^2+q_i^2)^{l_i} \\ &= (x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_m)^{k_m} \cdot ((x-p_1)^2+q_1^2)^{l_1} \cdot \ldots \cdot ((x-p_n)^2+q_n^2)^{l_n} \end{aligned}$$

za $a_i, p_i \in \mathbb{R}, q_i > 0$, $m, n, k_i, l_i \in \mathbb{N}_0$ tada provodimo *rastav na parcijalne razlomke* , tj. rješavamo sustav po $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{A_{i1}}{(x-a_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(x-a_i)^{k_i}}\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B_{i1}(x-p_i)+C_{i1}}{((x-p_1)^2+q_1^2)} + \frac{B_{i2}(x-p_i)+C_{i2}}{((x-p_1)^2+q_1^2)^2} + \ldots + \frac{B_{il_i}(x-p_i)+C_{il_i}}{((x-p_1)^2+q_1^2)^{l_i}}\right) \end{aligned}$$

Hornerov algoritam: U slučaju da je dan $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ stupnja veći od 2 koji nije faktoriziran, a možete prepoznati nultočke tada se koristi Hornerov algoritam:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
α	$\underbrace{a_n}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{a_{n-1}+\alpha b_{n-1}}_{b_{n-2}}$	$\underbrace{a_{n-2}+\alpha b_{n-2}}_{b_{n-3}}$	$\ldots$	$\underbrace{a_1+\alpha b_1}_{b_0}$	$\underbrace{a_0+\alpha b_1}_{r}$

Ako je $r=0$ tada smo dobili $Q(x)=(x-\alpha)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0)$.

Zadatak 9. *Rastavite na parcijalne razlomke:*

(a) $\dfrac{2}{x^3-1}$,

(b) $\dfrac{1}{x^3-2x^2+x}$.

Zadatak 10. *Odredite integrale:*

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{2x^2+4x-1}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx$.

Primjena trigonometrijskih i hiperboličkih supstitucija na određivanje integrala

Zadatak 11. *Odredite integrale:*

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$,

Integriranje raznih funkcija:

Zadatak 12. *Odredite integrale:*

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(1+x^2)\,dx$,

(b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

3 Nepravi integrali

Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija tako da f nije ograničene u okolini točke b (a). Definiramo nepravi integral kao limes

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{M\to b^-} \int_a^M f(x)\,dx \quad \left(= \lim_{M\to a^+} \int_M^b f(x)\,dx\right)$$

Ako takav limes postoji i konačan je, nepravi integral zovemo konvergentim, u suprotnom divergentim. Općenito, uzimamo i $a = \pm\infty, b = \pm\infty$.

Zadatak 13. *Izračunajte neprave integrale:*

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

Teorem 8 (Apsolutna konvergencija nepravog integrala povlači konvergenciju nepravog integrala)**.** *Neka je $f : [a, b\rangle \to \mathbb{R}$ integrabilna na svakom $[a, B] \subset [a, b\rangle$ (može biti $b = +\infty$). Tada, ako konvergira $\int_a^b |f(x)|\,dx$, konvergira i $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Teorem 9 (Upsoredni kriterij konvergencije nepravih integrala)**.** *Neka su $f, g : [a, b\rangle \to \mathbb{R}$ integrabilne na svakom $[a, B] \subset [a, b\rangle$ (može biti $b = +\infty$) te neka je $0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a, b\rangle$. Tada, ako konvergira $\int_a^b g(x)\,dx$, konvergira i $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Teorem 10 (Granični usporedni kriterij konvergencije nepravih integrala)**.** *Neka su $f, g : [a, b\rangle \to \mathbb{R}$ integrabilne na svakom $[a, B] \subset [a, b\rangle$ (može biti $b = +\infty$) te neka postoji $L = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \in [-\infty, \infty]$.*

1. *Ako je $L \in \mathbb{R}$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergira, tada i $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira.*
2. *Ako je $L \in [-\infty, \infty] \setminus 0$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ divergira, tada i $\int_a^b f(x)\,dx$ divergira.*
3. *Ako je $L \in \mathbb{R} \setminus 0$, tada se integrali $\int_a^b g(x)\,dx$ i $\int_a^b f(x)\,dx$ ponašaju isto po pitanju konvergencije.*

Teorem 11.

1. *$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergira za $p \,\langle 1, +\infty\rangle$, a divergira za $p \in [0, 1]$.*
2. *$\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergira za $p \,\langle 0, 1\rangle$, a divergira za $p \in [1, +\infty\rangle$.*

Zadatak 14. *Ispitajte konvergenciju nepravih integrala:*

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\sin x}{\sqrt{x^5+4}}\,dx,$

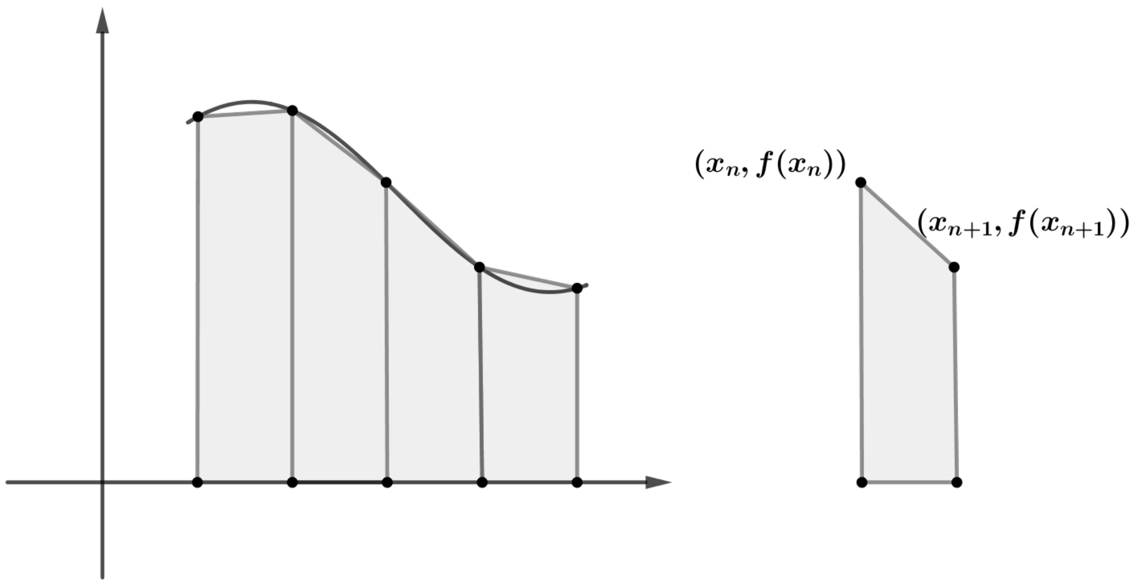
(d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx,$

(e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx,$

(f) $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{\cos(x^2)}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\,dx,$

(g) $\displaystyle\int_{1^+}^2 \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx.$

4 Trapezna formula:



Za uniformnu subdiviziju segmenta $[a, b]$ na n podintervala formula glasi:

$$IT(f, n) = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\ldots\right)$$

gdje je $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Zadatak 15. *Primjenom trapezne formule približno izračunajte* $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ *uz podijelu na 6 podintervala.*
Rj:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1-0}{2\cdot 6}\left(1 + 2e^{-(1/6)^2} + 2e^{-(2/6)^2} + 2e^{-(3/6)^2} + 2e^{-(4/6)^2} + 2e^{-(5/6)^2} + e^{-1}\right) \approx 0.75$$

5 Redovi

Zadatak 16. *Izračunajte sume redova:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Nužan uvjet konvergencije: Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Primjer: Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sin n}$ nije konvergentan jer $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sin n}$ nije definiran. Treba postojati i biti nula, kako bi uopće pričali o ikakvoj konvergenciji.

Teorem 12. *Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s nenegativnim članovima.*

1. ***Usporedni test konvergencije redova***
   Neka postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $a_n < b_n$, za svaki $\forall n > n_0$. Ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira tada i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira tada i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

2. ***Granični test konvergenije redova***
   Neka postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q \in [0, +\infty]$. Razlikujemo tri slučaja:

   (a) Ako je $q = 0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, tada i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

   (b) Ako je $q = +\infty$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, tada i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

   (c) Ako je $q \in \langle 0, +\infty \rangle$ tada se redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ponašaju jednako po pitanju konvergencije.

Zadatak 17. *Ispitajte konvergenciju redova:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Teorem 13. *Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $0 < p \leq 1$.*

Zadatak 18. *Ispitajte konvergenciju redova:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + n^2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^4+1}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln n}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5 + 2n + 3}}{n^4 + 1}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2 + n - 5}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|\sin n|}$.

Teorem 14 (D'Alembertov kriterij konvergencije redova).
Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red takav da postoji* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \in [0, +\infty]$. *Ako je* $q < 1$, *tada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, ako je* $q > 1$ *onda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

Teorem 15 (Cauchyjev kriterij konvergencije redova).
Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red takav da postoji* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in [0, +\infty]$. *Ako je* $q < 1$, *tada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, ako je* $q > 1$ *onda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

Zadatak 19. *Ispitajte konvergenciju redova:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^{n^2}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(4n)!}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Teorem 16 (O apsolutnoj konvergencije redova).
Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red takav da* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergira. Tada je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan.*

Teorem 17 (Leibnizov kriterij konvergencije redova).
Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red takav da niz* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *alternira po predznaku,* $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *te* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. *Tada je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan.*

Zadatak 20. *Ispitajte konvergenciju redova:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n + \sin n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{\ln n}$.

Teorem 18 (Integralni kriterij konvergencije reda)**.** *Neka je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red s pozitivnim članovima. Neka je* $f : [a, +\infty] \to [0, \infty\rangle$ *neprekidna i padajuća takva da je* $f(n) = a_n$ *za* $n > a$*. Red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira ako i samo ako je nepravi integral* $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ *konačan.*

Zadatak 21. *Ispitajte konvergenciju redova:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^5 n}.$

6 Red funkcija

Neka je dan red potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \tag{12}$$

Neka je $K = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ red konvergira u točki $z\}$.
Radijus konvergencije je $r := \sup\{|z-c| \,:\, z \in K\}$. Ako je $|z-c| < r$ tada red konvergira apsolutno, dok ako je $|z-c| > r$ red divergira.

Teorem 19. *Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ red potencija, $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Tada je radijus konvergencije $r = \frac{1}{\rho}$ (uz $0 = \frac{1}{\infty}, \infty = \frac{1}{0}$).*
Dodatno, ako postoji $\rho_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ tada je $\rho = \rho_0$.
Ako postoji $\rho_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ tada je $\rho = \rho_1$.

Zadatak 22. *Odredite radijus konvergencije reda potencija:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n} x^n$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^{3n}} x^n$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n^2)}{n^n} x^n$,

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^n) x^n$,

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1+(-2)^n) x^n$.